Henrik Petersson

Om begreppet begrepp

Elever behöver ta till sig begrepp på ett djupare plan om de verkligen ska förstå och kunna använda dem i sin problemlösning och i sina resonemang. I artikeln ger författaren exempel på problem som på olika sätt belyser begrepp.

Förmågan att ta till sig begrepp är central vid förståelsebygget i ämnet matematik. Det är därför positivt att begreppsförståelse utgör en av de betygsgrundande förmågorna i matematikämnet på både grundskolan och gymnasiet.

Varför är det då så viktigt att kunna ta till sig begrepp? Eftersom matematiken byggs upp med begrepp och utsagor om begrepp, är ett första svar därför att vi måste känna till begreppens betydelse för att djupare förstå innebörden av matematiska resonemang och påståenden. Betrakta exempelvis följande viktiga sats:

Om $f'(x) > 0$ för alla x på ett intervall (a, b), så är f strängt växande på (a, b).

Många elever har förmodligen svårt att läsa detta som en sats, då de förknippar egenskapen strängt växande med positiv derivata. De läser satsen som ett självklart faktum. Genom att blanda ihop egenskaper givna per definition och härledda (indirekta) egenskaper på detta sätt, omkullkastas alla möjligheter till att förstå hur matematisk teori byggs upp. Då eleverna så småningom möter högskolans intensiva studietempo, där många begrepp ska bemästras på kort tid, är det stor risk att förståelsen inte blir den önskade. Eleverna förleds att fokusera på verktygen kring begreppen (som att identifiera strängt växande med positiv derivata) och missar då förståelsen av helheten i teoriframställningarna.

Det finns även ett djupare svar på frågan om vikten av att ha verktyg för begreppsförståelse. Det är inte bara viktigt att känna till begreppens betydelse, utan det är också viktigt att förstå på vilket sätt en *orientering av begreppen i en problemställning fungerar som verktyg för att lösa problemet i fråga*. En granskning av definitionerna av ett problems begrepp pekar många gånger ut en riktning i vilken problemet kan lösas. Som exempel kan vi betrakta följande utsaga:

Om a är ett udda heltal så är $2^{a/2}$ ett irrationellt tal.

Att kunna bevisa detta påstående är naturligtvis ett hopplöst företag om inte begreppen udda tal och irrationellt tal är klara. Notera även att påståendet blir platt och svårbevisat även om det endast finns en begränsad förståelse om begreppen udda respektive irrationellt tal. Det räcker inte att känna till att ett heltal antingen är udda eller jämnt samt att reella tal kan delas in i rationella och irrationella tal, och därtill kunna lista lite exempel på de olika sorterna av tal. Vi har fortfarande *ingen substans för att kunna behandla problemet.*

En lösning på problemet kräver att vi, på ett djupare plan, känner till hur udda tal och rationella tal kan representeras. Med kännedom om detta *leds vi* fram till att försöka visa att ekvationen $p^2 = q^2 \cdot 2^{(2k+1)}$ saknar heltalslösning (p, q), där k är ett heltal (här kan man anta att k är icke-negativt, och högerledet innehåller då ett udda antal tvåor medan vänsterledet har ett jämnt antal tvåor i respektive primtalsfaktorisering).

Elevers förmåga att ta till sig begrepp

Hur ser det då ut i skolan? Hur är elevers förmåga att ta till sig begrepp? Jag har inget betydande empiriskt underlag att peka på mer än mina egna observationer som lärare. Jag väljer att lyfta fram följande exempel.

Vid inträdesprovet 2012 till Hvitfeldtska gymnasiets spetsutbildning i matematik, som jag arbetar med, var ett av problemen:

> Ett udda tal är ett heltal n som kan skrivas på formen $n = 2 \cdot k + 1$, för något heltal k. Visa att produkten av två udda tal också är ett udda tal, d v s visa att produkten går att skriva som $2 \cdot \text{heltal} + 1$.

Detta problem handlar om att kunna ta till sig definitionen av udda tal. Notera hur lösningen nästan är skriven på näsan för eleven. Trots detta var det ytterst få av de drygt 100 skrivande eleverna i årskurs 9 (med ett betygsnitt klart över medel i ämnet matematik) som löste problemet på ett godtagbart sätt. Det var uppenbart hur eleverna var väldigt vilsna i hur de skulle starta en ansats till lösning och ännu mer oklart vad en lösning på problemet innebar. För mig skvallrar detta exempel om vikten av att låta eleverna tidigt jobba med hur man arbetar med och mot begrepp i matematiken. Det handlar om att kunna förhålla sig till och arbeta inom givna förutsättningar.

Jag ger exempel på tre typer av uppgifter, utifrån vilka man kan jobba med begreppet begrepp. Jag har valt följande namn på problemtyperna:

1. begreppsrika problem
2. begreppsnya problem
3. begreppsfattiga problem.

1. Begreppsrika problem

Ett begreppsrikt problem är ett problem som innehåller många begrepp. En sådan uppgift signalerar för eleven hur viktigt det är att *förstå alla delar och detaljer* i en problemställning för att kunna lösa problemet.

Exempel 1a: Visa att om en summa av ett udda antal heltal är udda, så är ett jämnt antal termer jämna.

Exempel 1b: I ett bråk är nämnaren 30 och täljaren summan av två tal, varav det ena talet är 9. Då Bråke ska förkorta bråket med 3, dividerar han nämnaren med 3 men gör sedan felet att endast dividera talet 9 i täljaren. Bråkets värde blir då 3/2 gånger större. Vilket var bråket som bråkade med Bråke?

I samband med 1b kommer det in en annan aspekt av att kunna ta till sig given information. Här är det många elever som inte svarar på frågan, de anger istället vilket det andra talet i täljaren är.

2. Begreppsnya problem

Begreppsnya problem definieras som problem som innehåller begrepp som eleven inte har någon, eller begränsad, förförståelse av. Vad som kan antas ingå i en elevs förförståelse är naturligtvis beroende på elevgrupp. Eleven utmanas med den här problemtypen att verkligen ta till sig den, bokstavligt, vid handen givna information kring begreppet ifråga. De lär sig arbeta mot definitioner i bevis och problemlösningssammanhang. Här följer ett par exempel på den här typen av problem:

Exempel 2a: Ett *halvtal* är ett tal a sådant att $2a$ är ett heltal. Visa att om a och $a+b$ båda är halvtal, så är b också ett halvtal.

Exempel 2b: Ett *nollställepolynom* är ett polynom vars koefficienter alla utgör nollställen till polynomet. Bestäm alla nollställepolynom av grad två.

Detta senare exempel skulle även kunna falla under kategorin begreppsrikt problem. Notera att det existerar nollställepolynom av grad två, $p(x) = -x^2 - x$ utgör ett sådant och det finns ytterligare ett.

Den bästa formen av begreppsnya problem är i sammanhanget de där lösningen ligger "nära" definitionen, d v s då problemet är närapå löst efter att man har skrivit upp egenskaperna hos begreppen i problemet. På detta sätt blir det tydligt hur viktigt det är att granska det som är givet i en problemställning, som begreppens definierande egenskaper. Här är ett exempel på problem där lösningen ligger nära det givna:

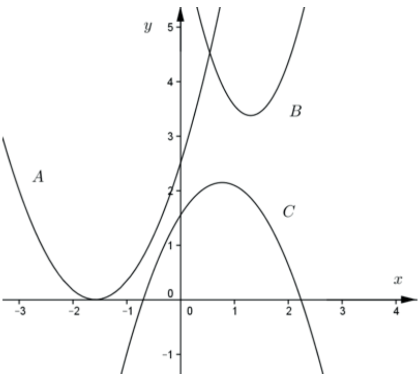
Exempel 2c: Mittpunktsnormalen för ett givet par av punkter A, B i planet består av de punkter som har samma avstånd till A som till B. Visa att de tre mittpunktsnormalerna svarandes mot en triangels tre par av hörn har en gemensam punkt.

Notera här att då det väl konstaterats att mittpunktsnormalerna för två av triangelns tre par av hörn, säg (A, B) och (A, C), har en unik gemensam punkt, så följer det *per definition* att denna punkt även tillhör mittpunktsnormalen för paret (B, C).

3. Begreppsfattiga problem

Begreppsfattiga problem är problem som (explicit) innehåller få begrepp. Här utmanas eleven att själv introducera relevanta matematiskas begrepp för att över huvud kunna *kommunicera* en lösning. Att arbeta med begreppsfattiga problem är ett sätt att visa på den kommunikativa sidan av ha ett rikt begreppsförråd som skapar möjlighet för ökad precision i argumentationen. Bland de tre framlyfta problemtyperna är den här kanske den svåraste att konstruera. Karaktären på problemen blir relativt öppna frågeställningar. Ett exempel:

Exempel 3a: Andrea Graf är mycket intresserad av andragradsfunktioner. En dag intresserade hon sig för vad ekvationen $y = (x-a)^2 + x^2$ ger för typ av andragradskurva. Hon väljer ett värde på a och ritar grafen som svarar mot sambandet $y = (x-a)^2 + x^2$. I figuren nedan visas Andreas graf tillsammans med två andra andragradskurvor. Utred, med motivering, vilken av graferna A, B eller C som måste vara Andreas ritade graf.



Begrepp som kan komma ifråga här: nollställe, symmetrilinje, vertex, koefficient, konkav/konvex, maximi-/minimipunkt. Man kan även låta eleverna försöka uppskatta värdet på *a*, utifrån kurva *B* som är Andreas graf.

Att kunna skilja på satser och definitioner

Jag har lyft fram betydelsen av att kunna ta till sig begrepp i kunskapsbygget inom matematik och vidare föreslagit arbetssätt för att arbeta med begrepp. En fråga man kan ställa sig är *varför* elever väljer att sätta likhetstecken mellan begreppet strängt växande funktion och egenskapen positiv derivata, eller *varför* elever (även de mer drivna) i åk 9 har svårt att organisera ett bevis för att produkten av två udda tal är udda. Varför låter eleverna begreppens innebörd bli synonymt med satser och verktyg kring begreppen, och varför förstår de inte hur man arbetar mot begreppens definitioner i ett bevisföringssammanhang? Vi kan inte skylla på elevernas grundförmåga här, utan vi bör reflektera över vad vi som lärare gör och hur systemet eleverna möter ser ut. Låt mig lyfta fram ett par tankar.

Som lärare måste vi vårda ögonblicket då något introduceras för första gången. Det finns exempelvis idag en tendens till att man möter duktiga elevers vilja att lära sig mer genom att försätta dem i självstudier med någon ”senare” kursbok. Jag möter själv ofta elever som i grundskolan ”läst in” en eller flera av gymnasiets inledande kurser på egen hand. Att läsa in matematik på egen hand kräver en mognad som elever på den här nivån inte har. De behöver hjälp med att ställa (rätt) frågor vid mötet med det nya. Resultatet blir att de tar till sig begreppen de möter på ett ytligare plan. När eleverna så småningom möter begreppet på nytt, bär de med sig eventuella missuppfattningar som påverkar mottagligheten för nya infallsvinklar. Det finns samtidigt en risk att elevernas fokus blir lidande då de upplever att ”detta har jag sett tidigare”, de vill hellre se något ”nytt”.

Jag ska inte uttala mig om grundskolans förutsättningar, med min begränsade insikt, men när det gäller gymnasiet så tycker jag att man ska ompröva dagens kurssystem. Detta är ett stressat system där mycket tid läggs på examinationer och bedömning, och det är ganska stora volymer matematik som ska bearbetas och smältas inom en relativt kort och bestämd tid. Det gör att det inte finns något större utrymme för att stanna upp och tränga djupare in i alla de begrepp som behandlas. Som jag varit inne på finns här en risk att man (både som elev och lärare) fokuserar på rutinmässiga strategier (verktyg) och missar djupet i de begrepp man arbetar med. Eleverna behöver göra erfarenheter där begreppens definitioner är av betydelse, exempelvis på det sätt som jag föreslagit ovan. Om eleverna aldrig får möta situationer där det blir problem med att exempelvis likställa positiv derivata och strängt växande, hur ska de då förstå vikten av att skilja på satser och definitioner?

LITTERATUR

Petersson, H. (2013). *Problemlösningens grunder.* Lund: Studentlitteratur.

Ericsson, C. & Petersson, H. (2015). *Särskilt begåvade elever – ämnesdidaktiskt stöd i matematik.* Stockholm: Skolverket. Tillgängligt 151110 på www.skolverket.se/polopoly_fs/1.235975!/Menu/article/attachment/2_4_begavade_barn_ACCESSIBLE.pdf