

# Framställningen av multiplikation påverkar taluppfattningen

## *Multiplikation i läromedel för årskurs 1–3*

Här ger 2011 års Göran Emanuelssonstipendiater sin analys av hur multiplikation presenteras i läromedel och hur denna presentation påverkar elevernas möjligheter att utveckla sin taluppfattning.

När vi tänker på någon situation eller händelse där multiplikation används blir det ofta i formen: *Det finns 6 russin i varje hög och det är 5 högar. Hur många russin är det tillsammans?* Multiplikation kan även förekomma i många andra situationer. I vår uppsats har vi gjort en läromedelsanalys som handlar om multiplikation och taluppfattning.

Syftet med vår undersökning var att analysera hur olika läromedel framställer räknesättet multiplikation, hur de grundläggande multiplikationskombinationerna struktureras och hur detta kan påverka elevers möjlighet att utveckla sin taluppfattning. Våra resultat visar att några av läromedlen framställer multiplikation på ett begränsat sätt, vilket vi antar ger eleverna sämre möjlighet att utveckla sin förståelse för multiplikation och därmed också för deras taluppfattning. Flera läromedel strukturerar presentationen av multiplikationskombinationerna på sådant sätt att elevernas möjlighet att utveckla sin taluppfattning gynnas.

### Multiplikativa situationer

För att analysera läromedel har vi från det vi funnit i litteraturen utvecklat en modell, ett analytiskt ramverk med fyra typer av situationer där multiplikation med heltal används: *lika grupper, multiplikativ jämförelse, kartesisk produkt och rektangulär area*.

Vi menar att det är viktigt att eleverna ges möjlighet att uppfatta multiplikation på de fyra sätt som Greer beskriver, se ruta på nästa sida. Det är också viktigt att eleverna förstår att dessa situationer kan uttryckas med en och samma numeriska operation, trots att de har olika ursprung och innebörd. En sådan förståelse innebär att eleverna kan lyfta ut den numeriska operationen ur sin situation för att använda ett annat tillvägagångssätt för att lösa operationen.

### Lika grupper

Ett antal grupper med lika många element i varje grupp. Här är två exempel på en sådan situation:

*3 barn har 4 kakor var. Hur många kakor har de tillsammans?  
Om varje barn har 4 kakor, hur många kakor har då 3 barn?*

### Multiplikativ jämförelse

En situation som innehåller en jämförelse av typen  $n$  gånger så många som:

*John har 3 gånger så många äpplen som Mary. Mary har 4 äpplen. Hur många äpplen har John?*

### Kartesisk produkt

Situationen kan beskrivas som ett antal kombinationer som är möjliga att bilda, där de ingående elementen i varje par tillhör två olika grupper  $m$  och  $n$ . Antalet möjliga par bestäms då av  $m \times n$  [utläses "m kryss n" och skrivs med krysstecken, red. anm.]. Ett exempel:

*Om 4 pojkar och 3 flickor ska dansa med varandra, hur många olika danspar är då möjliga?*

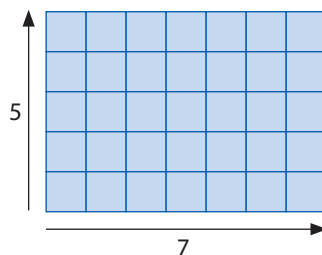
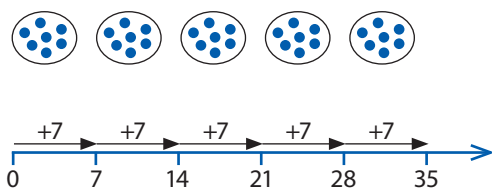
### Rektangulär area

Här ingår areaberäkningar och antal objekt som finns i en rektangulär formation av rader och kolumner. Om sidorna på en rektangel är heltal, t ex 3 och 4 centimeter, är det möjligt att dela in rektangeln i hela kvadratcentimetrar och lätt konstatera att arean är 12 kvadratcentimeter. En rektangulär formation av saker bestående av 3 rader och 4 kolumner är också exempel på denna situation. Situationen rektangulär area erbjuder möjligheter att upptäcka flera egenskaper hos multiplikation, exempelvis kommutativitet.

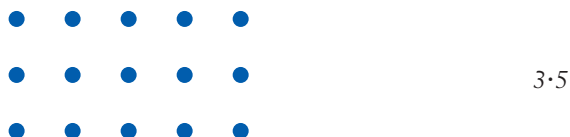
## Multiplikation med olika dimensioner

När vi genomförde vår läromedelsanalys upptäckte vi att vissa läromedel endast synliggör multiplikation på ett endimensionellt sätt, medan andra även visar en tvådimensionell representationsmodell. Den endimensionella synen består av en upprepad addition och kan representeras med flera grupper med lika många i varje grupp eller med en tallinje. Den tvådimensionella synen på multiplikation kan representeras av ett rektangulärt ruttmönster.

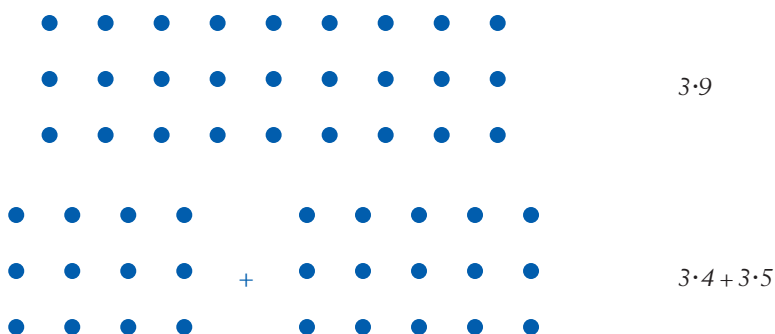
Ett av de läromedel vi analyserade uttrycker endast att multiplikation är upprepad addition medan andra läromedel ger en vidare syn. Den elev som enbart ser multiplikation som upprepad addition kan ha svårt att förstå varför den kommutativa lagen gäller. Det finns också studier som visar att barn som använder sig av upprepad addition för att lösa multiplikationsproblem inte använder sig av den kommutativa lagen i lika stor utsträckning som barn som löser uppgiften med multiplikation. Samma studier visar att upprepad addition till och med kan hindra eleverna från att upptäcka och använda kommutativiteten.



McIntosh (2009) framhåller att den endimensionella synen på multiplikation är fullt riktig men att den utan den tvådimensionella synen ger eleverna begränsade möjligheter till förståelse av multiplikation. Den tvådimensionella synen är också viktig för att eleverna på sikt ska kunna generalisera multiplikation från heltal till rationella tal. Den öppnar dessutom upp möjligheter för eleverna att tillämpa och behärska räknelagar som är viktiga för utvecklingen av elevernas taluppfattning och kan med fördel även användas för att illustrera den kommutativa och distributiva lagen för multiplikation. Den kommutativa lagen blir synlig genom att man väljer att endera betrakta den rektangulära formationen utifrån raderna eller utifrån kolumnerna.



Den distributiva lagen kan synliggöras genom att man delar upp de rektangulärt formerade prickarna i två delar. Den ursprungliga rektangeln innehåller då lika många prickar som de två nya rektangelarna gör tillsammans. Den distributiva lagen binder samman multiplikation och addition och är en nyckel till både huvudräkning och skriftlig räkning.

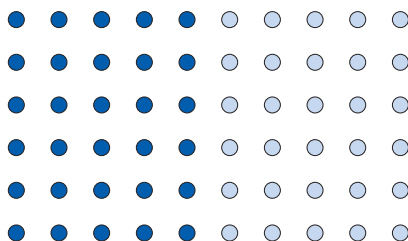


## Samband och tankeformer

Två olika strukturer används för att bygga upp tabellkunskaper utifrån samband och tankeformer. I den ena strukturen väljer man att fokusera på multiplikanden och att göra så kallad talföljdsräkning eller skutträkning. Detta innebär att eleverna räknar multiplerna av ett tal, till exempel 5, 10, 15, 20, 25, 30 vilket ger  $6 \cdot 5 = 30$ . Det är en strategi som fungerar och som är viktig eftersom den på ett tydligt sätt visar sambandet mellan addition och multiplikation. Talföljdsräkning förtydligar dock inte de många samband som finns mellan grupper av multiplikationskombinationer och som vi bör utnyttja för att ge eleverna möjlighet att förstå och lära sig multiplikation. Eftersom talföljdsräkning endast skildrar multiplikation som upprepad addition döljer den de kommutativa, distributiva och associativa egenskaperna hos multiplikation. Elever som enbart utför multiplikation som upprepad addition saknar därför

strategier att hantera multiplikationer, vilket i sin tur kan leda till svårigheter att multiplicera större tal.

Den andra strukturen vi funnit bygger på att eleverna, förutom talföljdsräkning, får lära sig en tankeform för varje grupp av multiplikationskombinationer, exempelvis "två gånger är dubbelt" och "nio är nästan tio". I den här strukturen använder man sig av en speciell tankeform för multiplikatorn för att beräkna en multiplikationskombination. Ett exempel: I en grupp av multiplikationskombinationer är alla multiplikationer med talet 5. Tankeformen som elever kan använda är "hälften av tio gånger", 5 multiplicerat med ett tal är det samma som hälften av 10 multiplicerat med samma tal.



## Analysera läromedlet du använder

Inget av de läromedel som vi har studerat ger en fullständig bild av multiplikation. Tittar man på vad läroplanen och kursplanen i matematik lyfter fram som centralt innehåll för år 3 framgår det att räknetsättens egenskaper och användning i olika situationer ska vara en del av undervisningen för år 1–3. Därför borde lärare kunna räkna med att läromedel för år 1–3 lyfter fram egenskaper hos multiplikation, samt de olika situationer som multiplikation framträder i, på ett mer fullständigt sätt.

Ett annat centralt innehåll för år 1–3 är att undervisningen ska behandla metoder för beräkningar med naturliga tal, vilket vi kallar tankeformer. Vi hade därför förväntat oss att tankeformer skulle ha ett stort utrymme i de läromedel vi analyserade, men våra resultat visar att det finns en variation i hur författarna valt att synliggöra dessa. Vissa läromedel går i linje med kursplanen och presenterar många tankeformer för multiplikationsberäkningar, medan det i andra läromedel nästan saknas helt.

Lärares sätt att undervisa och hur mycket läromedlet styr undervisningen har naturligtvis stor inverkan på vilka möjligheter eleverna har att utveckla en god taluppfattning. Med utgångspunkt i vår analys kan vi dock säga att några av läromedlen behöver kompletteras för att elever ska få bästa möjliga förutsättning att utveckla förståelse för multiplikation och därmed en god taluppfattning.

## LITTERATUR

- Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. (2nd ed.) London, New York: Continuum.
- Brändström, A. (2003). Läroboken – något att fundera på. *Nämnan*, 2003:4, s 21–24.
- Flodström, M. & Johnsson, L. (2010). *Multiplikation och taluppfattning*. Uppsats inom lärutbildningen vid Mälardalens högskola.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as model of situations. I D. Grouws (red). *Handbook of Research on mathematics teaching and learning*, s 276–295. New York: Macmillan.
- Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.

# Analysmodell för multiplikation i läromedel

## **Presentation**

Hur presenteras multiplikation i det läromedel du använder? Representeras multiplikation både en- och tvådimensionellt? Om endast den ena dimensionen visas är det viktigt att det kompletteras med den andra dimensionen så att elevernas syn på multiplikation inte begränsas.

## **Situationer**

Vilka situationer av multiplikation presenteras i lärarhandledning och elevbok? Presenteras lika grupper, multiplikativ jämförelse, kartesisk produkt och rektangulär area i de läromedel som du använder i din undervisning? Är det någon situation som dominerar över de andra? Eftersom det är viktigt för eleverna att kunna tänka multiplikation på de fyra sätt som situationerna beskriver, behöver du som lärare komplettera med de situationer som läromedlet utelämnar eller ger för litet utrymme. Det är viktigt att eleverna utvecklar förståelse för att alla situationer kan uttryckas med samma numeriska operation, eftersom eleven då kan välja den tankeform den föredrar.

## **Räknelagar**

Hur tydliggörs, visas och används den kommutativa och distributiva lagen för multiplikation i den lärarhandledning och elevbok som du använder? Får eleverna möta både en- och tvådimensionella representationer? För båda räknelagarna? Används räknelagarna för att göra beräkningar enklare? Används räknelagarna för att stötta olika tankeformer?

## **Samband och tankeformer**

Hur och i vilken ordning presenteras multiplikationskombinationerna i det läromedel du använder? Har eleverna möjlighet att utveckla sin taluppfattning och räkneförmåga genom att samband mellan grupperna av multiplikationskombinationer tydliggörs? Det är en nackdel att enbart presentera multiplikationskombinationerna som tabeller, eftersom eleverna då inte får möjlighet att se samband och utveckla sina räknefärdigheter. Vilka tankeformer för varje grupp av multiplikationskombinationer förekommer? Tydliggörs, utöver upprepad addition, flera tankeformer för grupperna av multiplikationskombinationer? Läromedel som enbart behandlar multiplikationskombinationerna utifrån upprepad addition, eller talföljdsräkning, kan antas ge eleverna svårigheter att hantera multiplikation.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning: en inkörsport till matematiken*. Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, A. (2009). *Förstå och använd tal: en handbok*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E. (1997). Mental computation in the middle grades. *Mathematics teaching in the middle school*, 2 (5), s 322–327.

Reys, B. J. & Reys, R. E. (1995). Perspektiv på Number sense och taluppfattning. *Nämnamnaren* 1995:1.

Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M. A., Macedo, S. & Nicéas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for research in mathematics education*, 29, (4), s 422–435.