

Strukturerad problemlösning

– observationer från japanska klassrum

Hur ser den japanska matematikundervisningen ut i de tidiga skolåren? Två forskare har slagit ihop sina intressen och rest till Japan för att observera och skaffa intryck från klassrum. De beskriver här vad som kännetecknar det lärare och elever gör då problemlösning är utgångspunkten för undervisning i aritmetik. De belyser också de förutsättningar för lärande som kan uppstå när undervisningen utgår från strukturerad problemlösning.

Japanska elever har som bekant visat goda resultat i internationella studier. Matematikundervisningen i Japan har också fått uppmärksamhet i flera jämförande studier. Detta har väckt vår nyfikenhet för hur japansk matematikundervisning ser ut i de tidigare skolåren. I februari 2014 genomförde vi en studieresa till Tokyo och Sendai, en miljonstad vid kusten cirka trettio mil längre norrut. Under två veckor besökte vi fyra skolor och observerade ett flertal matematiklektioner i årskurserna 1–6 för att få svar på vår fråga. Men innan vi delar med oss av våra erfarenheter behövs en kort bakgrund.

I en tidigare artikel i *Nämnan* skriver Yoshinori Shimizu om "den japanska metoden", det vill säga att undervisa matematik genom att organisera en hel lektion kring ett fåtal problem där elevers egna Lösningsstrategier står i fokus. Shimizu har i sin artikel fokus på årskurserna 8–9 och uppmärksammar bland annat strävan efter många olika Lösningsstrategier, helklassdiskussion för att utveckla elevernas idéer samt effektiv användning av tavlan. Vi vill här följa upp Shimizus resonemang med att titta på matematikundervisningen i de tidigare årskurserna.

En utgångspunkt för vårt intresse när vi har studerat japanska matematikklassrum har varit Margareta Engvalls avhandling om matematikundervisning på lågstadiet. Studien beskriver lärares och elevers handlingar i några klassrum i årskurs 2–3 då lektionerna handlar om aritmetik. Det visar sig att procedurkunskap står i centrum för undervisningen i alla de studerade klassrummen medan matematiska begrepp ges uppmärksamhet endast i något av dem. I enstaka klassrum riktas också uppmärksamhet mot elevernas egna lösningar, men det leder sällan vidare till samtal med resten av klassen. Elevlösningarna ges begränsat utrymme och när en elev redovisat en lösning går ordet snabbt vidare till en annan elev som får presentera sin lösning på uppgiften. Av studien framgår att lärare och elever inte alltid möts i den matematiska kommunikationen utan talar förbi varandra.

Undervisningsmönster

Japanska lärare organiserar många av sina lektioner i helklass runt olika lösningar på ett fåtal problem som eleverna arbetar med. I *The teaching gap* jämför James Stigler och James Hiebert undervisningsmönster i japanska, tyska och amerikanska klassrum. I de japanska klassrummen presenteras ett genomgående lektionsmönster där läraren ser tillbaka på den föregående lektionen, presenterar dagens problem, låter eleverna arbeta individuellt eller i grupper, diskuterar lösningsmetoder gemensamt samt belyser och summerar de viktigaste punkterna.

Keiko Hinoo visar i en annan studie att japanska lärare i jämförelse med lärare i USA lägger större vikt vid att utveckla elevernas lösningsförslag och sammanfatta lektionerna. Enligt Hinoo fick problemlösning stor uppmärksamhet inom japansk forskning om matematikundervisning under 1980-talet. Det skedde även ett samarbete med forskare från andra länder, bland annat USA, Frankrike och Kina. I detta samarbete kom det typiska för japansk undervisning särskilt tydligt fram; att japanska lärare organiserar sin undervisning kring problemlösning. Detta mönster bekräftas av de videostudier om matematikundervisning som senare har genomförts i sju olika länder i samband med TIMSS-undersökningar.

Under vår resa observerade vi 18 lektioner i fyra olika skolor, alla i årskurserna 1–6. I de flesta av dessa klassrum fanns 28–32 elever tillsammans med en lärare. Vi samlade på oss foton, ljudinspelningar, observationsanteckningar samt några lärares lektionsplaneringar. Vi intervjuade lärare och skolledare, både individuellt och i grupp samt kopierade ur skolböcker, lärarhandledningar och annat undervisningsmaterial. Klassrumsbesöken ägde rum i februari då det japanska skolåret går mot sitt slut. Samtliga matematiklektioner utgick från ett problem som presenterades i början av lektionen.

Lektion i årskurs 2: Relationen addition – subtraktion

Följande problem användes som utgångspunkt för en lektion i årskurs 2. Denna lektion observerade vi vid tre tillfällen i klassrum på tre olika skolor.

Vi har en hög med rött papper och en hög med blått papper. Tillsammans är det 60 papper. 35 papper är röda och 25 papper är blå. Vi ska försöka illustrera detta i en figur!

Med denna lektion inleds ett kapitel i läroboken som behandlar relationen mellan addition och subtraktion. Under problembeskrivningen i läroboken finns följande figur tillsammans med en uppmaning:

Skriv passande tal i figuren nedan:

Det totala antalet papper ()

--

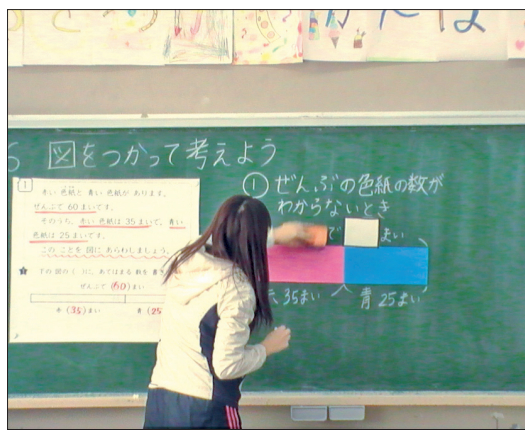
Antalet röda papper () Antalet blå papper ()

Inga tal är ifyllda i figuren. Problemet följs i boken av ytterligare fyra varianter, en där figuren har alla tal ifyllda och tre där ett tal saknas. Dessa figurer återkommer också i lärarens presentationer.

Fas 1: Problemet presenteras

Problemet som eleverna möter kommuniceras genom både text och bild. Ofta är det ett vardagsproblem som ska lösas. Vi noterade att det varierar mellan klassrummen hur läraren presenterar problemet. Eleverna möter det i skriftlig form, antingen på en poster kopierad från boken eller genom att läraren i samband med lektionsstarten själv skriver problemställningen på tavlan. Presentationen på tavlan kompletteras så småningom också med en illustration, motsvarande bokens, till exempel en skiss över röda och blå papper. Vi har även sett hur läraren visar problemet direkt från boken med hjälp av dokumentkamera. Läraren presenterar också problemet muntligt för eleverna som sedan läser uppgiften tyst för sig själva. Ibland läser hela klassen och läraren problemtexten högt tillsammans.

Eleverna uppmanas att beskriva hela eller delar av det presenterade problemet med egna ord för sina kamrater. I den här fasen skriver och ritar eleverna också den aktuella frågeställningen i sina egna räknehäften. Vi iakttog ett växelspel mellan lärarnas presentation, de muntliga och skriftliga uttrycken och samtalet mellan lärare och klass. Tavlan och elevernas anteckningshäften hade en central funktion. I klasserna som vi observerade tog denna problempresentation cirka 15 minuter. Vi upplevde lektionstempot som lugnt och eleverna gavs tid både att följa med i lärarens presentation och själva börja fundera över uppgiften.



Fas 2: Eleverna arbetar enskilt med problemet

Efter att ha stämt av om eleverna uppfattat problemet överläter läraren till eleverna att fundera över frågeställningen. Eleverna ges gott om tid att arbeta med problemet på egen hand. De skriver och räknar i sina anteckningshäften och beroende på uppgiften använder de olika strategier för att lösa problemet, till exempel rita en bild, göra en tabell, klippa och klistra eller att skriva med matematiskt symbolspråk.

Under tiden går läraren runt i klassrummet och iakttar hur eleverna går tillväga för att lösa problemet. Några elever är ganska snabbt klara. Det råder en lugn atmosfär och alla elever verkar ges tid att komma fram till en lösning. I årskurserna 1–3 arbetade eleverna enskilt med problemet men i årskurserna 4–6 såg vi även arbete i smågrupper.

Något som vi reagerade på var att läraren mycket sällan stannade upp hos enskilda elever för att hjälpa dem. Däremot verkade läraren noga observera elevernas lösningsvägar. Eleverna var fokuserade på arbetet med att lösa problemen och vi observerade bara någon enstaka gång att en elev på egen hand tog kontakt med läraren genom att till exempel räcka upp handen.



Fas 3: Helklassdiskussion

Samtalet i helklass tar sin utgångspunkt i elevernas olika lösningar och läraren uppmuntrar eleverna att komma med lösningsförslag. Då elever presenterar sina lösningar kan det ske på olika sätt, exempelvis muntligt då eleven står eller sitter vid sin egen plats, framme vid tavlan där eleven också skriver sin lösning eller genom att elevens bok visas via dokumentkamera. Eleven räcker upp handen för att visa att den vill presentera sitt lösningsförslag.

Läraren är redo för olika elevlösningar. Det visar sig bland annat genom att läraren redan innan lektionen har förberett material som kan användas för att illustrera olika strategier som eleverna kan förväntas använda. Genom iakttagelser under tiden som eleverna arbetar individuellt kan läraren välja ut vilka elever som ska få presentera olika lösningar. Under vissa av de lektioner vi observerade lät läraren eleverna redovisa sina lösningar med den mest elementära lösningen först och den till synes mest avancerade sist.

Förutom att redovisa sina lösningar uppmannas eleverna att också berätta varför de har valt en viss strategi. Läraren uppmuntrar till samtal mellan eleven som just redovisat sin lösning och resten av klassen. Även under den här fasen framgår det tydligt att eleverna ges tid att kommunicera sina tankar. Läraren uppmuntrar också elever att återge lösningar som presenterats av en annan elev. Genom att låta elever utveckla olika svar ges utrymme för ett antal olika resonemang.

Sammanfattningsvis uppmärksammade vi följande handlingar och hjälpmedel under denna fas:

Läraren

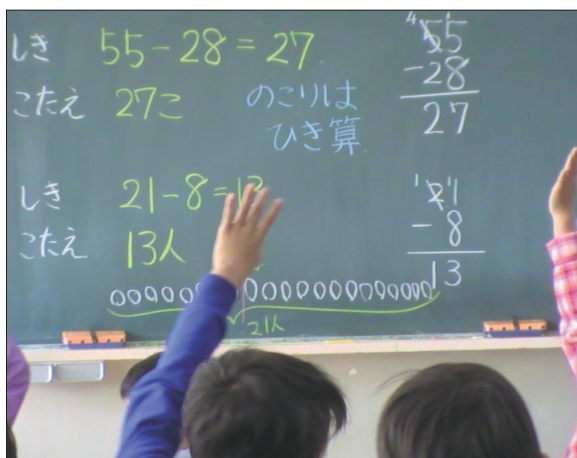
- ◇ låter elever presentera sina lösningar inför klassen och ger sitt aktiva stöd
- ◇ försäkrar sig om att elevgruppen förstår
- ◇ ber elever förklara det som andra elever tidigare har sagt
- ◇ illustrerar ibland elevers presenterade lösningar och räknestrategier på tavlan.

Eleverna

- ◇ presenterar sina lösningar stående vid sin bänk, vid tavlan eller via dokumentkamera
- ◇ lyssnar
- ◇ räcker upp handen
- ◇ förklarar med egna ord
- ◇ skriver av från tavlan.

Hjälpmedel

- ◇ tavlan, vita och färgade kriterier och linjal
- ◇ posterkopier från läroboken
- ◇ dokumentkamera
- ◇ material för att illustrera matematiskt innehåll i både uppgifter och möjliga elevsvar, oftast tillverkade av läraren
- ◇ skyltar eller återkommande symboler på tavlan som exempelvis *problemställning*, *uttryck* och *svar*.



Fas 4: Summering

Varje lektion avslutas med att läraren summerar undervisningens innehåll och de viktigaste lösningsstrategierna som har presenterats. Detta sker med hjälp av en tydlig tavelbild som har tillkommit, från vänster till höger, genom hela lektionen och där inget har suddats bort. Ibland finns här även de lösningar som eleverna har skrivit. Matematiska begrepp som summa och addition har en självklar plats i tavelbilden och vi noterade också att läraren satte upp färgade skyltar som signalerar *problemställning*, *uttryck* och *svar*. Dessutom formulerar och skriver läraren ofta en slutsats på tavlan. Eleverna lyssnar på läraren och skriver av slutsatsen i sina räkneböcker. I några klassrum lästes lösningarna upp gemensamt i kör.

Inramning av lektionen

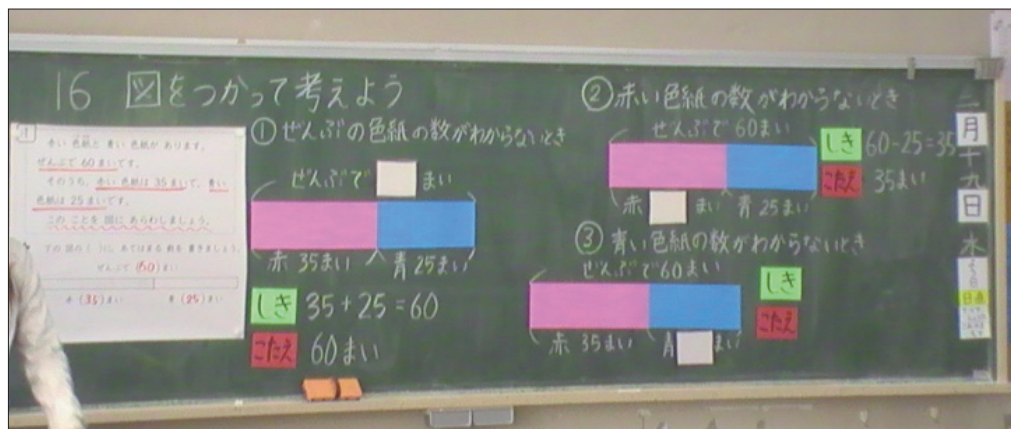
Lektionen föregås ofta av cirka fem minuters elevstyrda aktiviteter där läraren inte deltar men ändå är närvarande i klassrummet. Detta kan exempelvis vara samtal om vad eleverna har gjort under helgen. Övergången till matematiklektionen sker genom att en elev meddelar klassen att *nu börjar vi med matematikundervisningen*. Om det tidigare var livligt sker en snabb övergång till ett samlat lugn i klassrummet.

Den lektion som behandlar ett nytt kapitel i läroboken brukar inledas med en så kallad prolog där det kommande undervisningsinnehållet presenteras i bild och text för eleverna. Här kopplas det nya undervisningsinnehållet till vad eleverna tidigare har lärt sig.

Många av de lektioner som vi observerade avslutades direkt efter den summering som vi beskrivit, men vi har också sett några andra tillvägagångssätt. Ibland fortsatte eleverna med individuella övningar som anknöt till dagens lektionsinnehåll och under enstaka tillfällen genomfördes en självvärdering där eleverna fick skriva i loggböcker vad de ansåg att de hade lärt sig.

Slutsatser

De lektioner som vi observerade följde alla ett lektionsmönster med den återkommande tydliga lektionsstrukturen som har beskrivits i åtskilliga sammanhang. Denna tydliga struktur för lektionens genomförande framträder i själva tavelbilden där läraren under lektionen antecknar det väsentliga som behandlats utan att suddat ut något. När lektionen når sitt slut finns en strukturerad bild på tavlan som utgör lektionssammanfattningen.



Det vi särskilt vill lyfta fram i relation till de yngre elevernas undervisning är det lugna tempot som vi upplevde under lektionerna. Eleverna ges tid att fundera över sina lösningar. Här ser vi likheter med en svensk studie av Lisa Björklund Boistrup och Joakim Samuelsson som beskriver betydelsen av tystnader i matematikklassrummet. Då de individuella lösningarna uppmuntras blir eleverna också handledda i sin tankeprocess under helklassdiskussionen. Elevernas egna lösningar görs till undervisningsinnehåll för hela klassen.

Hur lärare i Japan möter eleven i den muntliga kommunikationen verkar stå i kontrast till Engvalls undersökning. Detta blir särskilt tydligt under helklassdiskussionen där elevernas strategier ägnas mycket tid och uppmärksamhet. Under våra observationer har vi noterat hur lärarna leder eleverna i att bli delaktiga i varandras tänkande. Detta sker inte bara genom att eleverna berättar hur de tänker, det vill säga presenterar ett lösningsförslag, utan också genom att de får förklara varför de har valt just den lösningsstrategin. Elever uppmuntras också att återge andras tankar med egna ord och ges därmed möjlighet att sätta sig in i någon annans resonemang. Elever som inte har kommit fram till någon egen lösning får ytterligare tillfälle att ta del av lösningar som redan har presenterats. Det kan vara värt att fundera över på vilket sätt svenska elevers kunskapsutveckling kan gynnas av ett förhållningssätt likt det japanska, där eleverna ges förutsättningar att förstå lösningsstrategier som andra elever i klassen kommit fram till.

Genom växlingen mellan å ena sidan elevens eget tänkande och å andra sidan elevens aktiva deltagande i klassrumsdiskussionen blir lektionens genomförande en strukturerad problemlösning, så som Toshiakira Fujii har beskrivit det. I sitt resonemang utgår han från att matematikundervisning kan ske på tre olika nivåer. Nivå 1 innebär att undervisningen är inriktad på förmedling av fakta och procedurer. På nivå 2 kan läraren förklara mer komplexa fenomen och idéer medan det typiska för undervisningen på nivå 3 är att eleverna ges förutsättningar att på egen hand upptäcka matematiska idéer som en följd av sitt eget tänkande. Lektioner med strukturerad problemlösning enligt den japanska modellen motsvarar enligt Fujii undervisning på nivå 3. Utöver detta vill vi även lyfta fram att själva lektionsupplägget med de fyra faserna som vi har beskrivit skapar en betydelsefull struktur som också medverkar till att den här formen av elevcentrerat lärande kan ske. Dessa lektioner syftar alltså, om vi följer Fujis resonemang, inte i första hand till att lösa ett problem. Tonvikten ligger snarare på att eleverna lär sig att *tänka matematiskt* genom att lösa problem. I ett svenskt sammanhang kan vi känna igen detta formulerat som en grund "för matematiska idéer att slå rot och växa" vilket Jan Wyndhamn, Eva Riesbeck och Jan Schoultz har beskrivit i *Problemlösning som metafor och praktik*. I en vidare bemärkelse innebär det att elever ges möjlighet att utvecklas till självständiga tänkande individer. Ett sätt att nå dit är att lärare genom strukturerad problemlösning skapar utrymme för matematiska samtal som hjälper eleverna att utveckla strategier och matematiska resonemang.

Författarna vill rikta ett särskilt tack till Chie Nakazawa, Tokyo Gakugei University och Kazuki Nishiura, Miyagi Gakuin Women's University för hjälp med kontakt till skolorna samt till Japanstiftelsen och Linköpings universitet för finansiellt stöd.

LITTERATUR

- Björklund Boistrup, L. & Samuelsson, J. (2013). *Betydelsen av tystnad. Aktionsforskning om bedömning i matematik i Linköping HT 2012*. Utbildningskontoret Linköping kommun.
- Bengtsson, Bertilsson, Grundström, Järnstråt, Samuelsson & Björklund Boistrup (2013). Tystnad – ett didaktiskt verktyg i matematikundervisningen. *Nämnan* 2013:2.
- Engvall, M. (2013). *Handlingar i matematikklassrummet: En studie av undervisningsverksamheter på lågstadiet då räknemetoder för addition och subtraktion är i fokus*. Diss. Linköpings universitet.
- Fujii, T. (2014). Implementing Japanese Lesson Study in Foreign Countries: Misconceptions Revealed. *Mathematics Teacher Education and Development*. Vol 16, No 1 (SPECIAL ISSUE Japanese Lesson Study: A model for whole-school teacher professional learning) 65-83.
- Shimizu, Y. (2013). Flera lösningar på ett problem – den japanska metoden. *Nämnan* 2013:4.
- Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap. Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.
- Wyndhamn, J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Linköpings universitet, Institutionen för tillämpad lärarkunskap.

Övriga referenser finner du på Nämnan på nätet.



I detta nummer är Problemavdelningen i miniformat. Karaktären på just dessa problemen är att de förutsätter mer fantasi och logiskt tänkande än rent matematiska kunskaper. Våga därför prova problemen med elever i olika åldrar och på olika kunskapsnivåer. Lösningar och svar finner du på sidan 52.

- 4218 Någon gång i november varje år är natten fem timmar längre än dagen.
Hur lång är natten då?
- 4219 Två flickor samtalar.
– Jag är 11 år, hur gammal är du?
– För två dagar sedan var jag 9 år och nästa år blir jag 12 år.
När utspelade sig samtalet?
- 4220 Elvira och Olivia är lika som bär. De har samma mor och far, samt är födda på samma plats med bara minuters mellanrum. Trots detta är de inte tvillingar – hur förklarar du det?
- 4221 Vilka är felen i följande mening?
I det här meningen finns tre fel.
- 4222 En fiskare tillfrågades hur många fiskar han fångat.
– Om det varit fem gånger fler än i verkligheten hade jag haft lika många fler än 99 som jag nu har färre än 99.
Hur många fiskar hade fiskaren fångat?
- 4223 Ett kvadratisk fönster är exakt en meter högt och en meter brett. Vid en ombyggnad görs fönstrets area dubbelt så stor, men det är fortfarande exakt en meter högt och en meter brett. Hur kan det hänga ihop?
- 4224 Hur många liter jord innehåller en grop som har formen av ett rätblock med längden en meter, bredden fem decimeter och djupet tre decimeter?

Johan Häggström