Förstå algebra

Johan Häggström

Hur ska man lyfta fram innebörden i variabelbegreppet? Hur ska studier av mönster kunna formaliseras och hur kan elever utveckla förståelse för att tolka, formulera och lösa ekvationer?

Denna och en tidigare artikel i Nämnaren 22(4) tar upp hur man går från att räkna med tal till att räkna med bokstäver.

I anslutning till ny kursplan i matematik, har en matematiklärarförening i Australien tagit fram stöd- och stimulansmaterial som behandlar algebra. Det består av ett häfte indelat i åtta moduler samt fem korta artiklar med ett intressant innehåll med tanke på de nya kursplanerna i Sverige.

I föregående nummer av Nämnaren behandlades de tre första modulerna i detta material, *Pattern, Order and Algebra*. Här behandlas de fem återstående.

4 Developing an understanding of the meaning of a variable

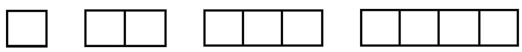
I den fjärde modulen bygger man vidare på de olika elevuppfattningar som togs upp i den föregående. Man vill flytta tyngdpunkten i algebraundervisningen från färdighetsträning, att manipulera algebraiska uttryck och ekvationer – till förståelse av logiken bakom manipulationerna, hur man uttrycker idéer och matematiska modeller algebraiskt etc. Författarna hävdar att de rent manipulativa färdigheterna visserligen är viktiga, men de minskar i betydelse allt eftersom datorer och räknare blir kraftfullare. Målsättningen är att successivt utveckla elevernas uppfattningar av betydelsen av bokstavssymbolerna mot en god förståelse av variabelbegreppet. Man pekar på fem olika sätt att lyfta fram innebörden i variabelbegreppet.

A. Användning av uppgifter av liknande typ som i Küchemans undersökning både som övningar och som diagnoser (Häggström, 1995). Eleven ska inte manipulera ett algebraiskt uttryck utan istället lösa uppgiften genom att betrakta strukturen i problemet. Exempel:

- Vilket uttryck är störst, $2n$ eller $2 + n$? Förklara varför.
- $(x + 1)^3 + x = 349$ är sant när $x = 6$. För vilket värde på x är $(5x + 1)^3 + 5x = 349$?

B. Användning av talmönster för att belysa variabelbegreppet. Den här typen av uppgifter utvecklar elevernas förmåga att upptäcka mönster och att beskriva dessa med ord. I exemplet kan man beräknar antalet tändstickor om man vet antalet rutor, först med ord och sedan med matematiska symboler.

- Här är en följd av tändsticksfigurer:



Hur många tändstickor behövs för att göra

– fem rutor?

– tio rutor?

– femtio rutor?

– Ange en regel som kopplar ihop antalet tändstickor med antalet rutor.

– Hur många tändstickor behövs för att göra tvåhundrafem rutor?

***Johan Häggström** är lärarutbildare vid Matematikavdelningen, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.*

C. Arbete med översättningsuppgifter eller transformationer, där det gäller att ta sig från uttalanden på vanligt språk till algebra och tvärtom (Emanuelsson, 1995). Här följer ett par exempel

- Skriv med symboler fyra mer än ett tal ($n + 4$)
- Skriv med symboler produkten av ett tal och tre, minskat med 9 ($3 \cdot x – 9$, $x \cdot 3 – 9$)
- Skriv med ord $3(m + 2)$ och $4 – 2a$

D. Användning av datorer. I ett kalkylprogram, t ex Excel eller Works, kan man lägga in olika formler och låta eleverna pröva med olika värden och undersöka resultaten.

E. Användning av övningar som behandlar *möjligheter och begränsningar*. Exempel:

- Välj ett räknesätt och två tal.

  12 = __ __ __

- Placera ett tal i rutan och använd parenteser för att hitta alternativa lösningar.

$$12 = \frac{24}{4} + 2 \cdot \square$$

- Sök reda på tre positiva heltal som tillsammans blir 100. Diskutera möjligheter och begränsningar.

Lägg till ytterligare villkor, t ex att största talet i sista uppgiften ska vara 12.

5 Representing relationships

Syftet med den här modulen är att visa hur studier av mönster och ordning kan formaliseras och utvecklas genom användningen av algebraisk notation och grafisk representation. Den består av fyra övningar.

Pappersvikning

När man viker en pappersremsa på mitten upprepade gånger och bestämmer hur många lager och hur många veck man får uppstår talmönster. Dessa kan uttryckas språkligt på många olika sätt. Man kan upptäcka mönstren lättare genom att göra en tabell, relatera mönstren till ett algebraiskt uttryck och visa grafiskt. Exempel:

- Ta en lång pappersremsa och vik den på mitten.

  – Hur många lager får man efter vikningen? Hur många veck finns det?

  – Vik remsan på mitten en gång till. Hur många lager respektive veck får du nu?

  – Vik en tredje gång och studera antalet lager och veck.

  – Hur många lager respektive vikningar har du efter 10 vikningar?

  – Hur kan man ta reda på antalet lager och veck efter ett stort antal vikningar?

Antal							
vikningar	0	1	2	3	4	5	
lager	1	2	4	8	16		
veck	0	1	3	7			

Exemplet ovan visar hur man, från en ursprungligen praktisk uppgift, kan få fram flera olika talmönster. Dessa kan uttryckas språkligt på många olika sätt. Antalet veck får du genom att

– dubbla antalet veck vid förra vikningen och lägg till ett,

– addera antalet lager och veck i vikningen innan,

– dubbla antalet lager i vikningen innan och dra bort ett,

– addera antal lager i de tidigare vikningar,

– om n är antalet vikningar får du antalet veck genom att multiplicera 2 med sig själv n gånger och sedan dra bort ett, ($2^n – 1$).

Med en lämplig formel kan man lösa problem kring pappersvikningen t ex hur många veck det blir om man gör tio vikningar.

Tre konsekutiva tal

- Betrakta talen 9, 10 och 11. Multiplicera 10 med sig själv. Multiplicera det minsta talet 9 med det största talet 11. Beräkna differensen av resultaten:

  $10^2 – 9 \cdot 11$

  Upprepa förfarandet med tre andra konsekutiva (på varandra följande) heltal. Vad finner du? Kan du förklara resultatet?

Försök förutsäga vad resultatet blir om skillnaden mellan de tre talen är 10 (t ex 11, 21 och 31). Bevisa din hypotes.

Vad händer om differensen av talen är någon annan? Formulera en regel för hur det fungerar?

I uppgifter av den här typen gäller det att leta efter mönster eller regelbundenheter. Genom att använda konkret materiel eller rita rektanglar på rutat papper kan man se strukturen i problemet.

Går det att bevisa ett påstående om tre godtyckliga konsekutiva heltal geometriskt?

Hur ser ett algebraiskt bevis ut?

Tänk på ett tal

- Välj ett godtyckligt heltal. Multiplicera med 3. Addera 6. Ta bort det tal du tänkte på. Dividera med 2. Ta bort ditt första tal igen. Svaret är tre. Kan du förklara varför?

Genom att steg för steg följa vad som händer kan man generalisera.

	Exempel		*Generellt*
Tänk på ett tal	5	7	x
Multiplicera med 3	15	21	$3x$
Addera 6	21	27	$3x + 6$
Ta bort ditt tal	16	20	$2x + 6$
Dela med 2	8	10	$x + 3$
Ta bort ditt tal	3	3	3

Grafer

Genom att ge exempel på att matematisk information kan representeras på många olika sätt (tabeller, grafer, formler etc) pekar man på nödvändigheten av att eleverna får erfarenhet av alla dessa, samt möjligheter att knyta ihop dem (Emanuelsson, 1995). Det gäller inte minst att kunna tolka information som presenteras i en graf. Exempel:

- Para ihop personerna med rätt punkt.

A är lång och tjock. B är lång och mager.
C är kort och tjock. D är sumobrottare.
E är en liten tant.

6 Understanding equations

Modulen behandlar hur man kan hjälpa eleverna att utveckla den förståelse som krävs för att kunna tolka, formulera och lösa ekvationer. Under rubriken *building equations* ger man förslag på aktiviteter som ska ge eleverna bra grund för bättre förståelse av ekvationer. Här följer några exempel på aktiviteter.

A. Introduktion med lärarledd diskussion utifrån stordia.

- Vilka utsagor är riktiga/sanna? Varför/varför inte?

$1 + 2 = 3$

$3 = 2 + 1$

$3 \cdot (7 – 2) = 21 – 2$

- Fyll i tal som ger sann utsaga/likhet?

$3 + \square = 5 + 4$

$\square – 4 = 4 – 2$

B. Eleverna arbetar själva med liknande uppgifter.

- Ange en operation, som ger en sann utsaga/likhet.

$12 \cdot 2 = 8 \; \square \; 3$

$100 – 20 = 20 \; \square \; 4$

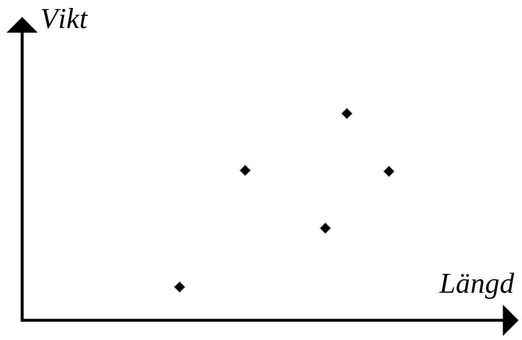
- Fyll i tal som ger sann utsaga/likhet?

$3 + \square = 5 + 4$

$\square – 4 = 4 – 2$

C. Lärarledd diskussion utifrån stordia. Här införs bokstäver som representanter för obekanta tal.

- Vad ska x stå för, för att likheten $8 + 5 = x + 6$ ska vara sann?



- Vilka tal kan x och y vara? Kan de vara lika?
  $12 = x + y$
- Vilket tal är störst, a eller b?
  $a + 4 = b$
- Hur kan man konstruera en ekvation?

  Skriv en aritmetisk likhet (en likhet mellan två uttryck med enbart tal).
  $3 \cdot 7 + 3 = 30 - 6$

  ”Göm” ett tal
  $3 \cdot \blacksquare + 3 = 30 - 6$

  Byt det gömda talet mot en bokstav
  $3 \cdot a + 3 = 30 - 6$

  Kolla att ekvationen går att lösa, och ger det svar du tänkt dig.

  Gör fler ekvationer genom att ”gömma” något annat tal.

D. Eleverna arbetar med uppgifter i smågrupper.

- Gör så många ekvationer du kan från
  $5 \cdot 9 - 3 = 14 \cdot 3$
- Skriv upp en egen aritmetisk likhet. Använd den för att konstruera en ekvation. Byt och lös varandras ekvationer.

Genom att utgå ifrån aritmetiska likheter kan man trycka på två viktiga aspekter. Den första är att bokstäver står för tal. Kücheman fann i sin undersökning (Häggström, 1995) att många elever inte uppfatar bokstäverna i algebra som representanter för tal. Den andra aspekten som kommer fram är ekvivalensen i en ekvation. Många elever ser likhetstecknet som en signal för att ”här ska svaret stå” eller utläser det som ”blir lika med”. Denna ”dynamiska” tolkning gör det svårt att förstå ekvationer när högerledet består av mer än en term.

Under rubriken ***Lesson plan for formulating equations*** ges exempel på aktiviteter som är ämnade att hjälpa eleverna att förstå ekvationer med två obekanta.

A. Frågor för helklassdiskussion.

- $17x = 1000$

  Är x mer eller mindre än 100? Hur vet du det?
- $y = 5x$

  Vilket tal, x eller y är störst? Hur vet du det?

B. Uppgifter till eleverna

- Skriv ekvationer till de här meningarna/utsagorna:

  x är 100 mer än y.

  b är en femtedel av a.

C. Para ihop ekvationer med textproblem och tabeller. Tabellen visar antalet lärare och elever i några skolor. (Helklassdiskussion).

Elever	400	500	600	700	800	900	1000
Lärare	20	25	30	35	40	45	50

- Vi låter s betyda ”antalet elever” och t stå för ”antalet lärare”. Vilka av följande ekvationer är riktiga?
  $20s = t$, $s - t = 380$, $s = 20t$, $t = 20s$,
  $s = t/20$, $20s - t = 0$, $s + t = 1\,050$ etc

D. Muntlig uppgift till tabellen ovan.

- Avsluta följande meningar:

  Det är tjugo gånger fler ....

  Antalet lärare är ....

  Det går en lärare på ....

E. Arbetsblad med uppgifter.

- Maria och Kris har olika mycket pengar. Om Maria ger Kris 6 kr har dom lika mycket. Skriv ner en ekvation som beskriver detta. Använd m för att beteckna antalet kronor som Maria har från början och låt k beteckna antalet kronor Kris har från början.

  .... = ...

- Några av ekvationerna beskriver samma situation som din ekvation. Markera vilka.

  $m = k + 12$ $m = k - 12$ $m - k = 12$

  $12 = m - k$ $k = m + 12$ $k = m - 12$

  $k - m = 12$ $12 = k - m$

7 A broader approach to equation solving

Den snabba utvecklingen av och ökade tillgången till datorer och räknare ändrar snabbt på användningen av olika matematikverktyg. Det är en av anledningarna till att man i *National Statement* betonar vikten av att eleverna lär sig att lösa ekvationer med en större uppsättning metoder idag än tidigare. En viktig kunskap, förutom att behärska olika lösningsmetoder, är att kunna avgöra när en metod fungerar. För att klara detta måste eleverna, enligt *National Statement*,

– kunna formulera ekvationer utifrån verkliga situationer,

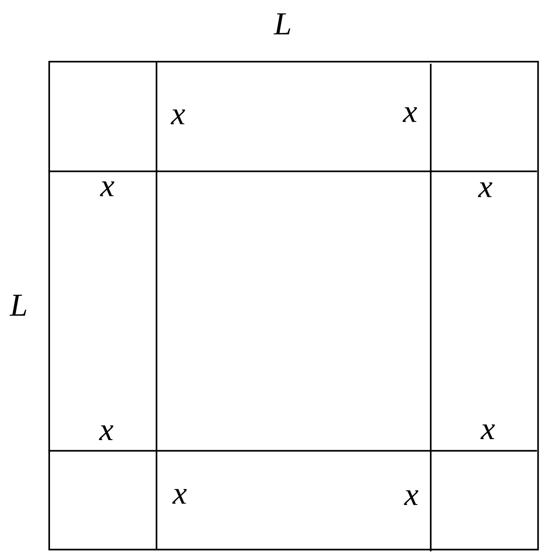
– använda *korrekt* algebraisk notation i kommunikation med datorer och räknare,

– känna till utseendet hos graferna till de vanligaste funktionerna,

– kunna handskas med begreppen definitions- och värdemängd,

– veta hur många lösningar olika ekvationer kan ha.

Med utgångspunkt i ett problem visar författarna algebraiska, numeriska och grafiska lösningsmetoder samt diskuterar vilka matematiska förkunskaper som är nödvändiga för varje metod. Problemet är att göra en låda av en kvadratisk plåt eller pappskiva genom att hörnen klipps av och kanter viks upp.



Det finns en del frågor runt lådkonstruktionen som inte ställs i dagens skola, helt enkelt därför att man med de metoder som används inte kan besvara dom. T ex ”för vilket värde på x har lådan en volym på 0,05 m^3? Med andra ord, lös ekvationen $x(L - 2x)^2 = 0{,}05$.” Fastän enkel att formulera så kan den inte lösas med algebraiska metoder i skolan. Inte ens om längden L bestäms till 1 så går ekvationen att lösa. Det finns ett antal lösningsmetoder, t ex:

– Att använda ett algebraprogram på dator eller räknare.

– Gissa och pröva.

– Rita grafer, med och utan tekniska hjälpmedel.

– Iterativa metoder
(t ex Newton-Raphson).

I anslutning till presentationen av de olika metoderna ställer författarna diskussionsfrågor som t ex ”Vilka förkunskaper krävs för den här metoden?” och ”Vilka är fördelarna respektive nackdelarna med den här metoden?”

8 Solving equations graphically and numerically

Sista modulen består av 8 problem med förslag på olika lösningsmetoder. Det är tänkt att deltagarna ska upptäcka och få erfarenhet av grafiska lösningsmetoder. Man förutsätts ha tillgång till datorer och/eller grafräknare. Exempel:

- Vi har en cirkelformad inhägnad. Bobs get är bunden med ett rep i en av inhägnadens stolpar. Hur långt ska repet vara, för att geten ska nå hälften av hagens gräsareal.

Häftet avslutas med fem kortare artiklar där man bland annat lyfter fram några kända orsaker till elevers svårigheter med algebra. Stacey & MacGregor har i en undersökning av 1 500 elever funnit att många av de fel elever gör i början av algebrastudierna beror på bristande kunskaper om tal, räkneoperationer och notationer. Här följer exempel på kunskaper som de anser avgörande för att lyckas med algebrastudier.

Förståelse av likhetstecknet

Många elever har en begränsad uppfattning av likhetstecknets betydelse. En elev som enbart kan se tecknet som ”blir” eller ”blir lika med” får svårigheter med att förstå ekvationer. Uppfattningen förstärks om eleven under lång tid arbetar med uppgifter där likhetstecknet alltid följs av svaret, t ex uppgifter av typen

- Beräkna $1,5 \cdot 6,3 =$
- Förenkla $3(4x + 2) - 5x =$

Eleverna måste också få möta uppgifter där likhetstecknet utläses ”är lika med” eller ”är lika mycket som”.

- Är detta uttryck riktigt? Varför/varför inte?
  $24 - 12 = 3 \cdot 4$
- Fyll i det tal som saknas:
  $12 + \_\_ = 5 \cdot 5$

Räkneoperationen ska tydliggöras, inte bara svaret.

Många elever som löser problem kan inte uttrycka med ord eller med symboler hur de gått tillväga. Följande exempel är hämtat från en undersökning med elever i årskurs 9 (MacGregor & Stacey, 1993).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
y	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...

- Vad är y om $x = 800$?

Av de elever som kom fram till rätt svar, (804) var det bara tre fjärdedelar som kunde uttrycka relationen mellan x och y med ord (t ex ”för att få y måste man lägga 4 till x”). Endast hälften av eleverna som svarat rätt kunde uttrycka relationen med algebraiska symboler, t ex $y = x + 4$. Trots att många elever upptäckte relationen och använde denna för att hitta värdet på y var det inte många som kunde beskriva hur de gått till väga.

Det visade sig i intervjuer att eleverna i många fall utnyttjade mönster som inte på ett enkelt sätt gå att formulera algebraiskt (t ex ”från x går man tre steg framåt sen kommer y”).

- Fem personer ska dela lika på 40 kr. Hur mycket får var och en?

Problemet kan lösas genom att man gissar och prövar. ”Pröva med 10 kr, nej det är för mycket. 5 tior är ju 50 kr. Pröva med 6 kr, nej det är för lite. Pröva med 7 kr, .. 8 kr, ja det stämmer”. Elever som inte uppfattar detta som ett divisionsproblem får naturligtvis svårt att uttrycka hur mycket var och en får om x personer ska dela på y kronor.

God taluppfattning

Eleven måste känna till viktiga egenskaper hos tal samt hur man räknar med dem.

- Lös ekvationen

$$\frac{f - 5}{2} + 4f = 2$$

En elev bestämmer sig för att multiplicera båda led med 2, men är osäker på hur man multiplicerar bråket i vänsterledet. Detta kan bero på att eleven inte är säker på hur man multiplicerar ett heltal och ett bråk. Eleven kan inte utnyttja sitt kunnande i aritmetik för att lösa det algebraiska problemet, om detta kunnande är osäkert eller svagt. Andra orsaker till svårigheter är

– att elever inte har ett tillräckligt utvecklat språk. Många är t ex osäkra på innebörden i och skillnaden mellan ”tre gånger mer än” och ”tre mer än”. Detta leder till svårigheter att formulera och använda ekvationer vid problemlösning.

– att elever inte uppfattar bokstäverna som symboler för tal. Många tror att bokstäverna är förkortningar av ord eller objekt. Denna uppfattning är egentligen ganska naturlig då man ofta väljer första bokstaven för storheter i formler, ”*b* står för basen”, ”*h* betyder höjden” etc.

– att elever inte förstår den algebraiska syntaxen. Det är t ex vanligt att elever som tolkar $3b$ som ”tre stycken b:n” inte kan generalisera detta till ab, utan ser ab som ”a och b” dvs ”$a + b$”. Jfr $3\frac{1}{2}$ som betyder $3 + \frac{1}{2}$ och inte $3 \cdot \frac{1}{2}$.

Även om studiematerialet vänder sig till lärare i Australien och är direkt anpassat till skrivningarna i *National Statement* innefattar det många idéer och resultat som också gäller i Sverige. Elevers svårigheter och orsakerna till dessa är ganska säkert likartade världen över. Materialet vänder sig till matematiklärare på alla stadier, från förskola till gymnasium. Det är viktigt att lärare i tidigare årskurser ser vilka aspekter som är viktiga att ta upp och behandla i den inledande matematikundervisningen och hur man faktiskt kan arbeta med algebra, eller prealgebra, utan att behöva ”räkna med bokstäver”. Många av de svårigheter som elever får med algebra har sitt ursprung i aritmetik, men visar sig först när man börjar med algebra. Lärare i senare årskurser i grundskolan och i gymnasiet, upplever hur eleverna ”stångas” med algebraiska uttryck och ekvationer. De kan hitta förklaringar till många av elevernas svårigheter, få idéer om hur man kan möta dessa och viktiga aspekter som bör lyftas fram och diskuteras.

Materialet andas ett perspektiv på matematikundervisningen som är väl i fas med nya läroplaner och kursplaner i Sverige. Arbetet med lokala arbetsplaner, ser jag som *ett* tillfälle att lyfta fram frågor kring algebraundervisningen.

– *När* ska vi börja med ekvationslösning?
– *Hur* ska vi göra det?
– Hur kan vi förebygga missuppfattningar som kan leda till svårigheter för eleverna?

I Sverige pågår arbetet med att ta fram kommentarer och referensmaterial till kursplanerna. Ett material kring prealgebra, algebra, ekvationer och funktioner i 1 – 9-perspektiv håller på att utarbetas.

Följ information i Nämnaren om hur och när det publiceras.

Referenser

Emanuelsson, G. (1995). Måltavlan: Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnaren 22(2)*, 2–3.

Häggström, J. (1995). Tidigare algebra. *Nämnaren 22(4)*, 17–22.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. I I. Hirabayashi m fl (red). *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Tsukuba University, Japan, July 1993.

MacGregor, M., Stacey, K., Pegg, J. & Redden, T. (1994). *Pattern, Order and Algebra*. Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers Inc. (Australian Math’s Works, Inc.)

Ändringar i Nämnarens redaktion

Från och med 1996 så har vi fått en ny redaktionssekreterare, ***Peter Brandt***, som efterträder ***Gunilla Svensson***, som flyttat utomlands.

Gunilla har svarat för samordning och kundkontakter gällande de mycket varierande och ibland komplicerade arbetsuppgifter som hör till produktion och utgivning av facktidskrifter från hantering av inkommande manus till distribution av färdigtryckta tidskrifter. Hon har visat prov på snabb uppfattning, god planeringsförmåga och en glad effektivitet kombinerad med god samarbetsförmåga och utmärkt noggrannhet. Vi tackar Gunilla så hjärtligt för hennes insatser och önskar Peter varmt välkommen i gänget! Han har redan fått sitt elddop i samband med Matematikbiennalen, där han hade huvudansvar för vår utställning.

Vi gläder oss åt ytterligare en ny utmärkt kraft i redaktionen, ***Karin Wallby***. Hon ingår redan i TEAM Nämnaren TEMA samt har medverkat i redigeringen av Matematik – ett kommunikationsämne och detta nummer. Hon är lärare i Sollebrunns skola och vi hälsar också henne hjärtligt välkommen!

Bengt, Bo, Göran & Ronnie