

Cirklar, liksidiga trianglar och rymdfigurer

Genom att konstruera geometriska kroppar med hjälp av liksidiga trianglar formade av utklippta cirklar, får eleverna möjlighet att upptäcka matematiska samband. Det laborativa arbetet utmynnar i modeller och de kan utifrån dessa resonera om vinkelsummor, ytor, hörn och sidor. Denna artikel har tidigare varit publicerad i vår norska systertidskrift *Tangenten*.

I denna aktivitet ska vi tillverka "kulor" med utgångspunkt i cirklar. Dessa ska omformas till liksidiga trianglar som därefter får träda fram som geometriska kroppar.

Vi börjar med att klippa ut ett antal cirklar i papper, gärna i olika färger. Hur många cirklar som behövs beror på vilken figur som ska konstrueras. Tabellen här nedanför ger en uppfattning om hur många cirklar som behövs för olika figurer. Jag vill uppmana er att konstruera andra figurer än de som nämns i tabellen för att experimentera.

Cirklar	Polyeder
4	Tetraeder
8	Oktaeder
20	Ikosaeder

Det kan vara tålmodskrävande att klippa ut många cirklar. Jag brukar häfta ihop 10–14 A4-ark och därefter rita cirklarna med passare eller en liten assiätt. I denna artikel ska cirklarna vikas till liksidiga trianglar. Det går självfallet att vika dem till fyr- eller femhörningar och konstruera rymdfigurer (tredimensionella figurer som de också kallas) på motsvarande sätt som för trianglarna. Problemet med fyr- och femhörningar är att cirkelsegmenten, som är de ytor som ska limmas ihop, blir mindre ju fler kanter vi har. Men det kan vara en utmaning för den fingerfärdige! Det är inte heller lika enkelt att vika cirklarna till liksidiga fyr- eller femhörningar som till liksidiga trianglar. Den liksidiga fyrhörningen kan ge utmaningar som kan lösas. Den som vill tillverka polyedrar med dessa kan hitta mallar på *Nämnnaren på nätet*.

Cirkeln blir en liksidig triangel

Av cirkelarna ska vi konstruera de liksidiga trianglarna med en enkel men elegant vikningsteknik. Utgångspunkten är att vi ska märka ut cirkelns centrum. Om vi ritar cirkeln runt ett glas hittar vi mittpunkten om vi viker diametern (vilken som helst) två gånger. Där vikningarna skär varandra finner vi mittpunkten. Detta är en bra uppgift för eleverna där de kan utnyttja sina kunskaper om cirkeln och begreppet diameter för att ta reda på cirkelns mittpunkt. Om vi använder passare för att konstruera cirkelarna visar passerhålet direkt cirkelns mitt. De färdiga figurerna blir vackrare med färre veck om vi slipper att vika cirkelarna för att hitta mittpunkten, men vi går miste om aspekten hur man hittar mittpunkten som i sig är en bra matematisk uppgift där man använder sina kunskaper om cirkelns egenskaper. En kombination av dessa metoder är därför att föredra när vi arbetar med elever.

Vi tar en slumpmässigt vald punkt utefter cirkelns periferi och viker så att periferin exakt tangerar cirkelns centrum. Använd nageln eller linjal för att få ett skarpt veck. Vi har nu vikt in det första cirkelsegmentet, se figur 1. Vi ska vika in ytterligare två cirkelsegment.

Nu kommer den besvärligaste vikningen. Vi skall återigen ta en punkt, vilken som helst utefter den del av cirkelns periferi som är "fri" och vika så att periferin exakt tangerar cirkelns mittpunkt, men dessutom ska vi skapa ett hörn tillsammans med den första vikningen, se figur 2.

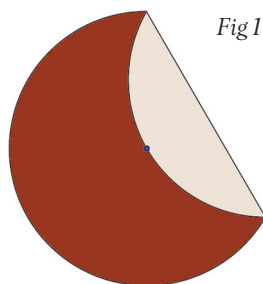


Fig 1

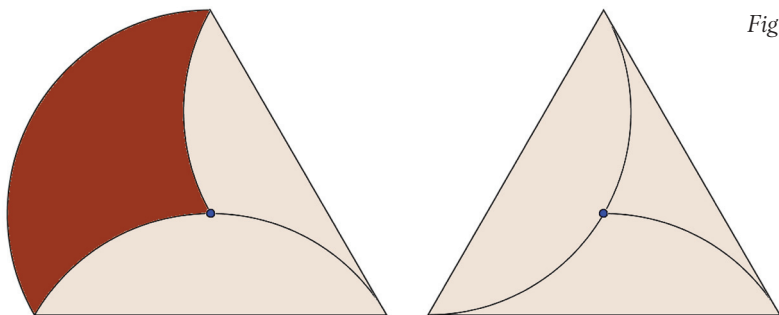
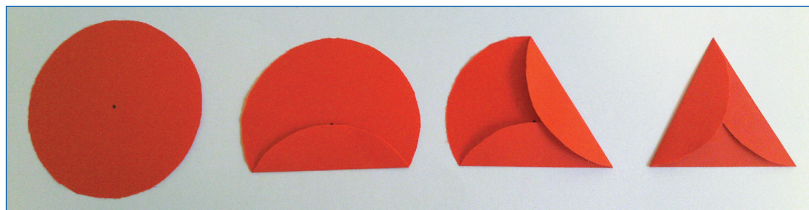


Fig 2

Nu har vi vikt in två cirkelsegment och fått fram en figur som närmast liknar en strut. Då återstår bara den sista vikningen. Principen om att cirkelperiferin ska tangera mittpunkten gäller fortfarande, men nu ska vi också ta hänsyn till att vi får två nya och spetsiga hörn. Kom ihåg att vika papperet ordentligt och använd antingen en nagel eller en linjal för att få vikningarna exakta. Nu är vikningen av den första liksidiga triangeln klar och det är bara att fortsätta vika fler liksidiga trianglar på samma sätt. Jag skriver att dessa trianglar är liksidiga. Är de det? Varför är de i så fall det?

För elever är det kanske lite krångligare och svårare att göra den första triangeln men efter att de har vikt ett par stycken brukar de ha lärt sig hur det går till. Då kan läraren fokusera på språket och det matematiska innehållet i aktiviteten.

När man har tillverkat tillräckligt många liksidiga trianglar stryker man lim på cirkelsegmenten och klistrar ihop dem till tredimensionella figurer. I den slutliga figuren kan cirkelsegmenten riktas utåt så att den kroppen får formen av en kula. Om cirkelsegmenten vänds inåt syns tydligare den geometriska figuren som gott kan liknas vid en platonsk kropp. Om cirkelsegmenten ska vändas inåt krävs det mer finmotorisk övning av den som bygger figuren.



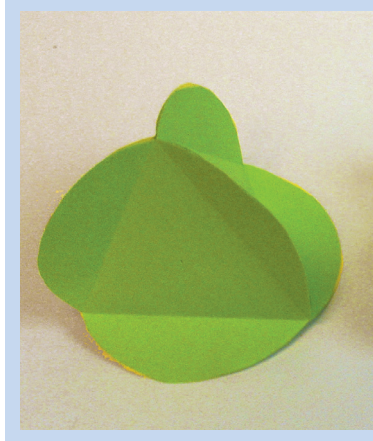
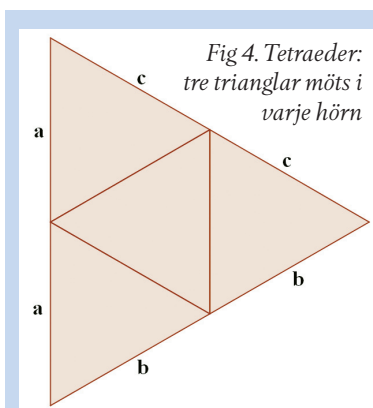
Platonska kroppar

I den här aktiviteten kan det vara bra att diskutera med eleverna vad som krävs för att det ska bli en polyeder. Figurerna ska bestå av ytor, hörn och sidor. Hur många trianglar måste/kan mötas i ett hörn? Man kommer ganska snabbt fram

till att det behövs minst tre trianglar för att få ett hörn i en rymdfigur. I enlighet med principen att tre trianglar ska mötas i varje hörn, får vi en tetraeder, fig 4. Om vi låter fyra trianglar mötas i varje hörn får vi en oktaeder och med fem trianglar en ikosaeder. På så sätt har vi fått fram tre av de platonska kropparna. Till sist har jag en spännande fråga: Vad händer om vi låter sex trianglar mötas i varje hörn? Varför?

Ser vi till egenskaperna hos den liksidiga triangeln är varje vinkel 60° . Om vi sätter ihop sex sådana hörn får vi exakt 360° och de bildar en plan yta. Sätter vi samman tre, fyra eller fem liksidiga trianglar i ett hörn får vi en vinkel som är mindre än 360° vilket innebär att det blir ett hörn i rummet. Vi kan fortsätta att utforska vad som gäller för liksidiga fyr- eller femhörningar och komma fram till att det bara kan finnas fem platonska kroppar. När vi nu har studerat tre av de platonska kropparna som vi kan konstruera med liksidiga trianglar kan det vara dags att utforska andra rumsliga objekt som vi kan skapa med våra liksidiga trianglar.

En av dem är den som jag lite slarvigt kallar dubbelpyramid. Jag har konstruerat två pyramider av fem trianglar vardera som jag därefter sammanfogat och fått en figur som i fig 7. Det som gör att den inte är en platonsk kropp är att olika antal trianglar möts i hörnen. I hörnet som vänder sig upp mot oss (och ned mot bordet) är det fem trianglar som möts medan det är fyra i de övriga hörnen. Men det är likväl en vacker och spännande kropp att utforska. Samma undersökning kan vi göra med pyramider konstruerade av tre eller fyra trianglar.



Vi kan också ta isär de två pyramiderna från varandra och sätta in en extra rad med trianglar (ungefär som i figuren till ikosaedern) och få fram nya kroppar. Utforska och lek med trianglarna och med matematiken i dem.

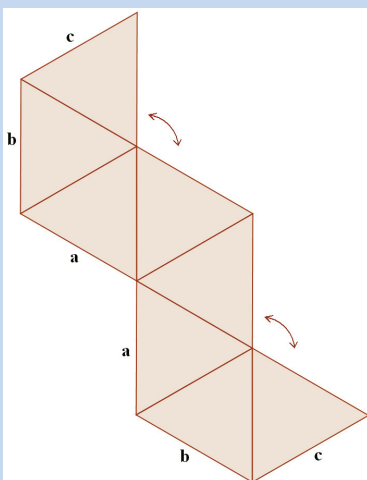


Fig 5. Oktaeder:
fyra trianglar möts
i varje hörn

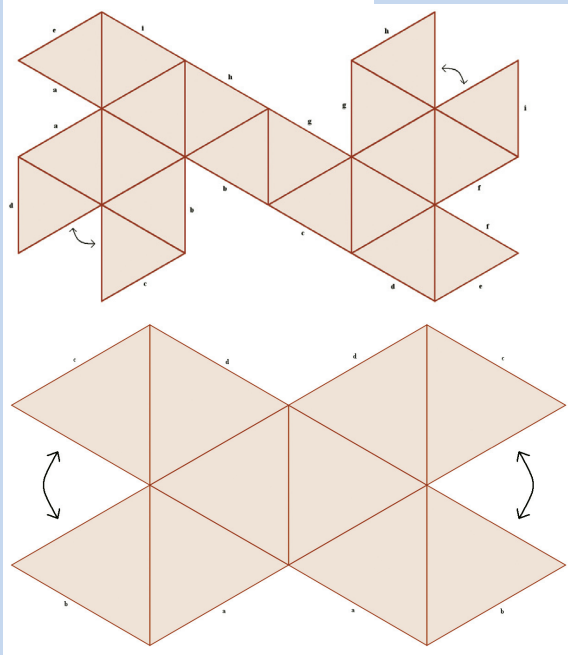
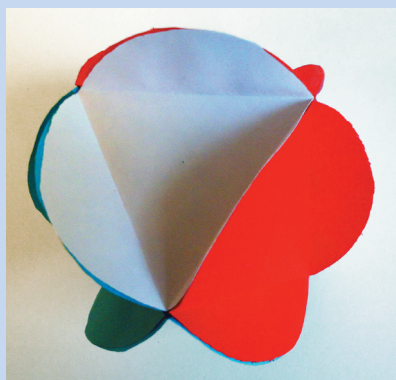


Fig 6. Ikosaeder:
fem trianglar möts
i varje hörn

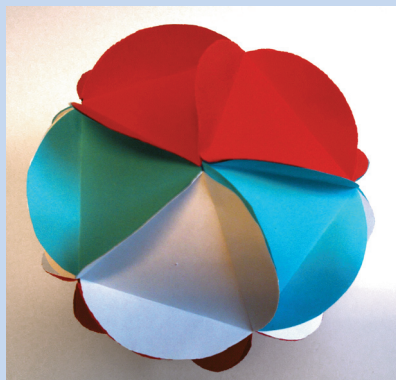


Fig 7.
Dubbelpyramid
av tio trianglar

INSPIRATION

Botten, G. (2007). *Föreläsning 13 augusti 2007 vid Högskolan i Bergen*. I regi av LAMIS Bergen och omgivande lokalavdelningar.

Bjurström, R. (2008). *Desemberideer. 24 dagar till glede och hygge. Tillägg till Bo bedre nr 11*. Bonnier Medias II AS.

Översättning: Günther Dippe