Att starta med problem

Bengt Ulin

Problemlösning kan ses både som medel och mål i all undervisning. I denna artikel beskrivs hur problemlösning kan användas som ett sätt att närma sig matematiska begrepp. Med ett undersökande arbetssätt som stimulerar fantasin kan alla elever arbeta utifrån samma problem. Individualiseringen består då i hur och på vilken nivå problemet angrips.

Inre och yttre verklighet

”Det måste ha dröjt många generationer innan man upptäckte att ett fasanpar och ett par dagar båda var exempel på talet två”, yttrade Bertrand Russell en gång (citerat efter den svenska översättningen av Tobias Dantzigs bok *Talen – vetenskapens språk*).

Att räkna dagar är ju inte detsamma som att räkna fåglar. Det kan vara svårt nog att på samma sätt räkna så ganska likartade ting som flata föremål och runda föremål. Det finns ett folk i British Columbia som använder olika uppsättningar av räkneord för dessa två slag av föremål och som därutöver har fem uppsättningar, bl a för människor och för kanoter. Vi kan förstå att det rör sig om ett båtfolk. ”Det konkreta föregick det abstrakta” säger Dantzig i sin bok.

Även i pedagogiken är det en bra tumregel att låta det konkreta komma före det abstrakta, att låta det abstrakta mogna fram ur det konkreta. Stimulans från en yttre verklighet hjälper oss i uppväxtåldern att orientera oss allt bättre i en inre verklighet, i en värld där tankarna är lika verkliga som bord och stolar i sinnevärlden.

Men hur skulle talbegreppet utvecklas om vi i årskurs 1 alltid lät barnen arbeta med tändstickor? När jag som barn gick i den då s k småskolan, räknade vi (alltför) ofta med träkuber. Nej, ska talbegreppet utvecklas bra, så ska vi ge eleverna en brokig uppsättning av objekt, ibland räkna med nötter, ibland med pengar, ibland med minuter osv. Barnen kommer då, till skillnad från båtfolket i Kanada, att befästa sitt heltalsbegrepp, det som är övergripande i mångfalden av objekt. Däremot ska vi inte blanda olikartade objekt som ”the new math” utsatte barnen för i början av 1970-talet, då en nyckel, ett öra, en boll och ett par glasögon kunde bilda en mängd – nästan surrealistiskt, och fullkomligt omatematiskt. The new math illustrerade f ö alltid antal procent med färgade rutor i en kvadrat med 100 rutor – även det ett exempel på en begränsning som hämmar utvecklingen av ett begrepp, i detta fall procentbegreppet.

Begränsningar finns tyvärr fortfarande kvar i läromedlen. Jag tänker närmast på de så viktiga begreppen derivata och integral. Det förra spikas fast som lutningen hos en kurvtangent, det senare som en area under en funktionskurva. I själva verket är tangentens lutning och arean under en kurva endast exempel på vad en derivata respektive en integral kan innebära, ja kurvtangentens lutning och arean under kurvan måste definieras som ett värde hos derivatan och hos en integral. Den valda vägen blir alltså både omatematisk och inskränkande på begreppsutvecklingen. På den senaste biennalen, i Sundsvall i januari 1996, hörde jag till min glädje ett föredrag av Hans Wallin, som förebådade nya grepp på introduktion av integraler i kommande läromedel.

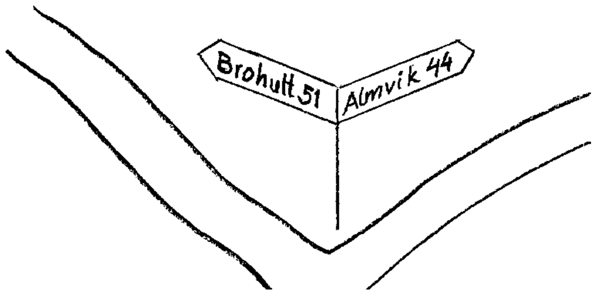
***Bengt Ulin** är lärare vid Kristofferskolan i Bromma och undervisar också vid Högskolan för Lärarutbildning i Stockholm.*

Problemlösning börjar med fantasi . . .

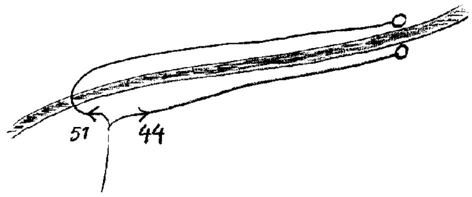
Att undervisa i matematik bör till en väsentlig del vara att hjälpa eleverna till att lita på sitt eget tänkande. Här spelar problemlösningen en viktig roll. Vi ska skilja mellan problemlösning och reprislösning av ett problem som vi mött tidigare. Om vi känner igen en problemuppgift rör det sig faktiskt inte om ett "riktigt" problem. Vi står inför ett problem när vi inte vet hur vi ska ta itu med det. Ett problem är alltid ett nytt problem. Därför ger det alltid någon ny erfarenhet, oavsett om vi löser det eller inte. Om jag kör fast och tar hjälp kan jag observera hur det kom sig att jag hamnade i en återvändsgränd och lära mig av en sådan erfarenhet. Problemlösning blir något positivt, om vi bara kan komma på någon idé, en ansats till lösning. I början måste vi satsa på någon upptakt till lösning. Det handlar här om en bred skala av fantasi, från chansartad gissning, aning och rentav blixtartad intuition, till en kombination av tidigare kunskaper.

Vid en middag frågade någon David Hilbert, berömd matematikprofessor i Göttingen, varför en av hans doktorander hade lämnat institutionen och blivit romanförfattare. "Han hade inte nog fantasi för matematik, men tillräckligt för romaner", blev Hilberts kyliga men måhända träffande svar. All problemlösning börjar med en yttring av fantasi. Praktfulla historiska exempel på att det är så finner vi i det som räddats kvar av Arkimedes skrifter, främst hans märkliga härledningar av parabelsegmentets area och sfärens volym. Även om man kan säga att allt mer avancerad matematik kräver allt mer av kreativitet, så finns det mycket utrymme för fantasi redan på det tidigaste skolstadiet och det är oerhört vikigt att vi ger eleverna tillfälle att utveckla den. Låt oss se på ett exempel:

Vid ett vägskäl finns en skylt som visar Almvik 44 om man tar av åt höger, och Brohult 51om man tar av åt vänster. Hur lång och hur kort kan färdvägen vara från Almvik till Brohult?



Att färdvägen inte kunde vara längre än $44 + 51 = 95$ (km) var eleverna i en mellanstadieklass överens om. Däremot varierade buden om hur nära varandra de två orterna låg. En elev sa "50 meter". Det lät onekligen spännande, så vi önskade alla att få se en kartskiss. Resultatet blev det som figuren visar: en å skiljer de två orterna åt!



Rika uppgifter

I de flesta klasser varierar elevernas fallenhet och intresse för matematik en hel del. Läraren har en viktig uppgift att förse eleverna med uppgifter av lämplig svårighetsgrad, särskilt de avancerade eleverna och de rådvilla. Allra bäst fungerar individualiseringen då vi lärare kan ge sådana uppgifter som erbjuder ett mer utbrett undersökningsområde. Då kan alla elever arbeta med samma uppgift och eleverna kan ta för sig så mycket av uppgiften som passar dem. En uppgift som lätt sporrar eleverna till egna strövtåg är att undersöka om ett naturligt tal är *rikt*, *fattigt* eller *perfekt*. *Rikt* är ett tal n, om dess delare ($< n$) har en summa som överstiger n. Ex: 12 har delarna 1, 2, 3, 4 och 6 med summa 16. Eftersom 16 är större än 12 är 12 ett rikt tal.

Ett tal som 10 är *fattigt*, ty dess delarsumma $1 + 2 + 5$ är mindre än 10. Om delarsumman är lika med utgångstalet, så sägs detta vara *perfekt*. Låt eleverna finna tal av respektive slag. Och än mer, om vi kallar delarsumman för s, kan de försöka finna tal n, så att förhållandet s/n blir så stort som möjligt. Insikten om att detta förhållande faktiskt kan bli hur stort som helst är avancerad, men eleverna hittar säkert tal där delarsumman åtminstone är dubbel så stor som talet. Här finns många frågor att ställa:

Kan delarsumman s vara 1? 2? 3? etc. Kan två tal ha samma s-värde? Kan s vara lika med $n+1$? Osv.

Givetvis kan och ska vi emellanåt utgå från vardagssituationer men i regel ger uppgifter inom den ”rena matematiken” större svängrum för undersökningar. Att då och då strö in uppgifter på gräsrotsnivå, dvs uppgifter som inte kräver just några förkunskaper alls, ger varje gång mindre kunniga elever nya chanser att öka sitt självförtroende genom att komma på bra uppslag. Lika oumbärliga är å andra sidan uppgifter som kräver sådana förkunskaper som eleverna borde ha förvärvat.

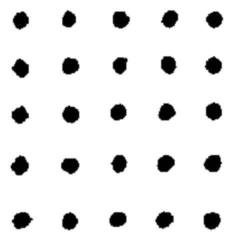
. . och leder fram till logiskt tänkande

För att säkerställa riktigheten i en problemlösning måste vi kunna prestera en motivering eller ett bevis av något slag. Vi måste prestera en logisk tankegång. Även detta framgår kristallklart i de nämnda härledningarna av Arkimedes. Han fann de önskade formlerna på intuitiv väg och måste sedan på en helt annan väg bevisa att formlerna var riktiga.

De äldsta kända bevisen utfördes av grekiska matematiker. Under 6:e århundradet f Kr grundade Pythagoras sin berömda mysterieskola i Kroton, en grekisk kustort vid det nuvarande Italiens ”hålfot”. Förutom musik upptog heltalen pythagoréernas varma intresse. De upptäckte att summan av successiva udda heltal är kvadrattal:

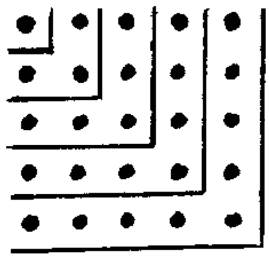
$$1 = 1 = 1^2$$
$$1+3 = 4 = 2^2$$
$$1+3+5 = 9 = 3^2$$
$$1+3+5+7 = 16 = 4^2$$

Fortsätter summan att vara ett kvadrattal, när ytterligare udda tal successivt läggs till? Det är intressant att pythagoreerna fann beviset genom att utgå från helheten, dvs från ett kvadrattal. Skulle man kunna dela upp ett kvadrattal i en summa av successiva udda heltal? Eftersom grekerna alltid strävade efter enkel åskådlighet framställde man ofta talen som s k figurativa tal, speciellt kvadrattalen i form av en punktkvadrat.



Figuren visar kvadrattalet 25. Problemet blir nu omformulerat:

Kan man dela upp kvadraten i bitar som svarar mot successiva udda tal och som visar att uppdelningen är genomförbar för vilket kvadrattal som helst?



Figuren visar grekernas lösning. Det är inte svårt att visa att lösningen är generell: om kvadratsidan ökar med 1 punkt, så tillkommer en ”vinkelhake” med 2 punkter fler än den dittills största vinkelhaken.

Det finns andra lösningar också, som väl är!

Det är som bekant de öppna frågeställningarna som inbjuder till individuella elevlösningar. Ju mer uppgiften har karaktär av undersökning, desto större blir möjligheten till variation.

En del frågor har en lösning som inte kräver något logiskt resonemang; det räcker med att peka på ett exempel eller ett motexempel. Om vi frågar

Har varje multipel av talet 6, som är minst 6, ett primtal som granne, dvs som närmast högre eller lägre tal?

så infinner sig svaret ”av sig självt” för den som i tur och ordning prövar med multiplerna 6, 12, 18, etc. Rätt länge finns en primtalsgranne, men väl framme vid 120 finner den tålmodige (och optimistiske) att varken 119 eller 121 är primtal. Exemplet 120 visar alltså plötsligt att svaret är nej.

När vi hittat ett motexempel blir det ”sudden death” för att använda en sportterm.
Om man däremot vänder på frågan och frågar

Har varje primtal större än 3 en 6-talsmultipel som granne?

så är svaret ja! Här skulle det bli ett Sisyfus-arbete att försöka hitta ett motexempel. Här måste man föra ett logiskt resonemang. Det är inte svårare än att elever på mellanstadiet kan klara av det, särskilt om de ritar ut en rad ”stolar” där heltalen får ta plats. På var sjätte stol sitter förstås en 6-multipel.

1 2 3 ~~4~~ 5 **6** 7 ~~8 9 10~~ 11 **12** 13 ~~14~~ …

Uppgifter för undersökning

Vi ska nu gå ett steg vidare och se hur fantasi och logik kan ges spelrum inom ramen för ett undersökande arbetssätt.

Exempel 1

Är summan av tre jämna heltal alltid, aldrig eller ibland delbar med 3?

Om svaret är alltid, eller aldrig, ge bevis.

Om svaret är ibland – vad behöver vi kräva av de tre talen för att summan ska bli delbar med 3?

Här är en undersökning av trial-and-error-typ tillräcklig för att avgöra att svaret är ”ibland”. Exempelvis är summan $2+4+6$ delbar med 3, medan summan $2+4+8$ ej är delbar med 3.

Nu återstår den svårare delen av uppgiften. Vad ska vi kräva av de tre talen för att summan ska bli delbar med 3?

Här behövs fantasi för en lösningsansats! Än mer, det krävs en logisk fortsättning, så att vi kan leda i bevis att det pålagda villkoret räcker för delbarhet. Ännu ett snäpp högre vore att undersöka om det pålagda villkoret är nödvändigt (utöver den tillräcklighet som beviset garanterar).

Om eleverna övat division med rest kommer de nog att beakta den rest som division med tre kan ge. Med den ansatsen bör målet vara inom räckhåll, särskilt om eleverna arbetar i grupper.
I en senare årskurs, där eleverna har tillgång till algebra som undersökningsredskap, kan de ansätta tre tal $2m$, $2n$ och $2p$, eller ännu bättre, med tanke på delbarhet med 3, tre tal vardera av typ $6p - 2$, $6q$ eller $6r+2$.

En grupp finner att om vart och ett av de tre jämna talen är delbart med 3, så är summan delbar med 3 (”förstås”); en annan finner att om ett av talen är delbart med 3 och summan av de två andra är delbar med 3, så är summan delbar med 3.

Båda dessa grupper gör bra upptäckter, men det pålagda villkoret är inte nödvändigt. Det visar exemplet $2+8+14$ som har summan 24.

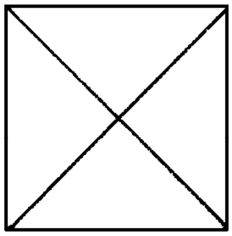
Det både nödvändiga och tillräckliga villkoret är att om de tre talen är $6p+u$, $6q+v$ och $6r+w$, där u, v och w är -2, 0 eller 2, så ska summan av resterna, $u+v+w$, vara delbar med 3.

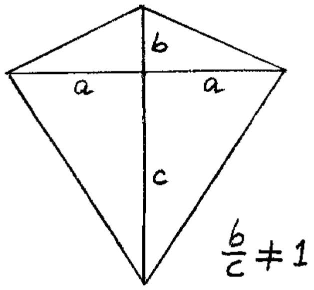
Exempel 2

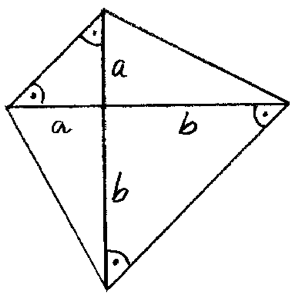
I en fyrhörning är diagonalerna lika långa och vinkelräta mot varandra.

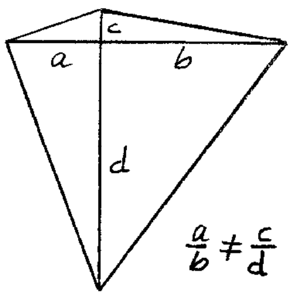
Vilka intressanta, eventuellt symmetriska typer av fyrhörningar finns det med sådana diagonaler?

Hur ska man här komma längre än till något isolerat resultat med trial-and-error? Vilken figur ska man börja med? Och hur ska den figuren sedan varieras steg för steg, så att undersökningen ska kunna bli täckande? Här ställs fantasin inför uppgiften att göra en systematisk undersökning, en bra uppgift i t ex årskurs 8 eller 9.









Utgångsfiguren väljs med fördel sådan att diagonalerna delar varandra mitt itu. Figuren blir då en kvadrat. Hur ska man fortsätta? Här kommer idén att göra små förändringar. (Matematiken är mönsterbildande för annan forskning!) Alltså - vi låter den ena diagonalen förbli tudelad och parallellförskjuter den andra. Åh, det blir drakar, spegelsymmetriska fyrhörningar av draktyp! Och vidare? Nu får ingen av diagonalerna längre vara halverad. Idén kan bli att låta diagonalerna dela varandra i samma delningsförhållande (skilt från 1:1), t.ex. 1:2. Det blir en intressant delundersökning, som även den visar att figuren blir symmetrisk, men denna gång ett likbent parallelltrapets, alltså ånyo med en symmetrilinje.

Återstår fallet att diagonalerna delar varandra i olika delningsförhållanden, ingetdera 1:1. Här kommer inte något mer ut än vad vi visste från början om diagonalerna.

Därmed täcker undersökningen alla tänkbara fall och vi kan redovisa resultatet som i figurerna.

Problemlösning och begreppsbildning väver i varandra. De är fundamenten för matematisk aktivitet. Begreppsbildningen underlättar problemlösningen och omvänt inducerar problemlösning hos eleverna en kunskapstörst efter nya begrepp. Utan att förfalla till en skråmentalitet bör vi kunna se matematiken som en viktig skolning, ja en unik skolning, som utvecklar inre ögon, enligt Platon mer värdefulla än tusen fysiska ögon.

Referenser

Claesson, P. (1979). Fattiga och rika tal. *Nämnaren 6(2)* 29 – 32.

Dantzig,T. (1965). *Talen – vetenskapens språk.* Aldus.

Dokumentation av 9:e Matematikbiennalen (1996). Mitthögskolan, Sundsvall. s 196 – 198 m fl avsnitt.

Emanuelsson m fl (red). (1996). *Matematik – ett kommunikationsämne*. Nämnaren. Göteborgs universitet.

Emanuelsson m fl (red). (1996). *Matematik – ett kärnämne*. Nämnaren. Göteborgs universitet.

Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding,R. (red). (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.

Gardner, M. (1978). *Aha! Insight* Freeman & Co.

Laksov, D. (1993). Problemløsning eller matematiska idéer i undervisningen, *Nämnaren 20(4)* 43 – 47.

Nämnaren (1983). Tema Problemlösning. *Nämnaren 9(3)*

Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår.* Liber-Hermods.

Ulin, B. (1994). Problemlösning *och* teori i skolan! *Nämnaren 21(1)* 38 – 42.

Ulin, B. (1991). Den mångsidiga fyrhörningen *Nämnaren 18(2)* 50 – 53.