Pesach Laksman

Förträffligheten med tal i bråkform

Under senare delen av förra seklet diskuterades bråktalens vara eller inte vara. I denna artikel resonerar författaren om nackdelar med att låta elever enbart möta rationella tal i decimalform eller som tal i procentform. Argumenterande exempel ges från såväl förskolebarns fruktdelning och grundskoleelevers förståelse av rationella tal som vuxnas hanterande av procent vid fåravel.

På den ”gamla goda tiden” på åttiotalet hade idén med skolors uppdelning i arbetslag inte hunnit mogna och vi kunde åtnjuta regelbundet återkommande ämnesträffar. Jag minns en lärare som var stark ivrare för slopandet av tal i bråkform till förmån för decimalform. Hans argument var att den förra formen inte längre användes i samhället och att elever dessutom hade svårt för den. Intuitivt kändes idén som en vilja att avmatematisera skolmatematiken. Jag kunde inte hitta fler argument i mina tankar mot hans djärva idé än att om tidsenheter är inblandade, så är det faktiskt enklare med tal i bråkform. Som nyutbildad vågade jag inte ens framföra det, men det gjorde inte någon annan heller.

På en av mina lektioner i åk 7 ställde jag frågan om hur stor portion tre personer får var om de delar ett äpple rättvist mellan sig. Jag blev till att börja med förvånad när en av eleverna svarade 0,33. Jag tvivlar starkt på att eleven utförde divisionen av 1 med 3. Troligare är att hans forna lärare inpräntade att 1/3 är likvärdigt med 0,33 och att svara 1/3 kändes som alltför trivialt för honom. Han behövde ju inte räkna någonting då.

Vid undervisning av rationella tal läggs mycket stor vikt vid att kunna skriva dem i olika former som bråk, decimaltal och även procent. Detta återspeglas i bruket av de två senaste formerna i olämpliga situationer. Det är exempelvis helt olämpligt att påstå att sannolikheten för att få fem ögon vid kast med en tärning är 17 % eller att sannolikheten att dra en knekt från en kortlek är 0,077. Förutom att svaren inte är exakta, trots att det handlar om teoretisk sannolikhet, så kan jag undra vilka inre bilder olika personer får när de ser 17 % eller 0,077.

Förskolans bidrag till förståelse av rationella tal

Vi kan ta en titt på hur man introducerar rationella tal på förskolor. I förskolans värld delar de frukt. Barn och deras lärare brukar dela äpplen eller päron i halvor och kvartar. Poängen med detta kan vara att koppla samman namnet på ett stambråk med formen på en sektor av den cirkelformade genomskärningsytan. Vid åsynen av en cirkelsektor är det möjligt att omsätta medelpunktsvinkeln till hur

stor del cirkelsektorn utgör av ett helt varv. Om man gör det med enbart synens hjälp kan vi klara halvor, tredjedelar och kvartar. Redan när det gäller femte- och sjättedelar börjar bilden bli suddig. Vid mindre delar än så uteblir det visuella stödet. Därför ifrågasätter jag starkt att 17 % som är detsamma som 17/100 skapar större förståelse än 1/6.

Det vore önskvärt att man redan på förskolan gör generaliseringar inom vissa snäva ramar och delar frukt även i tredjedelar. Om detta förekommer så torde det vara ganska ovanligt. Anledningen är att de enklaste delningarna är just halveringar. Ju fler bitar man vill dela något i desto svårare är det. Vissa frukter, som bananer, är dessutom svåra att dela i tre kongruenta bitar. Å andra sidan kan inga frukter delas i strikt matematiskt kongruenta delar, men vitsen här är att eleverna ska få en känsla och grundläggande förståelse för en halv, en tredjedel etc. När tre barn får varsin bit av en banan som delats i ett längdperspektiv, och som de tycker är ”rättvist lika stor”, kan de uppfatta vad en tredjedel är även om bitarna inte är kongruenta. Ett annat sätt att generalisera är att fortsätta halvera fjärdedelar och erhålla åttondelar, och det går bra att göra tillsammans med lite äldre barn.

Att något har använts i samhället behöver inte automatiskt betyda att det är enklare för barn eller ungdomar att hantera. Dels tillhör det inte alltid de unga människornas värld och dels behöver vissa idéer mogna genom att de grundas på enklare idéer. För att förstå decimalformen, med procent och promille inkluderat, måste man förstå idén med rationella tal och en elevs matematiska utveckling följer många gånger matematikens utveckling genom historien.

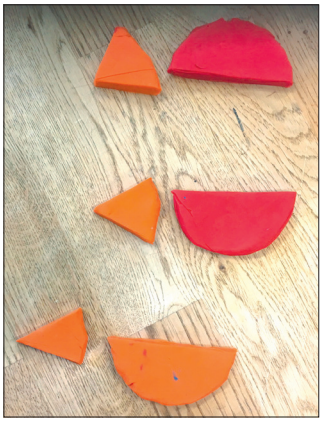
Varför skulle man överhuvudtaget skapa bråkbegreppet? När Fibonacci importerade positionssystemet använt på heltal hade det varit möjligt att utvidga det åt höger med tiondedelar, hundradelar osv utan att behöva gå via allmänna bråk. Ändå dröjde det mer än tre århundraden mellan introduktionen av positionssystemet i Europa och försöket att introducera decimaltal på samma kontinent. Varför skriver jag ”försöket”? Jo, det tog ytterligare två hundra år innan decimalformen av rationella tal började accepteras. Skälen till acceptansen var troligen boktryckarkonsten eller skapandet av logaritmtabeller, men absolut inte decimalformens förträfflighet ur ett didaktiskt perspektiv.

Äldre elevers förståelse av rationella tal

Vid ett av mina VFU-besök i åk 8 hände följande: när den gemensamma aktiviteten tog slut, fick klassens elever förbruka den återstående lektionstiden med att fortsätta räkna matematikbokens uppgifter. Några händer höjdes i syfte att få någon av de vuxna att assistera vid dessa beräkningsprocesser. Jag insåg snabbt att det skulle vara övermäktigt för studenten att hinna bistå samtliga elever med vägledning och styrde mina steg mot en av dem. Den uppgift som eleven ville ha hjälp med handlade om att dela två äpplen lika mellan tre personer. Frågan var hur stor äppelportion var och en skulle få. Jag frågade eleven om hon skulle klara av att dela två äpplen mellan mig, hennes bänkkamrat och sig själv och hon blev något konfunderad och fundersam. Tyvärr hade jag inga äpplen med mig men dessa kunde lätt ersättas med två A4-papper. Det tog inte särskilt lång tid för henne att lösa uppgiften. Det som du som läsare kan bli förvånad över är nog att det sätt som uppgiften blev löst på inte stämmer med det sätt som du själv antagligen skulle göra. Först delade eleven båda arken i halvor och vi fick var sitt halvt ark. Den återstående halvan delade hon i tre lika stora

delar och vi fick även var sin bit av dessa. Då ställde jag frågan hur mycket var och en av oss fick. Hennes spontana svar var en halv och en tredjedel. När jag frågade ”En tredjedel? Av vad då?” korrigerade hon snabbt sitt svar och skrev en sjättedel. Jag berömde eleven för att hon klarade att lösa uppgiften helt på egen hand utan att någon hade visat henne hur hon skulle göra. Jag upplyste henne om att inte bli orolig ifall svaret i bokens facit (2/3) inte ser likadant ut som hennes eget. Hennes reaktion när hon slog upp facit kommer nog inte att förvåna dig. Hon suddade omedelbart ut sitt svar. Jag var tydligen inte någon auktoritet för henne, men det som var värre var att hon inte litade på sig själv, trots att hon själv såg att portionerna var lika stora.

Hur vuxna löser samma problem



Nu tror du kanske att flickans egentillverkade lösning var ett resultat av att hon hade varit mindre uppmärksam under tidigare matematiklektioner och att det inte är så vanligt att elever hittar på egna lösningar. Jag blev nyfiken på hur frekventa dessa lösningar är och tillfälle att undersöka det dök upp när jag fick undervisa förskollärarstudenter. Studenterna fick i uppgift att tillverka två runda pannkakor av modellera för att sedan med hjälp av en kniv dela dem lika mellan tre personer. Drygt hälften av grupperna hade samma lösning som flickan. En tredjedel hade lösningar som var som de läroboksförfattarna önskade, om man utgick ifrån facit i deras böcker. Dessutom var det en grupp som inte kom någonstans och en annan som höll på med successiva halveringar. En tredje grupp halverade fram till åttondelar, vars antal var sexton. Därefter fördelade de femton av delarna mellan tre personer och den återstående åttondelen delades i tre bitar. En fjärde grupp delade varje pannkaka i tolftedelar, som enkelt kunde fördelas mellan tre personer.

Med tanke på att lösningarna gjordes kollektivt är det svårt att dra någon slutsats om hur stor andel av studenterna som står bakom varje enskild lösning. I värsta fall kunde vara så att endast en student per grupp löste uppgiften medan andra hakade på. Å andra sidan kunde jag iakttaga livlig aktivitet och att de ersatte vissa lösningar med andra. I en grupp hade studenterna först gjort som eleven i åk 8 för att efter ett tag byta till svaret två tredjedelar av en pannkaka per person.

Rationalitet i flickans lösning

Jag har alltid trott att det mest frekventa sättet att dela var förbehållet väldigt unga elever som inte hunnit bli undervisade. Tydligen är det inte så självklart att två äpplen eller två pannkakor delade i tre portioner ger resultatet 2/3, trots att 2/3 = 2/3 eller om jag uttrycker det med ord ”två dividerat med tre är lika med två tredjedelar”. Här kan påpekas hur det dubbeltydiga sättet att skriva divisioner och bråk kan förvirra för en del elever. Försök att förenkla terminologin genom att ersätta orden *dividend* och *divisor* med *täljare* respektive *nämnare* har inte heller bidragit till högre förståelse. Man kan förstås fråga sig hur en person, som får som resultat två tredjedelar, tänker. Troligtvis delar de varje pannkaka i ett antal delar för att varje portion sedan ska innehålla en del av varje pannkaka. Det låter mycket logiskt men frågan är om det är praktiskt. Vi kan ta ett annat exempel. Låt oss fördela fyra pannkakor till sju personer. Man kan välja här mellan att dela varje pannkaka i sju bitar och sedan ta en bit från

varje pannkaka eller att halvera de fyra pannkakorna, lägga en halv pannkaka till varje portion, dela den sista halvan i sju bitar och få en halv och en fjortondel som resultat.

Som vi kan se i det ovanstående exemplet är det andra sättet att utföra divisioner på mer rationellt ur en praktisk synvinkel än det sätt som läroboksförfattare förväntar sig att elever gör. Enligt Freundenthals teori, så kallad RME (Realistic Mathematics Education), bör man utgå från elevernas egna föreställningar som baseras på verkligheten. Det leder till elever som skapar matematik istället för att imitera lärarens eller bokens lösningar. Om vi försöker se hur analoga problem behandlades tidigare i historien så slås vi av att i exempelvis forna Egypten gjorde de likadant som flickan. Vi kan fråga oss varför det sättet att utföra delningar på har hamnat på historiehögen. Här framkommer vikten av att rekapitulera den historiska gången när det gäller att utveckla strukturerad kunskap som vilar på relationell förståelse, i motsats till instrumentell förståelse. De presenterade exemplen är enkla och utförs i två steg. Om vi utgår från godtyckliga tal kan stegen bli tämligen många men de överstiger aldrig dividenden. Exempelvis tre pannkakor fördelade på sju portioner ger tre steg och resulterar i en tredjedel, en tolftedel och en åttiofjärdedel per portion. Anledningen till att dividenden begränsar antal delningar är att för varje delning sjunker antalet bitar. I annat fall hade det gått att välja större bitar.

Det kan påpekas här att detta sätt att utföra divisioner på alltid leder till summor av stambråk, dvs ett bråk med täljaren 1. Många elever har svårt att förstå vilken funktion täljaren och nämnaren har. Det kan bero på att lärare har för bråttom med att behandla båda dessa begrepp samtidigt. Det är nog så att eleverna bör vara väl förtrogna med begreppet 'nämnare' innan läraren introducerar begreppet 'täljare'.

Finns det någon åldersgräns neråt?

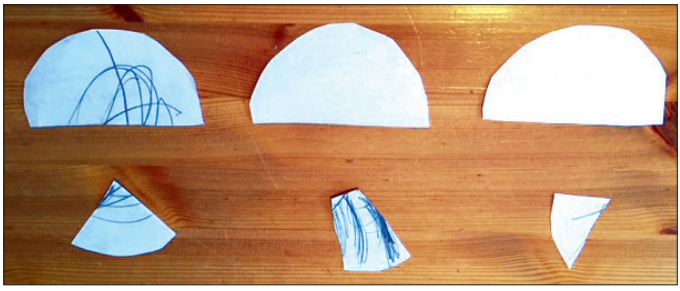
När vi återkommer till den ursprungliga händelsen med flickan och påminner oss om att hon löste uppgiften helt på egen hand, så ställer vi oss den naturliga frågan om det går att ge en sådan uppgift till yngre barn. Då jag inte längre är yrkesverksam har jag inte tillgång till större skaror av elever i låg ålder. Jag skickade därför en förfrågan till min svägerska som bor i Oslo och som har ett barnbarn som vid det tillfället var fem år och tio månader. Jag bad henne att genomföra uppgiften och rapportera resultatet till mig. Här nedan kommer utdrag ur hennes och hennes mans svar.

I begynnelsen av november måned sendte du, Pesach, over en email til oss som omhandler en oppgave/uppgift for å dele 2 sirkler/2 pannkakor om du vil, likt på tre deler/personer. Ilay og Danny har overnattet her hos oss en natt og vi hadde da først mulighet nu for å ta dette "eksperimentet" som du spurte om.

Vi har anvendt papper/to sirkler. Danny og med vår bistand, har forklart Ilay som du har beskrevet i mailen. Ilay var godt klar over at disse to sirklene skulle deles på tre slik at hver person fikk like mye hver.

Først ville han at man skulle dele begge sirklene på to. Så ble det gjort. Etter at vi har utdelt en halv del til hver av oss tre, så ser han jo at det er en del til overs. Hva skal vi gjøre med den delen for at vi skal få likt alle tre? Da ser han at det jo er en – 1 – halvdel for mycket/til overs og vi gjentar at alt skulle fordeles likt på alle tre. Da kom han på en "smart" ide. Da kaster vi den delen, da har jo alle fått likt/sin andel.

Men da har vi gjentatt/repeterat at alt/begge "pannkakor" skulle anvendes fullt ut så hvordan skal vi da dele denne siste delen for at alle tre skal få lik del? Da sa han at vi måtte dele den delen på tre, derfor de tre små bitene som på bilden.



Händelsen med den knappt sexårige Ilay blottar en viktig aspekt kopplad till matematikundervisning. Vi har alltför låga förväntningar på våra elever. Den uppgift som högstadieeleven inte trodde att hon kunde klara av skulle kunna ges redan, om inte i förskoleklasser, så åtminstone i grundskolans tidigare årskurser. Ett barn som kan klara att lösa ett problem, inte att förväxla med en rutinuppgift, får intellektuell styrka och utvecklar sin kreativitet.

Vissa elevers hantering av decimaltal

Jag hade elever som kunde skriva $3{,}5 + 2{,}7 = 5{,}12$ eller $10 \cdot 6{,}5 = 60{,}50$. Spontant kan vi klandra dem för bristande kunskaper. Analyserar vi det närmare så ser vi brister i våra konventioner. Namngivning av decimaltal är inkonsekvent och det i sig skapar grund för missuppfattningar. Ett tal som 257,38 läser vi som två-hundra-fem-tio-sju-komma-tre-(t)tio-åtta istället för två-hundra-fem-tio-sju-tre-tiondelar-åtta-hundradelar, vilket ger intryck av att det finns någon slags gräns mellan heltalsdelen och bråkdelen. Inte nog med det, så är placeringen av kommatecknet, dvs markeringen för entalssiffran, på samma sätt missvisande. Entalssiffrans position är ju referensposition för de andra positionerna och därmed hade det nog varit säkrare om man istället för 257,38 hade infört notationen $25\underline{7}38$.

Vuxnas hantering och förståelse av procent

Ibland undrar jag om vuxna själva har någon djupare förståelse för decimalform. Här nedan följer en annons från Blocket där försäljaren informerar sina presumtiva kunder om inkorsningsgraden av Dorper, en till Sverige nyinkommen fårras.

Säljes: mindre dorperfårbesättning som består av ettårig dorperbagge 75 %, två ettåriga tackor 85 % dorper (antagligen dräktiga), två tvååriga tackor 88 % dorper, båda med två jättefina lamm var. Säljer gärna allt till dig som har SE-nummer.

När man korsar djur av samma art men i olika raser får man raskorsade djur. Andelen inkorsning följer det binära systemet och kan exempelvis bli 1/2, 3/4, 5/8, ... men aldrig 2/3, 3/5, ... Nämnarna måste vara tvåpotenser: 1, 2, 4, 8, 16, osv. Detta beror på att en individ får hälften av sina gener från sin mor och den andra hälften från sin far. Då modern har hälften av sina gener från sin mor och hälften från sin far och motsvarande gäller för fadern får deras avkomma en fjärdedel från mormor, en fjärdedel från morfar, en fjärdedel från farmor och återstående fjärdedelen från farfar. För varje generation halveras andelarna och deras antal fördubblas.

Som bekant är 75 % detsamma som 3/4. Denna korsning har troligtvis uppstått genom att djurets far och morfar var renrasiga Dorper. Det är förstås fullt möjligt att djurets mor och farmor var renrasiga Dorper. För att inte anklagas av feminister för att vara manschauvinist vill jag förtydliga varför det första alternativet har valts. En bagge kan vara far till samtliga lamm i en besättning på några tiotal tackor medan en tacka endast kan vara mor till de lamm hon själv föder.

Korsningen 88 % är omöjlig då 88/100 = 22/25. Å andra sidan brukar människor avrunda när ett tal är skrivet med alltför många siffror. Med tanke på att 7/8 = 0,875 är det lätt att förstå hur korsningen kan ha uppstått.

Korsningen 85 % verkar väldigt konstig. Import av djur är en dyr historia och därför, när man importerar en ny ras, skapar man successivt år efter år korsningar 1/2, 3/4, 7/8, dvs man vill närma sig 1. Den återstående, oönskade delen blir då 1/2, 1/4, 1/8 dvs går mot 0. Tilläggas kan att när fem generationer har gått, och man har uppnått 31/32, räknas djuret som renrasigt.

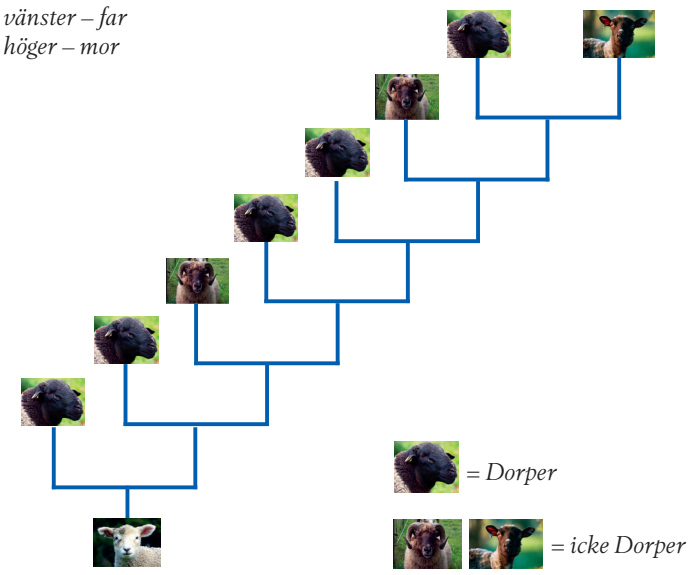
För att förklara hur 85 % korsades in försöker vi hitta ett tal vars nämnare är tvåpotens och som ligger i intervallet mellan 84,5 % och 85,5 %. Det första talet som vi hittar är 109/128 = 0,8515625. Vi får inte så mycket information av det men nämnaren 128 avslöjar antalet generationer som behövs för att komma till den korsningsgraden. $128 = 2^7$, vilket talar om att avelsarbetet pågått i sju generationer. Väljer vi däremot att skriva talet i binär form får vi mycket mer kunskap. $109 = 64 + 32 + 8 + 4 + 1$ och följaktligen är

$$\frac{109}{128} = \frac{64 + 32 + 8 + 4 + 1}{128} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}.$$

För dem som vurmar för rationella tal skrivna på en rad med inslag av kommatecken återger vi talet i binär form. I binära hela tal står sista siffran för ental, näst sista siffran för tvåtal och siffran dessförinnan för fyrtal osv. I binära rationella tal följer, efter kommatecknet, positionerna hälften, fjärdedel, åttondel osv. Följande tal i binär rationell form: 0,11101101 säger att far, morfar, mormors morfar, mormors mormors far och mormors mormors mormors far var renrasiga Dorper, se illustration på nästa sida.

Talet $0{,}8515625_{\text{bas tio}}$ bleknar i tydlighet i jämförelse med $0{,}11101101_{\text{bas två}}$ och ger knappast någon större förståelse för köparen. Vad beträffar säljaren så betvivlar jag starkt att denne bedrev så ogenomtänkt avel.

I rättvisans namn bör det påpekas att en viss inkorsning kan åstadkommas på olika sätt. Vill vi skapa korsningsgrad 5/8 kan vi utgå ifrån en renrasig hane och en hona med 1/4 inblandning av den rasen eller om faderns inkorsningsgrad är 7/8 och moderns 3/8. Den förra tar tre generationer medan den andra kräver fyra generationer.



Mina tankar om tal i bråkform

Jag tänker på syftet med uppgiften som flickan i åk 8 fann i sin lärobok. Var författarens syfte att elever skulle, efter att ha fått svaret 2/3, generalisera detta till att gälla även i andra situationer som att fördela fyra pannkakor på sju personer och skriva svaret 4/7 utan att se delningsprocessen framför sig?

Jag undrar hur pojken i åk 7, han som svarade 0,33 på frågan om delning av ett äpple på tre, hade svarat på flickans uppgift om att dela två äpplen på tre personer. Hade svaret blivit 0,66 eller 0,67? Förmodligen det förra svaret om hans automatisering var begränsad till enklare stambråk och det senare om även automatisering av enkla allmänna bråk hade underkastats samma procedur. Han skulle med säkerhet inte kunna leverera ett lika självsäkert svar för delning av fyra pannkakor på sju portioner.

Jag funderar också på vilket sätt ivraren för slopandet av bråkform ville att elever skulle lösa uppgiften. Antagligen ville han att de med hjälp av miniräknare skulle dividera 2 med 3. Hans elever kunde ju inte äga någon bild av 2/3, som skulle skrivas om i decimalform. Dessa elever skulle antagligen klara en delning av fyra pannkakor på sju portioner med hjälp av smarta mobiltelefoner genom att i telefonens fönster avläsa 0,57142857 och avrunda svaret till 0,57. Därigenom skulle de gå miste om den intressanta decimalutvecklingen som ger fördjupad insyn i de rationella talens egenskaper.

Jag har svårt att se att de tre nämnda exemplen har någon matematisk själ överhuvudtaget. Matematik måste bygga på tankeprocesser och inte på stipulerade automatiseringar. Automatiseringar kommer att infinna sig spontant hos utövaren när tiden är mogen. Matematik kan inte vara auktoritär utan kräver resonemang.

En auktoritär inställning hos en del lärare syns tydligt i det karaktäristiska beteendet som flickan visade genom att sudda ut sitt svar. Jag misstänker att om unga elever tillåts lösa flickans uppgift med sin egen logik, så klarar de även att fördela fyra pannkakor på sju portioner något senare i sin skoltid på egen hand och kan ta till sig de rationella talens värld med förtrogenhet.

Här kan ett annat problematiskt område inom skolmatematiken snabbt beröras, nämligen algebra. Algebran är ju som bekant generaliserad aritmetik och god förtrogenhet inom aritmetiken bäddar för god förståelse av handhavande av algebraiska uttryck. För att koppla till artikelns tema kan vi titta på rationella uttryck. Många av mina lärarstudenter på utbildning för lärare 4–6 blev lockade att förkorta uttrycket $(a+c)/(b+c)$ till a/b. När jag strax efteråt lät någon bland studenterna berätta en episod från *Emil i Lönneberga* när det gäller Linas argument för att inte äkta Kråkstorparen kunde man höra många skratt. Lina, som då var 25 år gammal, blev nämligen föreslagen att gifta sig med den dubbelt så gamla Kråkstorparen. Linas argument löd: ”Det går väl an nu, men tänk när jag blir femtio år, då är han hundra, hujedamej sånt besvär jag skulle få med honom då!” Här finns det en klar likhet till förenkling av det algebraiska uttrycket.

Jag vill på intet sätt förringa decimalformens fördelar i vissa situationer och ifrågasätta dess existensberättigande. Det är en fantastisk idé att utvidga positionssystemet åt andra hållet från entalssiffran. Å andra sidan bör vi se decimalformens begränsningar och risk för missuppfattningar, som nog är en konsekvens av bristande förståelse för rationella tal i allmänhet. Förståelsen för rationella tal kan förbättras om vi utgår ifrån elevernas egna föreställningar istället. Det finns en viss rädsla bland matematiklärare att använda tal i bråkform med tanke på de många räkneregler som elever tvingas memorera. Resultatet blir att man flyr in i decimaltalens värld, där nämnarna blir dolda och därmed reglerna något enklare. Det som man då glömmer är att matematik inte går ut på att räkna och att man inte lär sig ämnet genom att memorera utan genom att förstå.

LITTERATUR

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2018). *Ett sätt att tänka på progression i begreppskunskap*. Nämnaren 2018:3.

Clarke, D., Roche, A. & Mitchell, A. (2010). *Tio sätt att göra bråk levande*. Nämnaren 2010:2.

Laksman, P. (2007). *Historien upprepar sig*. Nämnaren 2007:1.

www.fisme.science.uu.nl/en/fius/docs/rme_tour.pdf

www.nlcsmaths.com/uploads/2/6/3/6/26365454/skemp.pdf