2A
7B

Potenser och logaritmer – på en tallinje

BEGREPP – MATEMATIKENS UTVECKLING – TALUPPFATTNING – ALGEBRA

Avsikt och matematikinnehåll

I läroböcker är det standard att presentera potenslagarna som ett färdigt system för att beteckna upprepad multiplikation av tal eller bokstäver:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$
$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$
$a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a = a^n$

En nackdel med den framställningen är att den inte uppmuntrar eleverna till att reflektera och utforska – allt är ju redan färdigt. Istället får de memorera fakta. I denna aktivitet får eleverna istället möta potenslagarna med tallinjen på pappersremsor för att själva – med matematisk fantasi och associationer – upptäcka och formulera potenslagarna. I en förlängning av aktiviteten möter eleverna även logaritmer.

Förkunskaper

Inledningsvis behöver eleverna grundläggande heltalsaritmetik och vana att arbeta med tallinjer. Senare i aktiviteten behöver de även grundläggande aritmetik för rationella tal samt grundläggande förståelse för kvadrattal och kvadratrötter.

Material

Tomma pappersremsor (exempelvis räknemaskinsrullar) och förtryckta tallinjer. Sistnämnda finns som kopieringsunderlag sist i dokumentet.

Beskrivning

På elevsidorna beskrivs en arbetsgång där eleverna ges möjlighet att upptäcka potenslagarna och så småningom logaritmer. Läs igenom elevsidorna och avgör om aktiviteten passar bäst att genomföra mer eller mindre gemensamt i helklass eller om eleverna har större behållning av den ifall de undersöker på egen hand i smågrupper. Arbetssättet EPA (enskilt, par, alla) kan vara lämpligt.

Introduktion

Titta gemensamt på något exempel som särskiljer upprepad addition och upprepad multiplikation. Diskutera hur notationen för upprepad addition ser ut.

Uppföljning

Låt några elever berätta om sina upptäckter. Diskutera notationer och formulera gemensamt potenslagarna.

Utveckling

Efter arbetet med potenslagarna blir logaritmer på tallinjen en naturlig utveckling. I aktiviteten finns förslag på hur eleverna kan använda resårband för att göra dessa undersökningar. Ett alternativ är att istället använda linlog-papper (sök på nätet) eller skriv $1{,}25^1$, $1{,}25^2$, $1{,}25^3$ etc på y-axelns skalstreck.

- Rita kurvor $y = A \cdot b^x$ för olika värden på b på linlog-pappret. Slutsats 1: Alla dessa kurvor blir räta linjer.
- Välj ett linlog-papper med annan y-skala, exempelvis 2^1, 2^2, 2^3 etc. Rita kurvor $y = A \cdot b^x$ för samma värden på b som ovan på linlog-pappret. Slutsats 2: Alla dessa kurvor är fortfarande räta linjer.
- Sammanlagd slutsats: Oavsett skala på linlog-pappret så blir alla kurvor $y = A \cdot b^x$ räta linjer.

Erfarenheter

Roger Fermsjö lät elever arbeta med tallinjer när de lärde sig begreppet logaritmer. Under detta arbete var det ovanligt med de räknefel som matematikdidaktisk forskning annars rapporterar som vanliga vid elevers arbete med logaritmer. Fermsjö konstaterade i sin licentiatavhandling att det är viktigt att eleverna ges möjlighet till reflektion för att resultatet ska bli gott.

Att läsa

Petersson, J. (2017). *Potenser och logaritmer på tallinjen.* Nämnaren 2017:2.

Unenge, J. (1984). *Miniporträttet: Neper – en outtröttlig räknemästare.* Nämnaren 1983/84:3.

Potenslagar

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$
$$(\frac{x}{y})^m = \frac{x^m}{y^m}$$
$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$
$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$
$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

Logaritmlagar

$$log_a(x) = log_a(b) \cdot log_b(x)$$
$$log(\frac{x}{y}) = log(x) - log(y)$$
$$log(x \cdot y) = log(x) + log(y)$$
$$log(x^n) = n \cdot log(x)$$

De nedersta kan sammanfattas i

$$log(x^m \cdot y^n) = m \cdot log(x) + n \cdot log(y)$$

Potenser

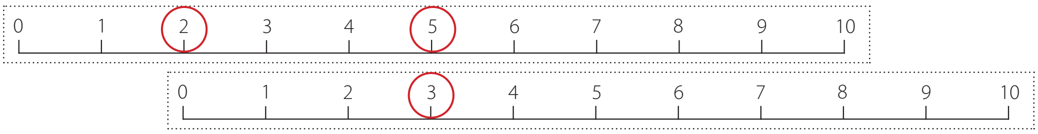
på en tallinje

Material

Pappersremsor, både tomma (exempelvis räknemaskinsrullar) och med förtryckta tallinjer.

Beskrivning

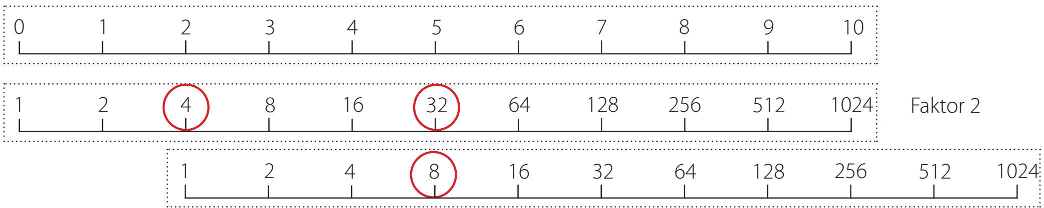
- Titta på figur 1 som illustrerar additionen $2+3=5$ eller subtraktionen $5-3=2$.



Figur 1

Diskutera hur dessa båda tallinjer kan fungera som en enkel form av ”miniräknare” för addition och subtraktion. Konstruera och prova några egna uppgifter så ni blir säkra på hur remsorna kan användas. Observera att ni måste hålla er inom talområdet 0–10 och enbart använda addition och subtraktion. Ett alternativ är att använda två vanliga skollinjaler inom talområdet 0–30.

- I figur 1 har samma tal, 1, adderats för varje nytt skalstreck. Ni ska nu använda *matematisk fantasi* och istället för att addera med samma tal för varje nytt skalstreck ska ni multiplicera. Enklast är att multiplicera med faktorn 2, dvs att dubblera, som i figur 2 och att börja tallinjen på talet 1.
  Varför är det inte intressant att börja på noll och dubblera? Som jämförelse finns också en vanlig tallinje ovanför de båda tallinjerna med faktor 2.



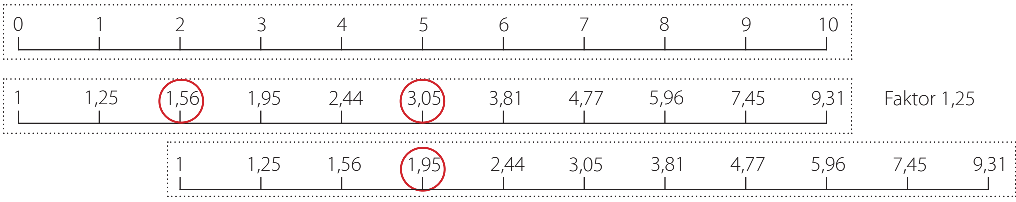
Figur 2

Ringarna pekar ut ett samband mellan talen 4, 8 och 32 som vi känner igen som multiplikationen $4\cdot 8=32$ och divisionen $32/8=4$. Fungerar detta även för andra talkombinationer på tallinjen? Konstruera och prova några egna uppgifter så ni blir säkra på hur remsorna kan användas som ”miniräknare” för multiplikation och division då talen är faktorer av 2.

- Använd tomma pappersremsor och konstruera egna tallinjer med andra faktorer, t ex 3 eller 5. Prova dem med olika beräkningar så ni blir säkra på hur remsorna fungerar.

- Hur många olika tallinjer behöver ni konstruera för att kunna använda dem till hela multiplikationstabellen?

- Nu vet ni att dessa ”miniräknare” fungerar för heltal, men hur är det med tal i decimalform? I figur 3 är faktorn 1,25. Observera att produkterna har avrundats till två decimaler: $1{,}25 \cdot 1{,}25 = 1{,}5625 \approx 1{,}56$.



Figur 3. Faktor 1,25

Gör som tidigare, konstruera och prova några egna uppgifter så ni blir säkra på hur remsorna kan användas som ”miniräknare” för multiplikation och division då talen är faktorer av 1,25.

- Använd tomma pappersremsor och konstruera egna tallinjer med andra faktorer i decimalform. Prova dem med olika beräkningar så ni blir säkra på hur de fungerar.

- Nu ska ni använda matematisk associationsförmåga. En vanlig linjal har skalstreck för mindre enheter: mellan centimetrarna finns det millimeterstreck. Finns det tal mellan två skalstreck på pappersremsorna – och i så fall vilka? Titta på figur 2 och undersök följande påstående: Kvadraten av ett tal (x^2) innebär att gå dubbelt så många steg framåt och roten ur ($\sqrt{x}$) motsvarar att gå halvvägs mot ettan.

  Undersök också, med hjälp av figur 2, följande påståenden:

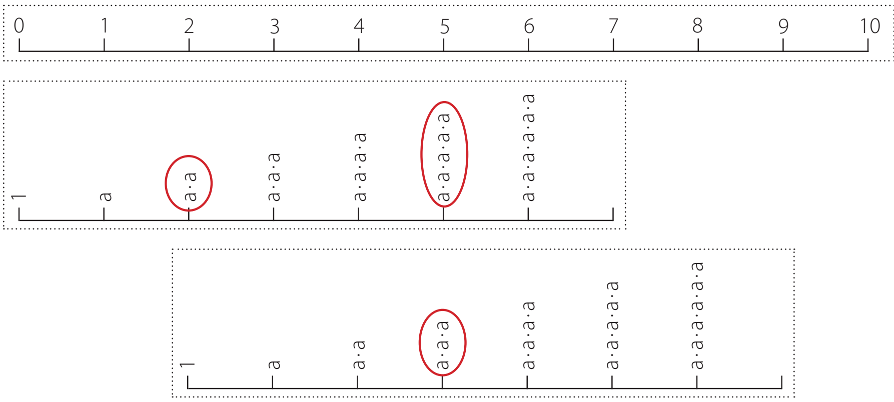
8^2 är 64.	Rätt eller fel?
$\sqrt{256}$ är 16.	Rätt eller fel?
$\sqrt{128}$ är ett tal *mitt* emellan 8 och 16.	Rätt eller fel?
$\sqrt{32}$ är ett tal mellan 4 och 8.	Rätt eller fel?

- Vid steg 6 i figur 3 står det 3,81 och en tredjedel av 6 är 2. I figur 3 vid steg 2 står det 1,56 och vi kan kontrollera med miniräknaren att $1{,}56^3 \approx 3{,}80$. Den här ’tredjedelsroten’ har i den etablerade matematiken fått namnen ’tredje roten ur’, ’kubikrot’ och ’upphöjt till en tredjedel’. Använd tallinjen som stöd för att se likheten mellan beteckningarna $\sqrt{a} = a^{½}$ och $\sqrt[n]{a} = a^{(1/n)}$.

  Eftersom det uppenbarligen fungerar med tredjedelar i exponenten så blir, med lite *matematisk fantasi*, en möjlig följdfråga: vad händer om vi avläser vid 2/3 mellan ettan och sjätte steget, dvs vid fjärde steget i figur 3? Använd miniräknaren för att kontrollera svaret. Gör fler avläsningar så ni säkert ser sambandet.

- Gör ytterligare ett experiment med fler skalfaktorer. Lägg två tallinjer med faktorn 2 respektive 4 jämte varandra. Ser ni att ni får gå dubbelt så många steg på den med faktorn 2 för att komma till samma tal som på den med faktorn 4? Det kanske inte förvånar någon eftersom det är en kvot 2 mellan faktorerna 2 och 4. För att skapa kontrast kan ni även jämföra två tallinjer med faktorerna 3 och 9. Även här får man gå dubbelt så många steg på tallinjen med skalfaktorn 3. Jämför också tallinjerna med skalfaktorerna 1,25 och 2. För att komma till talet $1{,}95 \approx 2$ går man 3 steg med skalfaktorn 1,25 men förstås bara 1 steg med skalfaktorn 2. Motsvarande förhållande gäller när man går till talet $3{,}81 \approx 4$. Det behövs alltså en kvot 3 mellan antalet steg på dessa två tallinjer. Vilken slutsats kan ni dra av detta resonemang?

- Nu är det dags att fundera på *varför* pappersremsorna fungerar som multiplikationstabell.



Här går det att ha praktisk nytta av algebra eftersom faktorn a i figuren kan vara vilket positivt tal som helst. Figuren visar vad som redan gått att ana: att först multiplicera 2 gånger med en faktor och sedan multiplicera ytterligare 3 gånger är detsamma som att multiplicera $2 + 3 = 5$ gånger med faktorn. Med traditionell notation motsvarar det potenslagen $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$.

- Hur kan figuren användas för att visa potenslagarna $a^n / a^m = a^{(n-m)}$ och $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$?

Logaritmer

på en tallinje

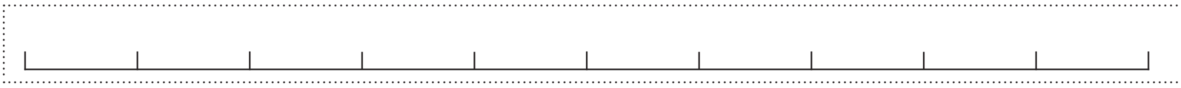
Material

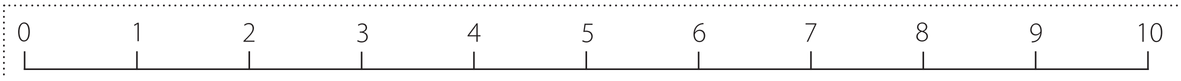
Resårband, gem och papperslappar.

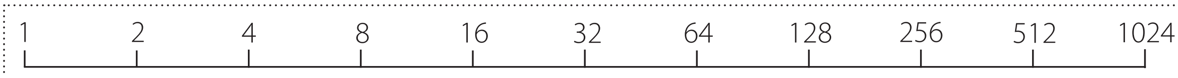
Beskrivning

1. Ta ett resårband och fäst med gem potenserna $1{,}25^1$, $1{,}25^2$, $1{,}25^3$ osv på lika avstånd.
2. Ta ett andra resårband och fäst med gem potenserna 2^1, 2^2, 2^3 osv på samma avstånd som på det första resårbandet.
3. Tänj ut det första resårbandet så att produkterna av respektive potens stämmer överens. Vad ser ni?
4. Upprepa punkt 3 för olika baser. Vad upptäcker ni?
5. Formulera en slutsats utifrån det som ni har upptäckt.

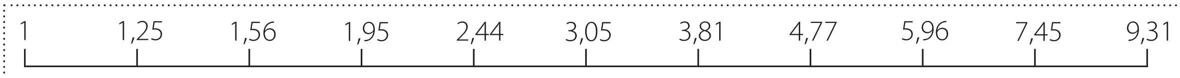
Kopieringsunderlag



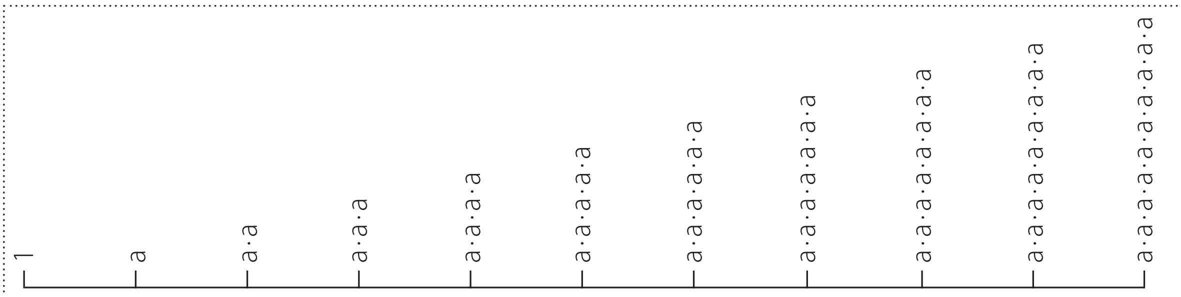




Faktor 2



Faktor 1,25



Faktor a