

Funktioner i berg- och dalbana

Liv Sissel Grønmo & Bo Rosén

I förra numret redovisades resultat från utprövningar av diagnoser i funktionslära i åk 5, 7 och 9 i norska skolor. I denna artikel diskuteras möjliga orsaker till att elever har ofullständiga begrepp eller missuppfattningar. Det ges också förslag på undervisningsaktiviteter med syfte att hjälpa elever till ett mer utvecklat funktionsbegrepp.

Varför missuppfattningar?

Elevers erfarenheter och deras reflektioner runt dessa ger en grund för utveckling av olika begrepp. I förra artikeln (Grønmo & Rosén, 1997), betonade vi att elever behöver varierande erfarenheter knutna till alla rutorna i Janviermatrisen och övergångarna mellan dessa för att utveckla ett eget funktionsbegrepp.

Om elever ställs inför ett formellt funktionsbegrepp och deras erfarenheter är ringa är det inte så konstigt att de uppvisar olika missuppfattningar. Då eleven inte har andra erfarenheter av funktioner än räta linjer när begreppet introduceras, så är det inte annat att vänta än att funktionsbegreppet knyts till räta linjer. Har de bara erfarenheter av att översätta från situation till tabell och därifrån till graf, så knyts begreppsbyggnaden till denna sekvens. Bland annat har Vinner (1993), Vinner & Dreyfus (1989) och Even (1993) pekat på problem knutna till att eleven har speciella förväntningar på funktioner.

Ett sätt att hjälpa eleverna att skapa ett bra funktionsbegrepp tycks vara – i överensstämmelse med konstruktivistiskt synsätt – att ge elever många och varierade erfarenheter knutna till alla rutorna i Jan-

viermatrisen, dvs till de olika formerna för representation av funktioner och till ”översättningar” mellan dessa. Man bör vänta med att formellt definiera vad en funktion är tills eleven fått ett sådant varierat erfarenhetsunderlag. Funktion är – i motsats till tal-, multiplikations- och divisionsbegrepp – något som eleven sannolikt inte har mött utanför skolan. Det är ett teoretiskt begrepp som introduceras i skolans undervisning.

Vetenskap och skolämne

När nu skolan lägger så stor vikt vid att tidigt använda namnet funktion, och mindre vid att ge eleverna varierade erfarenheter, kan det vara intressant att diskutera förhållandet mellan matematik som vetenskap och matematik som skolämne. Begreppet ”elementarisering” har använts för att beskriva processen med att göra delar av den vetenskapliga matematiken tillgänglig som skolämne (Tietze, 1994; Steinbring, 1994). I stort har denna process styrts av ämnesmatematiker av olika kategorier, och det har ofta understrukits att den matematik som eleverna lär i tidigare årskurser skall bidra till att de kan lära sig mer matematik i senare utbildning. Det sistnämnda är en målsättning, som vi antar att de flesta av oss delar. Men tolkningen av den, både bland läromedelsförfattare och lärare, tycks vara att lägga större vikt vid att ge generella och riktiga definitioner än vid att svara på elevens

Liv Sissel Grønmo är amanuensis i matematikdidaktik vid Institutt for Lærerutdanning og Skoleutvikling, ILS, vid universitetet i Oslo.

Bo Rosén är anställd som forskare i KIM-projektet vid samma institution.

behov av många och rika erfarenheter att reflektera över. Det senare är en nödvändig förutsättning för en god begreppsbyggnad och de bidrar till att eleverna lär mer matematik än om de presenteras en formell definition.

Undervisningsaktiviteter

Kommunikation är ett nyckelord när det gäller att utveckla begrepp. Detta gäller både kommunikation elev–elev och elev(er)–lärare.

Traditionellt har en stor del av matematiklektionerna gått åt till att låta eleverna sitta och räkna uppgift på uppgift, samt att därefter kontrollera att svaret är rätt med hjälp av facit eller läraren. Om man syftar till att eleverna skall utveckla – alternativt vidareutveckla – begrepp eller att undanröja missuppfattningar kan man sikta mot att låta eleverna möta situationer där de sätter ord på egna tankar och reflekterat kring begreppen. I de diagnostiska uppgifter som presenterats i Nämnaren (Rosén, 1996) ligger huvudvikten på att kartlägga om eleverna kan översätta från situation till graf och omvänt. Också i vårt förslag till undervisningsaktiviteter ligger tyngdpunkten här. Detta får inte tolkas som att de andra rutorna i Janviermatrisen eller övergångarna mellan dessa är mindre viktiga. I senare artiklar hoppas vi återkomma och utveckla idéer kring andra delar av Janviermatrisen.

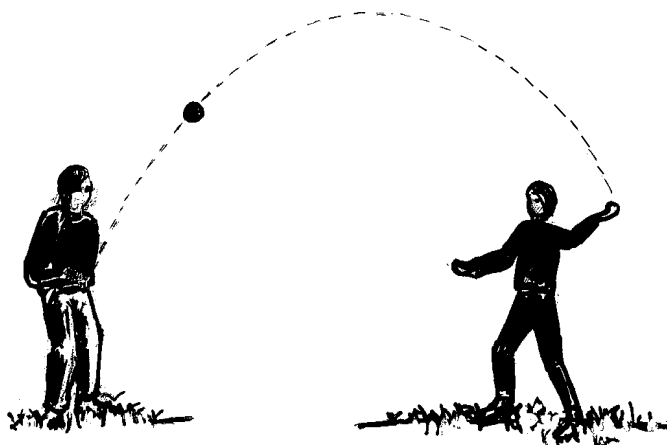
Från situation till graf

Kast med liten boll

I figur 1 ser du hur Kalle kastar en boll som fångas av Brita. Rita en graf som visar hur bollens fart varierar med tiden från det ögonblick bollen lämnar Kalle och till den fångas av Brita.

Förslag till undervisning

Låt eleverna först lösa uppgiften på egen hand. Därefter diskuteras den i grupper på 3–4 elever och de enas om ett gemensamt



Figur 1. Kalle kastar en boll som fångas av Brita.



Figur 2. Koordinatsystem för graf som visar hur bollens fart varierar med tiden.

förslag och detta presenteras. En elev från varje grupp får visa gruppens förslag med en skiss på tavlan. Låt alla grupperna skissa sina förslag i samma koordinatsystem. Ingen – varken elev eller lärare – får lov att kommentera förslagen under presentationen.

Den i gruppen som lägger fram förslaget skall också med ord berätta, visa på axlarna och förklara vad den grafiska framställningen uttrycker. Det är viktigt att man sätter ord på vad man har tänkt i gruppen. Lärarens roll är inte att värdera riktigheten av det som sägs, utan att sörja för att alla får förklara sitt förslag på ett rimligt sätt (inga kommentarer från andra, osv). Diskussionen tas upp efter det att alla har redovisat sina förslag.

Reflektioner över missuppfattningar

Även om vi vet (utifrån diagnosen) att elever i klassen har missuppfattningar av olika slag, så är det långt ifrån säkert att dessa kom-

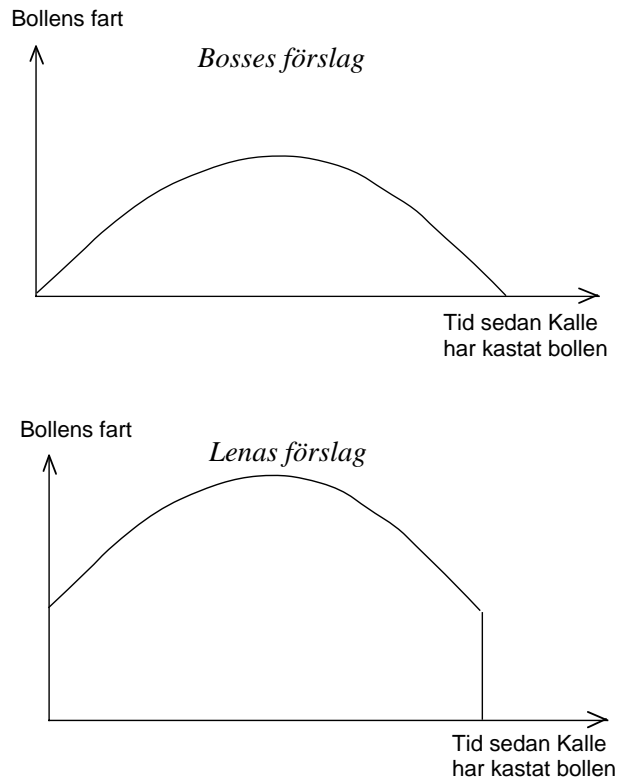
mer fram vid gruppredovisningen. Detta beror ibland på att duktigare elever i gruppen lyckas överbevisa de som har missuppfattningar eller ofullständiga begrepp. Ändå bör man vid redovisningen utgå från gruppen. Det kan vara tufft för en elev att lägga fram en egen missuppfattning inför klassen. Läraren kan i stället presentera en felaktig framställning, som ingen i klassen "äger". Tex kan den ritade grafen med den aktuella missuppfattningen presenteras som kommande från okända elever, Bosse och Lena, se figur 3. Läraren kan be alla elever att i grupp diskutera lösningen innan den diskuteras i klassen. Det är ofta nödvändigt att fokusera direkt på missuppfattningen och be eleverna att finna argument för om lösningen är riktig eller ej. Om man inte tar upp missuppfattningar, som man vet finns i klassen, medför detta med stor sannolikhet att de elever som har dem inte heller ändrar sin uppfattning.

Förslag till andra aktiviteter

Det är mest motiverande att använda exempel som eleverna har praktisk erfarenhet av. Ibland kan man använda exempel som att kasta ett spjut, sparka en fotboll, osv. Olika elever har olika erfarenhet. Flickor har t ex en annan erfarenhetsvärld än pojkar. Man bör därför reflektera lite över vilka exempel man väljer att presentera. Ytterligare exempel:

- hur din längd varierar med ålder,
- hur mängden deg, som behövs för att göra en pizza, beror av pizzans diameter,
- hur mängden dagsljus beror av vilken tid det är på året,
- hur antalet personer på ett storköp varierar under en genomsnittslördag,
- hur vattenhöjden i ditt badkar varierar före, under och efter badet.

Eleverna bör uppmanas att tänka igenom hur de skall rita, att vara noggranna med vad koordinataxlarna anger och att skriva en förklarande text under grafen.



Figur 3.

Bosse och Lena ritade dessa grafer som svar på uppgiften "Kast med liten boll".

- Diskutera deras förslag med en kamrat.
- Varför tror ni att Bosse har ritat grafen så?
- Vad är skillnaden mellan deras förslag?

Sommarlägret

Denna uppgift om flagghissning (se nästa sida) handlar om övergången från graf till situation. Också här kan man först låta eleverna arbeta individuellt och göra egna anteckningar. Därefter diskuteras uppgiften i grupp och slutligen lägger gruppen fram sitt resultat för diskussion i klassen. Syftet är också här att ta bort något av den osäkerhet som elever har inför att presentera något som eventuellt inte är korrekt, samtidigt som de tvingas till att utveckla ett eget språk för sina tankar. Lärarens roll är att hela tiden sörja för en god atmosfär, inte att värdera eller kommentera, utan pröva att låta alla komma fram med sina idéer. Läraren bör efterhand i slutdiskussionen fokusera på det som är viktigt matematiskt sett. Eleven bör övertygas om att det är viktigt att ge akt på vad koordinataxlarna anger. De bör också få klart för sig att vi studerar sambandet mellan variabler.

Uppgift

Varje morgon under sommarlägret väljs en deltagare som skall hissa flaggan.

- Förklara med ord vad var och en av graferna i figur 4 beskriver!
- Vilken av graferna beskriver situationen bäst? Varför?
- Vilken av graferna är minst realistisk?

Berg- och dalbanan

Här följer slutligen ett förslag på en lite mer sammansatt aktivitet, där eleverna går från situation till graf och omvänt. I denna aktivitet är målet också att eleverna ska inse vikten av noggrannhet då de skissar grafen.

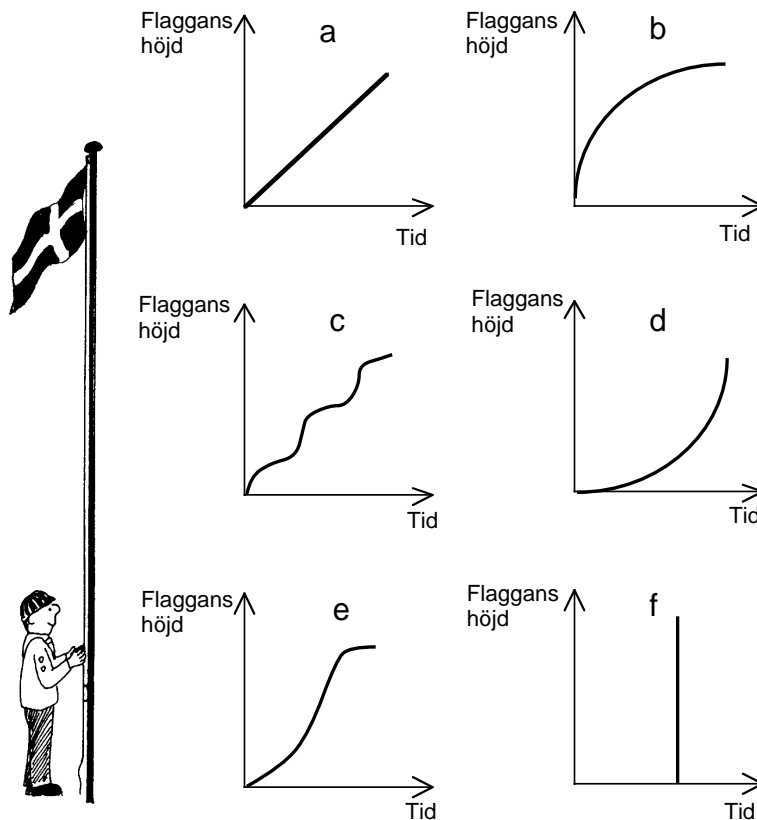
Figur 5 visar ett berg- och dalbanetåg som rullar med långsam, konstant fart mellan A och B.

- Hur kommer tågets fart att variera då det går från A till G?
- Ge ditt svar både genom att beskriva med ord och skissa en graf.

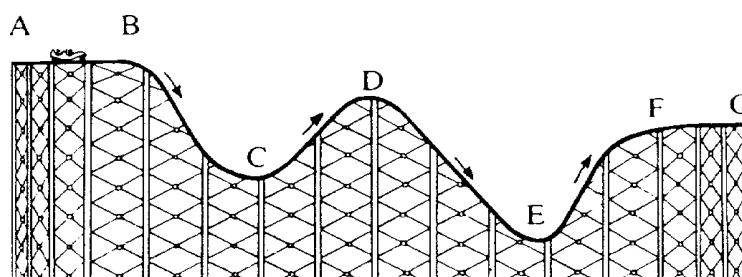
Förslag till genomförande

Denna uppgift kan eleverna lösa individuellt. Då de är färdiga med sin graf skall alla lägga bort bilden av berg- och dalbanan. Sedan skall de, med endast den grafiska framställningen framför sig, skriftligt svara på följande frågor:

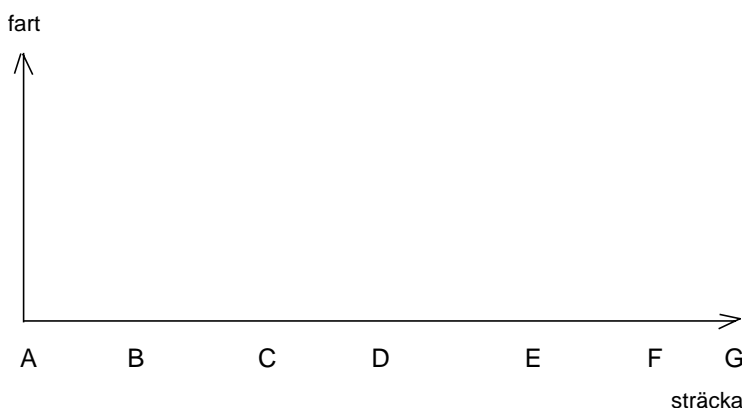
- Var någonstans på färden kör tåget snabbt? Långsamt?
- Kör tåget fortast i B eller i D?
- I D eller i F?
- I C eller i E?
- Var ökar tågets fart?
- Var minskar farten?



Figur 4. Vad beskriver graferna? Vilken beskriver situationen bäst?



Figur 5. Berg- och dalbana.



Figur 6. Koordinatsystem för graf till berg- och dalbana.

Så tar eleverna fram den ursprungliga bilden av berg- och dalbanan. De kan då själva, genom att titta på den, avgöra om de har svarat rätt eller fel.

Rita din egen berg- och dalbana

Alla elever kan sedan rita sin egen berg- och dalbana. Uppgiften kan ges på följande sätt:

- Tänk på några berg- och dalbanor som du åkt. Välj ut en och rita en skiss som visar hur din bana ser ut.
- Rita sen på ett annat ark en graf, som visar hur berg- och dalbanetågets fart varierar med avståndet från startpunkten.

Eleverna byter sedan graf med en kamrat. Med utgångspunkt i denna graf skall de därefter göra en skiss på hur kamratens berg- och dalbana ser ut. Eleverna sätter sig tillsammans i par och diskuterar sina skisser och de grafer de har ritat.

- Hur bra stämmer kamratens skiss av berg- och dalbanan med den ursprungliga bilden som skisserats?
- Vad är det viktigt att tänka på för att en annan elev skall kunna rekonstruera berg- och dalbanan utifrån den grafiska framställningen?

Man kan också be eleverna själva, och/eller i par, leta efter sammanhang mellan bilden av berg- och dalbanan och grafen som visar tågets hastighet. Be dem skriva ner de sammanhang/slutsatser de kommer fram till.

Slutord

Vi har valt att ge några förslag till hur man kan arbeta i klassrummet med de olika uppgifterna. Många av idéerna är hämtade från Shell Centre-materialet (1985). Förslagen till genomförande baserar sig på våra erfarenheter vid användning av uppgifterna. Det som görs individuellt eller i grupp kan givetvis varieras, men det är vik-

tigt att man alltid skapar en förutsättning för reflektion och diskussion. Till slut kan man ta upp samband/slutsatser till diskussion i klassen. Alla elever bör få möjlighet att diskutera och argumentera, men läraren bör också se till att viktiga poänger kommer fram vid den gemensamma summeringen efter gruppaktiviteterna. I Brekke & Rosén (1996) finns en sammanfattning med förslag på hur man arrangerar diskussioner och vilken lärarens roll bör vara vid dessa.

Gör egna förslag till lektionsupplägg och pröva dem i din klass. Skriv till oss och berätta om egna tankar och erfarenheter av att undervisa på detta sätt.

Referenser

- Brekke, G. & Rosén, B. (1996). Diagnostisk undervisning. *Nämnamnaren* 23(2), 35-40.
- Even, R. (1993). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for Research in Mathematics Education* 24(2), 94-116.
- Grønmo, L. S. & Rosén, B. (1997). Elevers uppfattningar av funktioner. *Nämnamnaren* 24(1), 43-46.
- Rosén, B. (1996). Funktionslära i skolmatematik. *Nämnamnaren* 23(4), 44-47.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. University of Nottingham, NG7 2RD. Manchester: Richard Bates Limited.
- Steinbring, H. (1994). Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education. I Biehler, Scholz, Sträßer, & Winkelmann. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 89-102. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tietze, U. P. (1994). Mathematical Curricula and the Underlying Goals. I Biehler, Scholz, Sträßer, & Winkelmann. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 41-53. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notation of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 14, 293-305.
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Image and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20(4), 356-366.