

# Elevers uppfattningar av funktioner

Liv Sissel Grønmo och Bo Rosén

*I förra numret av Nämnaren diskuterades olika representationer av funktioner och presenterades diagnoser från det norska KIM-projektet. Här redovisas resultat från utprovningar av dessa diagnoser i åk 5, 7 och 9.*

Till / Från	Situation	Tabell	Graf	Algebraiskt uttryck
Situation		Mätning (1)	Skissning (2)	Modellering (3)
Tabell	Avläsning (4)		Ritning (5)	Tolkning (6)
Graf	Tolkning (7)	Avläsning (8)		Anpassning (9)
Algebraiskt uttryck	Tolkning (10)	Beräkning (11)	Ritning (12)	

## Att bilda begrepp

Inom ett konstruktivistiskt synsätt betonas betydelsen av erfarenhet och reflektion vid utvecklandet av matematiska begrepp. I artikeln om funktionslära i förra numret beskrevs olika representationer av funktioner (Rosén, 1996) utifrån Janvier's sammanställning i matrisform, se figur ovan. Janvier understryker vikten av att eleven får göra erfarenheter av och reflektera över flera representationsformer och övergången från en till en annan. Erfarenheterna - knutna till rutorna i matrisen - blir på det sättet viktiga byggstenar i elevens utveckling av ett eget funktionsbegrepp.

Undervisningen i skolan har ofta koncentrerats till några områden, t ex ruta 5, 8 och 11. Hovedoppgaver, som redovisats av studenter knutna till KIM-projektet, har kommit till liknande slutsatser (Rasch-Halvorsen, 1997). Undersökningar visar att elever har problem med att förstå och använda

funktionsbegreppet för att beskriva samband mellan variabler. Många elever

- betraktar en graf som en bild av en situation
- tror att alla funktioner skall avbildas som räta linjer
- ser ingen skillnad mellan grafisk framställning i statistik och den som används som representationsform för funktioner.

## Om diagnoserna

De flesta diagnosuppgifterna i Nämnaren 23(4) handlar om övergångar mellan graf och situation. Detta betyder inte att de andra övergångarna är mindre viktiga, bara att vi koncentrerat oss på ett område, där undersökningar har visat att eleverna har ofullständiga begrepp eller missuppfattningar. I en kommande artikel diskuterar vi andra övergångar i Janviermatrisen.

Det bör påpekas att diagnosresultaten inte kan tolkas alltför bokstavligt. Man får en bättre bild av elevens förståelse om man kompletterar resultat från diagnoser med

*Liv Sissel Grønmo är amanuensis i matematikdidaktik vid Institutt for Lærerutdanning og Skoleutvikling, ILS, vid universitetet i Oslo. Bo Rosén är forskare inom KIM-projektet vid samma institution.*

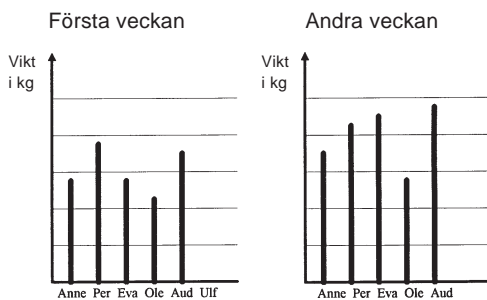
intervjuer. I tabellerna över lösningsfrekvenser har vi ibland utelämnat Övriga svar, vilket förklarar att summan av lösningsfrekvenserna är mindre än 100 %.

## Från graf till situation

### Uppgift 1

Fem elever plockade jordgubbar under två veckor.

- Vem plockade minst under första veckan?
- Vem ökade sitt plockande mest från första till andra veckan?

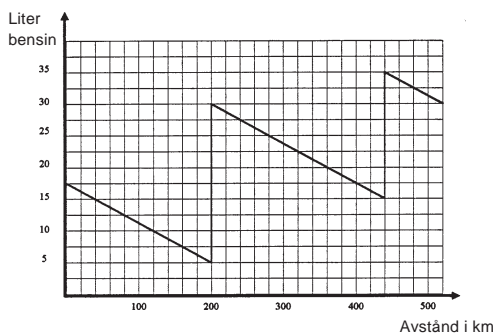


I diagnosuppgiften presenteras ett stolpdiaqram. Syftet är att undersöka om eleverna har operationell förståelse av koordinatsystemet. a-uppgiften klarar 95 % av eleverna. Endast ett fåtal anser att Ulf plockade minst! Missuppfattningen, att högsta stolpen anger störst höjning, kommer fram i b-uppgiften. Att missuppfattningen avtar med ökande ålder ses i tabellen.

	1b	5:e	7:e	9:e
Eva		52 %	68 %	83 %
Aud		41 %	27 %	15 %

### Uppgift 5

Helge gör en resa med bil. Resan är lång så han måste stanna för att fylla på bensin några gånger. Diagrammet visar hur mycket bensin han hade i tanken under resan.



- Hur många liter bensin hade han i tanken efter 120 km?
- Under vilken sträcka var det mindre än 10 liter i tanken?
- Vid hur många bensinstationer stannade Helge? Hur vet du det? Förklara svaret.

5a	7:e	9:e
10 liter	76 %	89 %

5b	7:e	9:e
Ej svarat	10 %	2 %
120-200 km	28 %	50 %
200 km	36 %	21 %

5c	7:e	9:e
Ej svarat	10 %	2 %
2 bensinstationer	58 %	80 %
3 bensinstationer	17 %	12 %

Man kan anmärka att diagrammet inte visar en funktion i strikt matematisk mening, då grafen innehåller lodräta linjer. Syftet är att testa elevernas förmåga att tolka grafer. Även denna uppgift är operationell. Funktionsgrafen blir inte behandlad som ett objekt som man skall förhålla sig till. I de senare klasserna innehåller diagnoserna fler deluppgifter.

Uppgift 6 består av två deluppgifter direkt kopplade till förståelse av koordinatsystemet. Att koordinataxlarna är ograderade gör att svaren kopplas till en redovisning av mera generell förståelse.

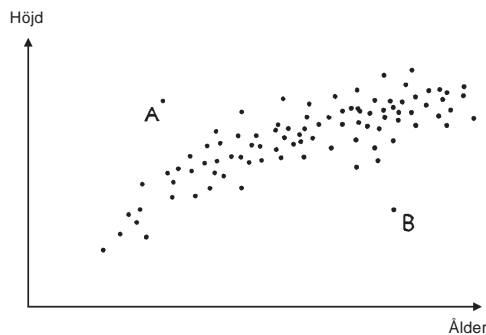
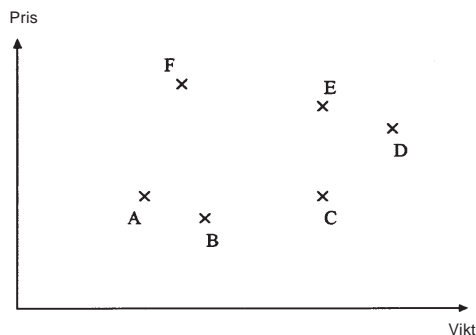
6 a och b avser att testa hur man avläser i ett koordinatsystem.

### Uppgift 6

Varje punkt i diagrammet (se nästa sida) står för en påse socker.

- Vilka påsar väger lika mycket?
- Vilka påsar kostar lika mycket?
- Vilken av påsarna B eller C ger mest för pengarna? Varför?
- Vilka två påsar är lika lönsamma att köpa? Varför är dessa två lika lönsamma?

I c- och d-uppgifterna testas uppfattningar om förhållande. Av tabellerna framgår att många elever fattar sina beslut utifrån en endimensionell uppfattning. I d-uppgiften gäller det proportionalitet. 6 d-uppgiften gavs bara i åk 7 och 9.



<b>6 a</b>	<b>5:e</b>	<b>7:e</b>	<b>9:e</b>
C och E	43 %	54 %	71 %
A och C	42 %	35 %	23 %
<b>6 b</b>	<b>5:e</b>	<b>7:e</b>	<b>9:e</b>
A och C	57 %	68 %	80 %
C och E	23 %	18 %	15 %
<b>6 c</b>	<b>5:e</b>	<b>7:e</b>	<b>9:e</b>
Ej svarat	13 %	9 %	3 %
C	49 %	65 %	78 %
B	37 %	24 %	17 %

### Uppgift 8

En vetenskapsman noterade höjd och ålder på 100 björkar. Han ritade in resultatet i ett diagram. Varje träd svarar mot en punkt. I diagrammet är två träd markerade med A och B. Vad kan man säga om dessa träd?

<b>8</b>	<b>5:e</b>	<b>7:e</b>	<b>9:e</b>
Ej svarat	17 %	12 %	10 %
Accept. förklaring	36 %	52 %	63 %
Bildmässig förklaring	15 %	13 %	8 %
Refererar till en axel	11 %	4 %	3 %
Övriga svar	21 %	19 %	16 %

Då det gäller varför-frågan i 6 c fördelar sig svaren på följande sätt.

Ej svarat	19 %	13 %	7 %
Accept. förklaring	24 %	45 %	63 %
C. Endim. uppfattn.	11 %	12 %	9 %
B. Endim. uppfattn.	21 %	13 %	10 %
Övriga svar	25 %	17 %	11 %

<b>6 d</b>	<b>7:e</b>	<b>9:e</b>
Ej svarat	20 %	18 %
B och D	5 %	13 %
A och C	25 %	16 %
C och D	15 %	19 %
A och B	8 %	4 %
Övriga svar	32 %	30 %

Varför-frågan i 6 d gav följande resultat:

Ej svarat	26 %	27 %
Accept. förklaring	3 %	11 %
Prop.tänkande	11 %	16 %
Samma pris	11 %	8 %
Övriga svar	49 %	38 %

Proportionalitetstänkande utvecklas över tid. "A och C"-svaren betyder att man bara ser en dimension, priset. "C och D"-svaren kan hänföras till att förändringarna i axelled är ungefär lika stora. Att andelen övriga svar är hög tolkar vi som att eleverna är osäkra.

Uppgiften kräver mer än procedurrell förståelse. Eleverna förväntas ha en strukturell förståelse av grafen. Uppgiftstypen är nog ovanlig. Man kunde vänta sig att många inte besvarar uppgiften, vilket också var fallet. En form för missuppfattning är att grafen tolkas som en bild av situationen, ett flygfoto (ca fem elever i en klass). Det medför att elever ser prickarna som en dunge av träd, där A och B ligger i utkanten.

### Från situation till graf

#### Uppgift 1

Fem elever plockade jordgubbar under två veckor. (Se diagram sidan 31).

c) Ulf plockade bara första veckan. Han plockade mindre än Eva och mer än Ole. Rita in hur mycket Ulf kan ha plockat första veckan.

<b>1 c</b>	<b>5:e</b>	<b>7:e</b>	<b>9:e</b>
Ej svarat	9 %	9 %	5 %
Rätt svar	81 %	86 %	91 %
Kortare än Ole	1 %	2 %	2 %
Längre än Eva	3 %	1 %	1 %
Som Eva eller Ole	1 %	1 %	1 %
Övriga svar	5 %	1 %	0 %

Uppgiften har hög lösningsfrekvens, men andelen Ej svarat är relativt hög.

### Uppgift 9

Ola löper 400 meter. Han startar snabbt. Efter 200 meter blir han trött och farten minskar. Han spurtar då han närmar sig mål. Rita en graf som visar hur farten varierar under loppet.

<b>9</b>	<b>9:e</b>
Ej svarat	6 %
Rätt form. Avslutar med sjunkande graf	3 %
Rätt form. Andra avslutningar	45 %
Rätt form. Startar inte i origo	12 %
Hastighetsändringen är inte vid 200 m	7 %
Övriga svar	27 %

Situationen i uppgiften får anses som välbekant för eleven. Delar av loppet värda att uppmärksamma särskilt är starten och kurvan. Att definitionsområdet är givet, som det är i texten, gör att vi vid bedömningen inte kan ha någon synpunkt på den del av grafen som beskriver situationen efter målgången. Det är ändå intressant att notera hur de beskriver situationen. Vissa låter grafen gå uppåt, svarande mot att Ola sprang fortare efter målgången! Andra ritar en lodrätt graf - "löparen faller död ner på mållinjen"! Några slutar ritandet vid 400 meter. Alla dessa beskrivningar av situationen har vi samlat ihop under "Rätt form. Andra avslutningar".

### Från formel till situation

#### Uppgift 11

Sambandet  $y = 4x$  passar till följande räkneuppgift:

*y kronor är det du måste betala för x kg potatis om den kostar 4 kr per kg.*

Skriv ner en uppgift som passar till sambandet

$$y = 25x + 20$$

<b>11</b>	<b>9:e</b>
Ej svarat	28 %
Acceptabel uppgift	40 %
Ofullständig uppgift, riktigt uttryck	12 %
Beskrivning andra situationer	6 %

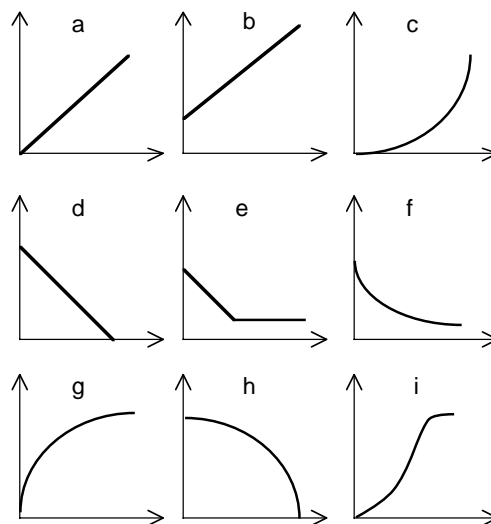
Denna typ av uppgifter är inte så vanlig i vår matematikundervisning. Avsikten är att man skall uppfatta funktionsuttrycket som något som ger information och som kan ge modeller till en hel rad förklaringar. För att underlätta besvarandet har vi givit ett exempel på vad som avses.

De flesta av de riktiga berättelserna (40%) kom att handla om pengar. Kanske

inte så konstigt med tanke på att exemplet handlade om just detta. Vad skulle resultatet blivit med ett exempel från en annan kontext?

### Från tabell till graf

#### Uppgift 13



Vilken av graferna ovan passar bäst till var och en av tabellerna nedan?

a) Avsvälning av kaffe

Tid, min. (x)	0	5	10	15	20	25	30
Temp. °C (y)	90	79	70	62	55	49	44

b) Antal fåglar på en vulkanö

År (x)	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940
Antal (y)	0	1	5	17	30	30	30

<b>13 a</b>	<b>9:e</b>
Ej svarat	17 %
alternativ f	40 %
e, d eller h (andra avtagande)	19 %
a, b, c, g eller i (växande)	20 %

<b>13 b</b>	<b>9:e</b>
Ej svarat	18 %
alternativ i	51 %
a, b, c eller g (andra växande)	18 %
e, d, f eller h (avtagande)	8 %

Uppgiften avser att testa om eleverna kan se relationer mellan en tabell och en graf. Svartalternativen är ett antal växande eller avtagande grafer. När valet är gjort mellan växande och avtagande skall elev-

en också avgöra vilken av graferna som beskriver situationen.

### Nästa artikel

Nästa gång tar vi upp några av orsakerna till att elever har ofullständiga begrepp eller visar missuppfattningar som i uppgifterna ovan. Vi kommer också med några förslag till undervisningsaktiviteter, som kan motverka att missuppfattningar uppstår och som vi hoppas kan ge underlag för en bättre begreppsbildning hos eleverna.

### Referenser

- Janvier, C. (1984). *The Interpretation of Complex Cartesian Graphs: Studies and Teaching Experiments*. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham.
- Rasch-Halvorsen, A. (1997). *Funksjoner i grunnskolen*. ILS, Universitetet i Oslo.
- Rosén, B. (1996). *Funktionslära i skolmatematik*. Nämnaren 23(4), 44-47.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. University of Nottingham, NG7 2RD. Manchester: Richard Bates Limited.