

2D

4D

Hemligheten i flaskan

BEGREPP — RESONEMANG — SANNOLIKHET

Avsikt och matematikinnehåll

Den här aktiviteten utgår från samma idé och material som i 2D4D *Flaskracet*. Skillnaden är att utfallsrummet nu är dolt så att vi inte kan se kulorna och beräkna den teoretiska sannolikhetsfördelningen. Genom experiment ska eleverna fastställa den *experimentella sannolikhetsfördelningen* och utifrån den beskriva utfallsrummet. För att åstadkomma ett dolt utfallsrum tejpar eller målar vi över flaskan förutom en liten bit längst ut på flaskans hals så att man enbart kan se den kula som hamnar längst ner när flaskan vänds upp och ner. Inga andra kulor ska synas. Elevernas uppgift blir att ta reda på flaskans hemliga innehåll och de får INTE öppna flaskan för att kontrollera innehållet! Genom aktiviteten får eleverna en konkret upplevelse av en experimentellt baserad modell av sannolikhet. Dessutom utmanas kanske de sociomatematiska normerna i klassrummet när det gäller att lita på sina egna modeller och sin egen argumentation jämfört med att rätta sig efter facit.

Förkunskaper

Erfarenheter från att beräkna teoretisk sannolikhet, t ex från 2D4D *Flaskracet*.

Material

En täckt PET-flaska till varje elevgrupp, vaddkulor i tre olika färger och med en storlek som precis går in i flaskan samt arbetsblad med frekvenstabeller (se elevsidorna).

Beskrivning

Aktiviteten bygger på att eleverna gör många stickprov och får fram relativa frekvenser över färgernas fördelning. Med utgångspunkt i sina resultat ska de försöka lista ut hemligheten i flaskan: hur många kulor av varje färg finns där? Genom att dokumentera hur ofta en händelse inträffar, exempelvis händelse "gul kula längst ner", kan vi se vilka händelser som är vanligare än andra. Låt eleverna arbeta i par eller smågrupper. *Du ska inte veta fördelningen i flaskan!* Dock behöver du veta det totala antalet kulor per flaska för att de relativa frekvenserna ska kunna omvandlas i absoluta antal. Kanske kan en kollega stoppa i kulorna i flaskorna så att det är okänt för alla? Det är viktigt att alla grupper har *samma fördelning* i flaskan den här gången så att det i slutändan går att addera allas stickprov och få ett riktigt stort underlag.

Givetvis finns det ett slags "facit" i form av en teoretisk sannolikhetsfördelning som går att beräkna om flaskan öppnas och kulorna hålls ut, men om ni verkligen vill utmana normen att det alltid finns ett facit så undvik att göra det. Låt istället klassen genom att experimentera, diskutera och argumentera gemensamt avgöra utfallsrummet i flaskan med utgångspunkt i den experimentella sannolikhetsfördelningen. Svårighetsgraden på övningen kan varieras genom att både antalet färger och fördelning varieras.

Varje elevgrupp gör två stickprov med 25 observationer vardera. Dessa fylls i på elevbladet i tur och ordning. Efter 25 observationer kan resultatet se ut så här:



Frekvenstabell för stickprov 1

(25 observationer)

utfall	absolut frekvens	relativ frekvens
gul	7	7/25
blå	5	5/25
röd	13	13/25

G	R	R	G	B	R	G	R	R	R	B	G	R	B	R	R	B	G	G	B	R	R	G	R	R
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Eleverna summerar hur många de fick av varje färg i frekvenstabellen. Den relativa frekvensen beräknas också. Tjugofemtedelar, femtiondelar och hundradelar är de bråk som kommer att förekomma i den här aktiviteten. Om försöket görs i en klass där det känns alltför svårt att arbeta med bråk kan ni avvakta med den delen till samtalet i helklass och enbart låta eleverna fylla i den absoluta frekvensen. I helklassdiskussionen kan ni gemensamt beskriva de relativa frekvenserna som andelar och relatera till hälften, mer än hälften, mindre än hälften. Aktiviteten kan också ses som ett bra tillfälle att introducera bråkräkning.

Låt eleverna diskutera sina utfall och gärna jämföra med andra grupper. Låt dem därefter genomföra ett stickprov till med 25 observationer och sedan jämföra de båda stickproven. De ska slutligen addera sina två stickprov så att de får ett större stickprov med 50 observationer. På elevsidorna finns frågor som kan hjälpa eleverna att föra samtal om sina resultat och argumentera för fördelningen i flaskan.

Introduktion

Visa eleverna en täckt flaska och låt dem diskutera hur de kan ta reda på kulornas färgfördelning utan att öppna den. Poängtera att det är TOTALT FÖRBUDET att öppna flaskan. Korken kan gärna vara fastlimmad.

Uppföljning

När alla grupper genomfört minst två stickprov samlas ni kring en gemensam uppföljning och helklassdiskussion. Diskussionen har tre lärandemål:

1. Att förstå skillnaden mellan *absolut frekvens* och *relativ frekvens*.
2. Att erfara *de stora talens lag*: att vi får en bättre och säkrare modell ju fler observationer vi gör.
3. Att kunna resonera om ett *dolt utfallsrum* utifrån en *experimentell sannolikhetsfördelning* och att omvandla relativa frekvenser till absoluta antal.

Sammanställ elevernas resultat så att alla kan se dem. Börja med att titta på resultaten för endast en färg, exempelvis gul. Jämför resultat av små stickprov (25 observationer), med medelstora stickprov (50 observationer), med större stickprov (addera två gruppers resultat till 100 observationer) och slutligen med hela klassens samlade resultat. Beräkna gemensamt den relativa frekvensen för gul i samtliga fall.

Intressanta frågor att diskutera är exempelvis:

- Hur förändras den absoluta frekvensen av gul när vi gör allt större stickprov?
(Den ökar hela tiden.)
- Hur förändras den relativa frekvensen av gul när vi gör större stickprov?
(Den är ganska lik och stabiliserar kring ett värde som är den experimentella sannolikheten.)

- Hur många gula tror ni att det finns i flaskan?
- Hur många observationer skulle vi behöva göra för att vara alldeles säkra?

Öppna inte flaskan! Om eleverna inte känner sig tillfreds med att kunna lita på att de verkligen kommit fram till rätt fördelning får de uppmanas att göra ännu fler observationer tills de känner att de litar på resultatet. Dra paralleller till andra undersökningar där man är helt beroende av experimentell sannolikhet eftersom det inte går att "öppna flaskan". Exempel på sådana undersökningar är valundersökningar eller opinionsmätningar där man förlitar sig på ett stickprov istället för att fråga alla eftersom det är för många att fråga. Ibland är utfallsrummet också helt dolt, till exempel när vi undersöker rymden som är för stor eller atomer som är för små för att vi ska kunna se dem. Då samlar vi data och gör beräkningar som bygger på samma principer som experimentet med flaskan. När vi gjort tillräckligt många stickprov konstruerar vi en experimentell sannolikhetsmodell som vi håller för sann tills den överbevisas.

Variation

Gör ni aktiviteten flera gånger kan eleverna få undersöka flaskor med olika fördelning och göra jämförelser. Exempelvis kan två olika fördelningar användas i klassen och elevernas uppgift blir att försöka avgöra vilka av flaskorna som har lika innehåll.

Utveckling

Fortsätt med undersökningar där det inte går att "öppna flaskan" utan där man är helt beroende av experimentell sannolikhet.

Ursprung

Aktiviteten finns presenterad i Matematiklyftets modul Sannolikhet och statistik, åk 4–6. Konstruktörer är Per Nilsson, Örebro universitet och Andreas Eckert, Linnéuniversitetet.

Se film

En inspelad lektion med en klass som undersöker Hemligheten i flaskan finns på Matematiklyftets lärportal. Sök dig dit via modulen Sannolikhet och statistik, åk 4–6, Del 4.

Hemligheten i flaskan

Flaskor med dolt utfallsrum

Hur kan man ta reda på hur många kulor det är av varje färg i en flaskan som inte är genomskinlig? Det är en av de frågor som ni får möjlighet att besvara i denna aktivitet.

Material

Varje grupp har en PET-flaska med okänt antal kulor i olika färger som läraren har låtit förbereda, samt tabellerna på nästa sida.

Gör så här

1. Ni ska skaka och vända flaskan upp och ner 25 gånger.
2. Efter varje vändning antecknar ni vilken färg det är på kulan som hamnar längst ner mot korken i Stickprovprotokoll 1. Det räcker att ni skriver t ex B för blå.
3. När 25 vändningar är gjorda fyller ni gemensamt i Frekvenstabell för stickprov 1. I kolumnen *absolut frekvens* fyller ni i utfallet, dvs hur många kulor av varje färg som blev synliga i flaskhalsen.
4. Fyll i och beräkna *relativ frekvens*. T ex $5/25 = 0,2 = 20\%$. Man säger att man beräknar *kvoten mellan antal gynnsamma utfall och totala antalet fall*.
5. Diskutera vilka slutsatser ni kan dra från den ifyllda frekvenstabellen.
6. Gör om proceduren en gång till. Vänd flaskan 25 gånger och anteckna. Fyll i Frekvenstabell för stickprov 2.
7. Jämför stickprov 1 och stickprov 2.
 - a) Är det samma färg som det blivit flest av båda gångerna?
Är det samma färg det blivit færst av båda gångerna? Varför blir resultatet sådant?
 - b) Hur tror ni resultatet kommer att bli om ni gör jättemånga observationer?
 - c) Vilken färg tror ni det finns flest av i flaskan? Varför det?
 - d) Hur stor är skillnaden mellan de gula kulornas relativa frekvenser?
Räkna ut skillnaden för de andra färgerna också.
8. Addera de båda stickprovens observationer i den tredje frekvenstabellen.
9. Jämför stickproven 1 och 2 med ert sammanlagda stickprov med 50 observationer.
 - a) Ser ni några skillnader? Vad kan de bero på?
 - b) Hur många kulor tror ni att det finns av varje färg i flaskan? Varför det?



