

Problemlösning i Japan och Sverige

Japansk matematikundervisning skiljer sig på många sätt från svensk.

Vilka konsekvenser får det för hur elever i respektive länder löser problem? Tomoko Helmertz undersökte frågan i sitt examensarbete för vilket hon fick Göran Emanuelssonstipendiet 2007.

Här redovisar hon några av resultaten.

Under min praktik som lärarstuderande i några högstadieskolor, upptäckte jag att undervisningen i Sverige såg mycket annorlunda ut än den som jag själv fick när jag läste matematik under 16 år i japansk grund- och gymnasieskola. Under min praktik i Sverige började läraren ofta lektionen med en kort genomgång och resten av lektionen arbetade eleverna enskilt med uppgifter i läroboken. Det fanns inte så mycket intressant och stimulerande guidning från läraren och jag kunde inte se något bra system i undervisningen som visade vad matematik egentligen handlade om. Under lärarutbildningen i Malmö, däremot, mötte jag ofta vilja och uppmuntran för att ändra den negativa traditionen i matematikundervisningen i Sverige.

Enligt internationella undersökningar genom åren har japanska elever presterat bättre resultat än svenska, och man antar att undervisningsmetoden måste ha bidragit till detta. Jag bestämde mig för att i mitt examensarbete göra en jämförelse mellan svensk och japansk matematikundervisning. Jag ville utnyttja min kulturella bakgrund för att kunna ge förslag till förbättringar i svensk undervisning.

I denna artikel fokuserar jag på likheter och skillnader av elevlösningar i Sverige och Japan, jämförelse av läromedel och matematiklektioner och elevernas styrkor och

svagheter vid problemlösning. Min undersökning består av

- ◇ jämförelse av läromedel,
- ◇ lektionsobservationer och
- ◇ elevundersökning där eleverna löste två problemlösningssuppgifter.

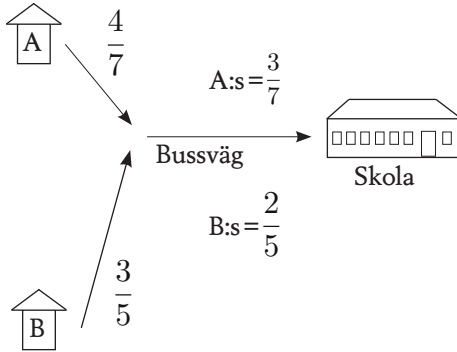
Jag valde två problem som är utprovade som matematiskt rika problem. De är använda i olika sammanhang och varianter av många, men just dessa versioner av problemen fick jag under kursen "Matematisk problemlösning i skolan", en distanskurs vid Högskolan Dalarna. Jag undersökte en klass i åk 8 och en i åk 9 i Japan samt i Sverige. Problem 1 löstes i åk 8 och problem 2 i åk 9.

Problem 1. Skolvägen

Anna och Benjamin går i samma skola men bor olika långt från skolan. Båda cyklar till samma busshållplats. När Anna står och väntar på bussen, har hon cyklat 4/7 av hela sin skolväg. Benjamin har, när han kommer till busshållplatsen, cyklat 3/5 av hela sin skolväg.

- a) Vem av dem har längst väg till skolan?
- b) Hur mycket längre är den vägen än den andras väg?

Detta är ett problem där elever ska jämföra två delar som relateras som bråk till olika stora helheter. För att kunna lösa problemet måste vi utgå från deras gemensamma väg, bussvägen. Jag upptäckte genast vid undersökningstillfället att elever hade mycket svårt att lösa problemet. Därför presenterade jag problemsituationen med en ritning och visade att Annas och Benjamins bussvägar var lika långa.



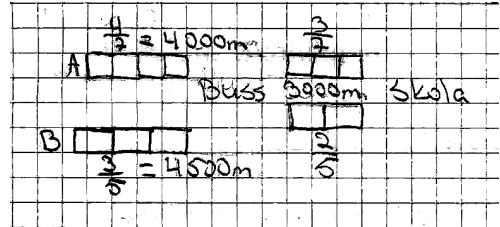
Likheter mellan svenska och japanska elevers lösningar

Detta var ett svårt problem för eleverna i både Japan och Sverige, och det var bara ett fåtal som kunde lösa deluppgift a) och det fanns knappt någon som kunde redovisa deluppgift b) fullständigt. Den vanligaste lösningen var att söka den gemensamma nämnaren och sedan jämföra de två bråktalen, vilket inte ger en korrekt lösning. En annan svårighet var att rita problemsituationen korrekt. Flera svenska elever ritade en ruta som en del, och japanska elever ritade två lika långa hela som de delade i 7 respektive 5 delar.

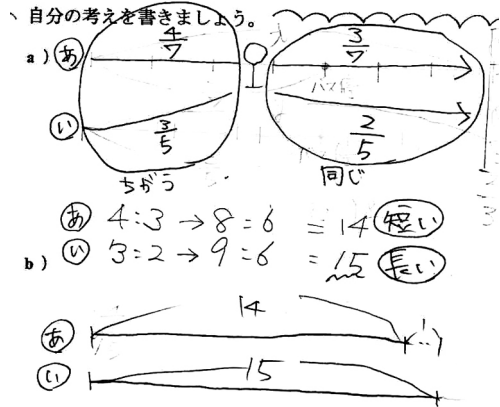
Skillnader mellan svenska och japanska elevers lösningar

Bara en svensk elev avbildade problemsituationen korrekt, och hon satte in konkreta tal för att jämföra de två bråktalen (elevlösning a). Hon tog 3000m för deras gemensamma väg. Då kunde hon bestämma Annas och Benjamins cykelväg, 4000m resp 4500m. Fyra japanska elever kunde rita en korrekt

bild av problemsituationen, och en av dem använde proportionalitet för att jämföra de två vägarna (elevlösning b). Hennes redovisning visar att Annas väg är 1/14 (av hennes väg) kortare än Benjamins väg – eller Benjamins väg är 1/15 längre.



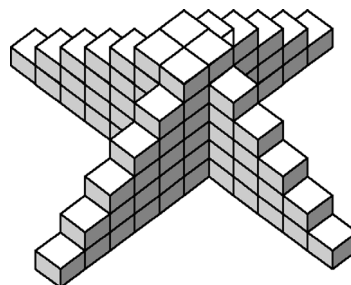
Elevlösning a. Svensk elev – insättning av konkreta tal.



Elevlösning b. Japansk elev – användning av proportionalitet.

Problem 2. Tornet

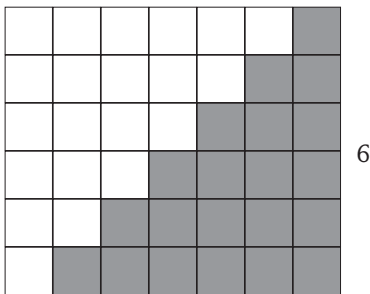
I problem 2 ska eleverna se ett matematiskt mönster i tornet och utnyttja detta för att räkna antal kuber. Till sist ska eleverna koppla mönstret till ett algebraiskt uttryck.



- a) Hur många kuber behövs det för att bygga tornet på bilden?
- b) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är 12 kuber högt?
- c) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är 100 kuber högt?
- d) Finns det en regel för att räkna ut antal kuber i alla liknande torn? Kan man teckna regeln för antal kuber för att bygga ett liknande torn som är n kuber högt?

Likheter mellan svenska och japanska elevers lösningar

I problemet Tornet visade svenska och japanska elever liknande lösningar. Alla elever delade tornet i flera delar på något sätt för att lättare kunna räkna antal kuber. Några elever delade tornet i fyra trappor och satte ihop två trappor till en rektangel, då det blir mycket lättare att räkna antal kuber (elevlösning c). Ett par elever i varje land delade en trappa i två och satte ihop dem till en smal rektangel (elevlösning d). Samtliga elever som kunde komma på dessa sätt kunde skriva de respektive formlerna korrekt.

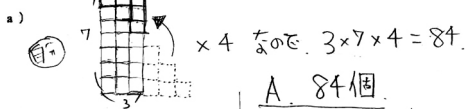


$$6+1=7$$

$$\text{Formel: } n(n+1) \cdot 2$$

Elevlösning c. Två trappor till en rektangel.

自分の考えを書きましょう。



$$\text{Formel: } (n+1) \cdot \frac{n}{2} \cdot 4$$

Elevlösning d. En trappa till en rektangel.

Skillnader mellan svenska och japanska elevers lösningar

Två svenska elever samarbetade och kom på ett annat sätt. De utgick ifrån en trappa och fyllde på så att det blev en kvadrat. Sedan tänkte de på en triangels area och delade kvadraten med 2. Då fattades det en halv n , som de lade till sist. Deras formel var

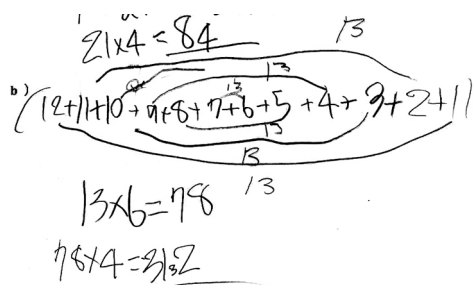
$$4\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right).$$

Två svenska pojkar utgick helt enkelt ifrån positiva heltal n och klurade fram egna formler,

$$\frac{4 \cdot n \cdot n}{2} + \frac{n}{2} \cdot 4$$

och $(2 \cdot n + 2) \cdot n$, vilka var korrekta. Denna metod såg jag inte i de japanska elevernas lösningar.

En japansk elev summerade en aritmetisk talföljd utan hjälp av bild (elevlösning e).

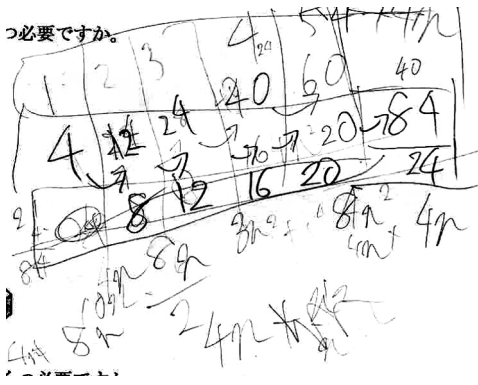


$$\text{Formel: } 4 \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2}$$

Elevlösning e. Summan av en aritmetisk följd.

En annan japansk elev ritade en tabell för att kunna se hur många kuber tornet ökar med när ytterligare våningar av tornet kommer till (elevlösning f). Hans anteckning visar att han försökte teckna mönstret med antalet n , men inte lyckades samla det till en formel.

Japanska elever var allmänt duktiga att förklara hur de tänkte på matematiskt korrekt språk, både muntligt och skriftligt. De var också vana vid att hantera algebra och de flesta som åstadkom formler förenklade dessa.



Elevlösning f. Tabell – ökning av antalet kuber.

Läromedel i Sverige och Japan

Jag analyserade läromedel som användes i mina undersökningsskolor: *Möte med matte C och D* (Liber, 2001) i Sverige och *Chugaku Sugaku 2* (Kyoiku Shuppan, 2001) i Japan. Det svenska läromedlet innehåller 8 kapitel och 324 sidor. Varje kapitel är uppdelat i basdel, diagnos och G/VG-del med i genomsnitt 150 uppgifter per kapitel för en elev att arbeta med. Uppgifternas syfte är att eleverna ska förstå innebörden av begreppen när de löser problemen. Man får intrycket att det matematiska innehållet i vissa kapitel hoppar från det ena till det andra med två, tre sidors intervall. De flesta uppgifterna är vardagsrelaterade, intressanta och roliga, men det kan vara svårt att se en tydlig matematisk koppling mellan uppgifterna.

Det japanska läromedlet innehåller 6 kapitel. Det finns totalt 191 sidor och genomsnittligt antal uppgifter är 35 per kapitel, vilket är mycket färre än i den svenska läroboken. Förutom boken har varje elev en uppgiftssamling som extra material. Innehållet i läroboken är fullt av svårare matematiska begrepp, och läroboken är fokuserad mest på nya begrepp som bygger på vad eleverna lärt sig tidigare. Varje avsnitt börjar med ett undersökande problem med en bild, och fortsätter med en förklaring på lösningen. Det kan vara vardagsrelaterande eller rent matematiska problem. Tillämpning av vardagsnära problem är omfattande i avsnittet ekvationssystem, där behandlas pris, sträcka och hastighet och procent. I geometrin beskrivs många begrepp. Regler,

satser och bevisföring spelar en viktig roll i hela geometriavsnittet.

Undervisning i Japan och Sverige

Lektionsobservationer

Jag gjorde fyra lektionsobservationer i Sverige och sex i Japan. De svenska matematiklektionerna började med lärares genomgång, 10 – 18 minuter. I genomgången gav lärarna exempel på typiska problem i läroboken eller uppgifter som eleverna hade svårt för. Alla elever var mycket uppmärksamma under lärarens genomgång, men jag såg inte någon elev som antecknade vad lärarna skrev upp på tavlan. De var överlag aktiva att räcka upp handen, inte bara när de svarade på lärarens frågor, utan också när de inte riktigt förstod vad läraren menade. Ibland blev det bra diskussioner mellan lärare och elever eller mellan eleverna.

Efter genomgången var det enskilt arbete tills lektionen slutade. Eleverna räknade uppgifter i boken beroende på hur långt de hade kommit. En del arbetade två, tre kapitel efter genomgången, andra höll på med kapitlet före. Detta innebar att läraren inte visste om hennes genomgång passade in precis på vad varje elev sysslade med just då. Många elever ville ha hjälp. Lärarna ville hjälpa så många elever som möjligt, men det tog tid att förklara för var och en. Jag såg att det var vanligt att eleverna tittade i facit när de hade kört fast. Med hjälp av de rätta svaren funderade de sedan på lösningen.

De japanska lektionerna kan delas upp i så många som upp till åtta segment. Först presenterade läraren dagens problem genom att skriva dem på tavlan och sedan förklarade han lösningarna ett steg i taget. Om problemtypen hade behandlats tidigare, bad läraren en eller fler elever att förklara hur de löste problemet. När de gick igenom lösningarna arbetade eleverna med liknande problem i ca 10 minuter.

Läraren bad ett par elever att skriva sina lösningar på tavlan medan andra arbetade. Sedan avbröt läraren elevernas arbete och kontrollerade lösningarna. Eleverna skrev noggrant av alla genomgångar på tavlan i



sina anteckningsblock. Detta repeterades 2 eller 3 gånger under en lektion beroende på innehållets svårighetsgrad.

Under lektionen behandlades bara ett fåtal problem och en stor del av genomgången gick åt till diskussioner kring olika lösningar på ett enda problem. Relationer mellan uppgifterna och viktigt stoff som de redan lärt sig och som var användbart kommenterades flitigt. Eleverna var mycket engagerade under genomgången, men jag såg ingen elev som räckte upp handen spontant om inte läraren ställde frågor. För att träna upp färdigheter förväntas japanska elever arbeta mycket utanför lektionerna hemma och i kvällsskola.

Elevernas styrkor och svagheter vid problemlösning

Japan

Japanska elever var genomgående duktiga på att förklara sina resonemang med matematiskt korrekt språk, både muntligt och skriftligt. Detta beror naturligtvis på att de hade tränat upp sig genom åren via diskussioner under lektionerna. Man kan se att eleverna försökte använda alla verktyg de kände till för att lösa problemen och det var stora variationer i lösningarna, tack vare att eleverna hade fått välplanerade och välorganiserade lektioner genom åren.

I Japan görs ämnesplaneringar i samarbete mellan alla ämneslärarna i skolan. De har regelbundna möten för att förbättra undervisningen genom att diskutera konkreta lektioner, vilket kallas "Lesson Study". Ämneschefen i kommunen har huvudansvar för att se till att planering och samarbete fungerar i skolorna i kommunen.

Trots den välorganiserade undervisningen finns det en svag sida hos japanska elever. Flexibiliteten är mindre och de har svårt att tänka på andra sätt än de har lärt sig. Detta såg jag tydligt på lösningar till problem 1. De har aldrig behandlat del av med olika hela. Även de högpresterande eleverna saknade andra sätt än att söka gemensamma nämnaren.

I japansk matematikundervisning betraktas "att pröva sig fram" eller "sätta in konkreta tal" som icke-matematiska sätt och de förekom inte heller i min undersökning. Det är dags för japanska lärare att öppna ögonen för icke-traditionella problem och metoder, eftersom japanska elever har mycket bra matematiska förutsättningar.

Sverige

Svenska elever, speciellt högpresterande, var duktiga och påhittiga problemlösare, och detta antar jag berodde på att de var vana vid att arbeta på egen hand. Jag såg också att samarbetsförmågan hos svenska flickor var stor. Några flickor diskuterade och byggde

sina tankegångar med hjälp av varandra, medan pojarna föredrog att tänka enskilt även om de satt intill varandra. Eftersom eleverna är vana vid att arbeta mycket enskilt, finns det en stor risk för att de hittar på egna sätt att lösa problem utan relevanta matematiska resonemang.

Flera elever hade svårt att se matematiska samband, speciellt de lägre presterande eleverna. För dessa är varje uppgift en ny utmaning som de måste använda en ny taktik för att lösa, även om uppgifterna egentligen hade samma matematiska innehåll. När eleverna skulle förklara hur de tänkte var det många som inte klarade av att uttrycka sig ordentligt, varken skriftligt eller muntligt. Det är antagligen inte så konstigt eftersom de inte har haft så många möjligheter att öva på att diskutera sina tankegångar under lektionerna.

Svenska elevers svaghet att inte se matematiska samband mellan olika problem och olika matematiska moment beror mycket på att undervisningen inte är uppbyggd för detta, trots att det står i grundskolans kursplan att eleverna skall utveckla "sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande". Det är väsentligt att alla lärare planerar lektioner som ger eleverna en klar bild av hur alla matematikens olika delar hänger ihop.

Fler matematiklektioner i Japan från 2006

När jag besökte den japanska skolan kunde jag samtala med rektorn som var matematiklärare med magisterexamen. Jag nämner här litet om dagens situation i Japan, vilket jag inte skrev om i mitt examensarbete.

Japanska elever har alltid legat i topp på internationella undersökningar genom åren, men inte på PISA 2003 och TIMSS 2003. Då låg japanska elever på 6:e respektive 5:e plats. 2001 ändrade Monbu Kagaku Sho (motsvarande svenska Skolverket) läroplanen för högstadiet, och det blev mindre tid för de teoretiska ämnena. Istället ökade tiden för övergripande studier vars syfte var att elever skulle få mer projektarbete, vilket tog så mycket som en tredjedel av undervisningstiden. Som en konsekvens av detta, minskade antalet timmar för matematiklektioner, där elever kunde syssla med problem av undersökande karaktär eller med projektarbete inom matematik.

Det blev omfattande kritik från flera håll, och Monbu Kagaku Sho bestämde sommaren 2006 att öka tiden för de teoretiska ämnena och det skulle verkställas redan hösten 2006. Det blir intressant att se hur detta påverkar framtida matematikresultat för japanska elever.

LITTERATUR

- Helenius, O. (2007). Göran Emanuelssonstipendiet 2007. *Nämnanaren* 34(4), 22-23.
- Helmertz, T. (2007). *Problemlösning – en jämförelse mellan svensk och japansk undervisning*. Malmö: Malmö högskola.
- Sawada, T., m fl. (2001). *Chugaku Sugaku*. Tokyo: Kyoiku Shuppan K.K.
- Skoogh, L., m fl. (2001). *Möte med matte*. Stockholm: Liber.
- Skolverket. (2000). *Grundskolan – Kursplaner och betygsriterier 2000*. Stockholm: Skolverket.

Hela arbetet finns på webbadress luma.ncm.gu.se/?q=node/5