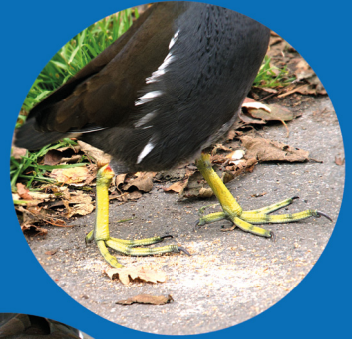




Blå strävvor

– *matematik i många små steg*

Förord

Ett bra material kan både återanvändas och utvecklas vidare. I förarbetet till Matematiklyftetets båda moduler *Didaktiska perspektiv på matematikundervisningen* för lärare i särskolans skolformer blev vi också uppmärksammade på många goda undervisningsidéer och material som vi inte kunde använda i modulararbetet. Främsta orsaken var att Matematiklyftet handlar om lärares lärande och det vi då lade åt sidan var innehåll tydligt riktat mot elevers lärande.

Tidigt föddes idén om att göra något mer av dessa undervisningsidéer och eftersom NCM sedan länge har webbtjänsten *Strävorna* används den plattformen i det fortsatta arbetet. För att minimera omfattningen av text på aktiviteternas lärarsidor, och undvika allt för många upprepningar, föll det sig naturligt att samla faktatexter om matematikinnehållet för sig, det vill säga i det som blivit detta häfte.

Texterna skrevs ursprungligen och huvudsakligen av Berit Bergius, Åse Hansson och Lena Trygg och med inspel från kollegorna på NCM.

Häftets titel *Blå strävor – matematik i många små steg* kan behöva en förklaring. Elevsidorna i en aktivitet i *Strävorna* har oftast en grön rand längst upp, men i aktiviteter som i första hand är avsedda för elever i särskolans skolformer är randen istället blå. Dessa aktiviteter kan passa för alla elever som behöver möta matematikinnehållet i många små steg och med lagom stor variation.

NCM
Göteborgs universitet
Box 160
405 30 Göteborg

Beställning:
bestallning@ncm.gu.se
ncm.gu.se/bestallning

© 2016 NCM
ISBN 978-91-85143-31-3
Upplaga 1:1

Foto: Günther Dippe
Redaktör: Lena Trygg

Inledning

Detta häfte vänder sig till lärare som undervisar matematik i särskolans skolformer, bedriver specialundervisning i grundskolan eller undervisar andra elever som också behöver möta matematikinnehåll i små steg och med variation för att deras lust att lära matematik ska bibehållas och ökas.

Till modulerna i *Matematiklyftet* arbetades det fram uppskattat matematikdidaktisk material för kollegialt lärande. Ett urval av det material som vänder sig till lärare i särskolans skolformer finns här samlat, bearbetat och utvecklat. Den främsta anledningen till att detta häfte har sammanställts är möjligheten att komplettera med material riktat direkt till eleverna. Många lärare i särskolans skolformer påtalar att de lägger mycket tid på att ta fram och anpassa undervisningsmaterial, dels för att det ska passa elevgrupper med mycket stor kunskapsspridning och skilda möjligheter, dels för att matematikläroböckerna "tar slut för fort". Vad gäller sistnämnda handlar det framförallt om att eleverna behöver arbeta med samma innehåll under lång tid och med små utvecklingssteg – samtidigt som eleverna ska uppleva variation och att de lär sig något nytt.

Matematikundervisningen i särskolans skolformer ser inte ut på något radikalt annorlunda sätt än undervisningen i grundskolan. Elever lär sig generellt sett på samma sätt men i olika takt. Det gör att material framtaget med särskolans skolformer i åtanke också passar flera andra elevgrupper. Förhoppningen är att detta häfte även ska vara användbart i specialundervisning. Troligen finns det delar som även passar elever i ordinarie undervisning och kanske kan vissa delar passa för nyanlända elevers matematikundervisning.

För att praktiskt hantera elevmaterial där innehållet går framåt i långsam takt organiseras det i Strävorna på NCM:s webbplats. Om du inte redan är bekant med Strävorna bör du starta med att läsa om dem på ncm.gu.se/stravorna.

Samband mellan häfte och aktivitet

I Matematiklyftets moduler finns förslag på lektionsaktiviteter och discussionsfrågor i moment A–D. Förslagen på lektionsaktiviteter utvecklas till lärarsidor på Strävorna och kompletteras med arbetsblad för eleverna, i möjligaste mån även som skrivbara pdf:er. För att ämnesinnehållet på Strävornas lärarsidor ska framgå tydligt och begripligt rekommenderas en parallell läsning med texterna i detta häfte första gången en aktivitet används.

I denna bearbetning av modultexterna har direkta kopplingar till kurs- och ämnesplaner för särskolans skolformer tagits bort men styrdokumentens intentioner kvarstår.

Laborativt arbetssätt

Det finns flera röda trådar genom modulerna för sarskolans skolformer. En är det laborativa arbetssättet. I Skolverksrapport 368 *Matematik i grundsarskolan* beskrivs i den avslutande diskussionen: "Utvärderingen tyder vidare på att man använder många laborativa och konkreta material, både färdigproducerade och tillverkade av lärarna själva. Men det saknas en systematisk analys av materialen och deras användning i relation till förutsättningar att utveckla matematisk kompetens."

Om laborativt matematikmaterial används och steget över till abstrakt och symbolisk matematik tas utan nödvändiga mellansteg kan det laborativa arbetet snarare bli förvirrande än stödjande för eleven.

Ett laborativt arbetssätt jämförs ibland med ett konkretiserande arbetssätt. I ett *laborativt arbetssätt* kan alla elever delta och undervisningen startar på den nivå där eleverna befinner sig. Ifall området är helt nytt för eleverna kan de starta med den informella förståelse de har, men alla måste inte alltid börja med konkret arbete. Finns förkunskaper kan eleven gå direkt till ett mer generellt och abstrakt steg. Eleverna kan sedan stanna olika länge på de skilda stegen när de i egen takt, både enskilt och tillsammans med andra, arbetar sig vidare till den helt abstrakta nivån.

Ett *konkretiserande arbetssätt* innebär en omvänd arbetsgång. Alla elever startar samtidigt i den formella och abstrakta (skol-)matematiken. För de elever som uppvisar svårigheter får läraren arrangera ett konkretiserande innehåll, vilket i praktiken ofta betyder att dessa elever får använda laborativa material medan övriga elever fortsätter på den abstrakta nivån.

Aktiviteter steg för steg

Till vardags säger vi ofta "*från* det konkreta *till* det abstrakta". Så är det många gånger, eleverna startar i arbete med konkret material och fortsätter sedan till allt mer abstrakt och generell förståelse, men vi bör även hålla öppet för den andra riktningen.



Att konkretisera och åskådliggöra ett abstrakt och generellt matematiskt uttryck är i regel betydligt mer utmanande, för såväl lärare som elever, än att följa en arbetsgång från det konkreta till det abstrakta. Vilken riktning vi än väljer är det ändå vad som händer *mellan* dessa båda ytterligheter som är det mest avgörande för att det ska uppstå en möjlighet för eleven att lära. En laborativ aktivitet bygger i huvudsak på tre steg:

1. gemensam introduktion
2. laborativt arbete
3. gemensam uppföljning och diskussion.

Steg 1, gemensam introduktion, innebär att elever får en inblick i vad som ska hända eller vad de ska göra. Introduktionen ska skapa förväntan och nyfikenhet och bör även resa frågor som motiverar eleverna att undersöka såväl material som aktivitet och vad arbetet kan leda till. Därmed inte sagt att läraren redan på detta steg behöver berätta vad som ska hända eller vad eleverna förväntas lära sig.

Steg 2, laborativt arbete, kan ske enskilt, i par, i grupp eller i helklass. I praktiken blir det vanligtvis en kombination. Detta steg kan många gånger vara det som är enklast för läraren att planera då det finns detaljerade beskrivningar i böcker, pärmar och på webben. Eleverna ska inte enbart arbeta praktiskt med konkret material, de ska även ges möjlighet att arbeta halvkonkret, halvabstrakt och abstrakt, se nedan.

Steg 3, gemensam uppföljning och diskussion, har visat sig vara ett mycket kritiskt steg. Om eleverna enbart plockar iordning efter sig i slutet av steg 2 är risken stor att aktiviteten mest får karaktär av "görande". När läraren istället avslutar en aktivitet genomtänkt med ett uppföljande samtal finns möjlighet att förstärka inläringen och undanröja missuppfattningar. Genom att jämföra begreppsuppfattningar och Lösningsstrategier kan elever också "byta upp sig" till effektivare tankesätt.

Fyra nivåer

Ett sätt att beskriva och göra elever medvetna om vad som händer på vägen mellan konkret och abstrakt är att tydligt arbeta med nivåerna halvkonkret och halvabstrakt. Det kan exemplifieras på följande sätt:

Konkret: Arbete med fysiskt material som kan hanteras manuellt. Sakerna kan vändas och vridas, de går att uppleva med flera sinnen. På denna nivå kan det laborativa materialet fylla en funktion för att åskådliggöra något abstrakt eller för att underlätta vid beräkningar, problemlösning eller undersökningar. Det talade ordet är viktigt när både lärare och elever formulerar det som sker.

Halvkonkret: Första steget för att lämna den helt konkreta nivån är att använda bilder. Dessa kan vara elevernas egna naturtrogna teckningar (är det en cykel ska det synas att det är en cykel), men lika gärna fotografier eller andra illustrationer som exempelvis memorykort. Det finns elever som tycker så mycket om att rita och måla att de fastnar i det och helt missar matematiklärandet, andra elever ogillar att teckna och vill slippa det på matematiklektionerna. Läraren måste avgöra när det är dags för elever att ta nästa steg eller att hitta alternativ.

Halvabstrakt: Eleverna lämnar sina föreställande bilder till förmån för egna informella symboler. Cyklarna som tidigare har ritats omsorgsfullt med hjul, styre och pedaler kan nu ersättas av en ruta eller ett streck. Det viktigaste är att eleverna själva vet vad valda symboler representerar.

Abstrakt: Eleverna går från sina egna informella symboler till den formella matematiken med siffror, andra symboler, räknelagar och regler. Förhoppningsvis har eleverna då med sig en förståelse för vad de formella uttrycken står för. I annat fall finns det möjlighet för dem att gå tillbaka både i sina dokumentationer och i sina tankar för att se varifrån ett formellt uttryck härstammar.

Dessa fyra nivåer har inga vattentäta skott mellan sig. Naturligtvis kan eleverna använda laborativa material eller bilder som stöd för tanken på senare nivåer. Det finns åtminstone två betydelsefulla aspekter att uppmärksamma. Dels måste de mellanliggande stegen få ta tid. För den vuxne som redan behärskar ett matematiskt innehåll eller begrepp är det lätt att bli lite otålig och skynda på eleverna för mycket. Dels är det nödvändigt att se till att undervisningen (eller enskilda elever) inte fastnar på den konkreta nivån – för att vid ett senare tillfälle ta ett obegripligt skutt direkt till den abstrakta nivån. I båda fallen

kan det resultera i att det laborativa arbetet enbart har blivit ett tidsödande "görande" som inte fyller någon verklig funktion för elevernas lärande.

Arbets sättet både kan och bör varieras. De fyra nivåerna kan ses som olika matematiska uttrycksformer där eleverna använder material, bilder, ord, informella och formella symboler. Ett alternativ är att arbeta med uttrycksformer i en ordning som antingen läraren eller eleverna själva bestämmer.

Elevers dokumentation

En anledning till varför elever ska dokumentera är att det laborativa arbetet annars lätt kan bli osynligt. När materialet är bortplockat "finns inget kvar" om ingen form av dokumentation har gjorts. Då kan till och med en ifylld sida i en traditionell lärobok vara mer konkret. Elevers dokumentation kan göras med stor variation. Ett enkelt sätt är att fotografera under pågående arbete och sedan sätta text till. Dagens teknik kan verkligen underlätta oavsett om det är eleven själv eller läraren som skriver, eller om texten talas in. Olika former av dokumentation kan hjälpa elever att utveckla begrepp steg för steg, att se likheter och skillnader mellan olika begrepp, att tydliggöra vad de kan före och efter ett arbetsområde, att låta dem fundera på vad som är respektive inte är en specifik geometrisk figur, att utveckla ett vardagligt språk mot ett allt mer matematiskt språk, etc.

När dessa dokumentationer är sparade finns möjligheter att även använda dem till analys och bedömning. Eleven, läraren och föräldrar kan se vad eleven har arbetat med och vilken utveckling som har skett. Elevdokumentationerna ger också läraren tillfälle att upptäcka missuppfattningar i ett tidigt skede.

IKT

Det finns all anledning att ta hjälp av de digitala hjälpmedel som finns idag, men ersätt inte direkt det fysiska, konkreta materialet med digitala varianter. Låt alla elever (som har fysiska och finmotoriska möjligheter) först bekanta sig med de konkreta föremålen. Sedan finns det oändliga möjligheter med de digitala hjälpmedlen, kanske främst för arbete på de halvkonkreta och halvabstrakta nivåerna samt för elevernas dokumentation.

Några förtydliganden

I detta häfte finns ingen litteraturlista. Förekommande referenser och andra hänvisningar till exempelvis inspirationslitteratur finns samlade på en webbsida, se http://ncm.gu.se/media/ncm/dokument/bla_stravor_littlista.pdf

Ett urval har som sagt gjorts i arbetet med häftet så att det i första hand finns texter som kompletterar elevaktiviteter i Strävorna. Jämfört med de olika skolformernas kurs- och ämnesplaner i matematik finns därför inte alla matematikområden med. Exempelvis saknas texter om vinklar och algebra, och några områden som tal i procent- och bråkform berörs enbart ytterst översiktligt.

Alla avsnitt avslutas med *Att fundera över*. I rutan finns några förslag på frågor att reflektera över på egen hand eller att diskutera med kollegor.

Att fundera över

- ♦ Vill du fördjupa dig i ett laborativt arbetssätt? Det finns mer utförligt beskrivet i boken *Matematikverkstad – en handledning för laborativ matematikundervisning*.

Nyfikenhet, lust och fantasi

Nyfikenhet, lust och fantasi är starka drivkrafter för den som vill lära sig något. Kreativitet är en viktig förmåga för att kunna lösa matematikproblem, samtidigt kan stimulerande matematikaktiviteter användas för att skapa nyfikenhet och utveckla fantasin på ett lustfyllt sätt.

Utforskande, nyfikenhet och lust att lära ska utgöra grund för skolans verksamhet. Undervisningen ska stimulera kreativitet och självförtroende så att eleven kan använda och utveckla hela sin förmåga. Ett mål är att varje elev kan lära, utforska och arbeta både självständigt och tillsammans med andra. Nyfikenhet är en mental egenskap som ger impulser till ett utforskande beteende och lärande, en inre vilja att veta. Lust är en känsla som präglas av en stark längtan efter något som ger stor tillfredsställelse och är förknippad med både kroppslig njutning och intellektuell stimulans. Det spontana lärandet hos människan kännetecknas av dessa begrepp, som båda ligger nära det vi kallar fantasi.

Redan små barn drivs av nyfikenhet och en inre lust att utforska och förstå sin omvärld. De börjar tidigt ta reda på vad som döljer sig bortom det som finns framför ögonen, det uppenbara. Underförstått finns frågor om vad som finns i, ovanför, under och bakom. *Vad händer om ...?* De skaffar sig erfarenheter som bygger en inre intuitiv förståelse. Vuxna, och andra barn, uppmärksammar dem på det som finns runt omkring. De utmanar barnens nyfikenhet och spontana utforskande genom att visa på företeelser som de ännu inte själva skulle upptäcka och pratar om det som uppmärksammas. Språk och begrepp utvecklas i interaktion med andra människor och omgivning. Lev Vygotskij betonar vikten av att utmana nyfikenheten. Han menar att lärandet utmanas mest effektivt genom att man löser uppgifter tillsammans med någon som kan mer och där innehållet ligger i den lärandes utvecklingszon. "Det jag klarar tillsammans med någon annan idag, klarar jag på egen hand i morgon."

Att fantisera och föreställa sig

För att hitta lösningar på såväl vardagliga som matematiska problem behöver vi använda vår fantasi. Ordet fantasi kommer ur grekiskans *phantasia*, som betyder 'synligblivning', 'anblick', 'föreställning'. *Nationalencyklopedin* beskriver fantasin som nyckeln till ny utveckling i sinnet och att den utvecklas i samspillet med andra. Fantasin hjälper till att ge mening åt upplevelser och förståelse för kunskap, att skapa inre bilder, känslor och föreställningar. Den synen utgår bland annat från Vygotskij's tankar:

Fantasins skapande aktivitet är direkt avhängig av rikedom och mångfalden i människans tidigare erfarenheter, eftersom dessa erfarenheter utgör det material som fantasikonstruktionerna byggs av. Ju rikare en människas erfarenheter är desto mer material förfogar hennes fantasi över.

(Fantasi och kreativitet i barndomen, s 19)

Att fantisera och föreställa sig handlar enligt Sven-Erik Liedman, professor emeritus i idé- och lärdoms historia, om förmågan att skapa distans till det närvarande och närhet till det frånvarande. Fantasins betydelse för att lära matematik är framskriven av exempelvis matematikern Augustus de Morgan, som lär ha sagt att fantasin är den främsta drivkraften bakom matematiska framsteg. Fantasin är intimt förknippad med kreativitet.

Mot bakgrund av fantasins betydelse är det rimligt att fråga sig hur förmågan att fantisera uppstår. Är den medfödd? Kan vi påverka den, ge den spelrum och optimal utveckling? Vygotskij menar att fantasin är beroende av individuella erfarenheter, vilket talar för att fantasin inte är medfödd. Sannolikt finns möjligheten att utveckla förmågan hos alla. För att det ska ske behövs erfarenheter, stimulans och utmaningar i en omgivning med tilltro till såväl barns som ungdomars och vuxnas möjligheter.

Sedan urminnes tider har människor samlats och berättat för varandra. Kunskap, sagor och myter har överförts från äldre generationer till yngre genom muntlig tradition. Det talade språket har i samverkan med gester och miner fånglat lyssnare. Berättelser har haft övernaturliga inslag. Skogsrår, näcken, troll och underjordiska väsen har utgjort förklaringar till obegripliga företeelser och händelser. Genom berättelserna har lyssnarna skapat inre bilder, men också själva funderat och fantiserat vidare kring händelser och utseenden. Nutidens barn och unga fascinerar av fantasygenren, som präglas av övernaturliga och magiska företeelser och med väsen som växlar skepnader för att luras och överraska. Inträde till dessa världar går till exempel genom magiska dörrar eller överraskande hål. Berättelsens hjälte, som läsaren / lyssnaren ofta identifierar sig med, har i uppdrag att leta reda på något eller någon, lösa olika problem eller ta sig förbi hinder. I böcker, serier, filmer och datorspel engageras människor av dessa fantasivärldar. I fantasin finns inga begränsningar, allt är möjligt. Naturlagar, sociala eller ekonomiska begränsningar som styr i verkligheten upphör.

En av de viktigaste delarna för utveckling av intellektet är alltså förmågan att föreställa sig och att fantisera. Det är därför viktigt att ge elever rika tillfällen för att träna. När rationella och logiska förmågor kombineras med fantasi berörs eleven på ett djupare plan. Det har visat sig att när elever får utmaningar, genomför uppdrag och löser uppgifter åt en figur i en fantasikontext, dvs då de tar någon annans perspektiv, frigörs energi och risken att misslyckas flyttas över på den som äger problemet, fantasifiguren, och det egna självförtroendet exponeras mindre. Fantasin aktiveras när eleverna berättar om figurens eller sina egna drömmar och önskningar. Läraren kan utmana eleverna att beskriva allt fler detaljer med olika uttrycksformer. Utan stimulans, adekvata utmaningar och aktivt arbete utvecklas vare sig intellekt eller fantasi. Svenska styrdokument beskriver matematisk verksamhet som en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet. I problemlösningen blir frågor som *Varför? Hur kommer det sig att...?* och *Vad händer om...?* naturliga att ställa och enklare att besvara med hjälp av fantasins kraft.

Spel – en matematisk aktivitet

Forskaren Alan Bishop ser matematik som en kulturyttring som utvecklas ur olika aktiviteter vilka är gemensamma för många olika kulturer. Han beskriver intressanta likheter i mänskliga aktiviteter i geografiskt och historiskt skilda

grupper, aktiviteter vilka kan betraktas som rötter till matematiskt tänkande och motsvarande utveckling av språk. Genom historien har matematik haft stor betydelse för exempelvis handel och för utveckling av naturvetenskap och teknik. Bishop menar att matematikutbildningen kanske har kopplats alltför starkt till dessa områden. Matematik är en betydelsefull del i människors liv, såsom arkitektur, konst, drama, litteratur, rytm, rörelse, språk och bild. Han argumenterar därför starkt för att matematikutbildningen i högre grad borde titta mer på de kulturella aspekterna av matematik istället för de mer tekniska.

Matematiska aktiviteter, som spel av olika slag, har ofta en social dimension. De genomförs i samverkan och dialog eller i tävlingssammanhang där de tävlande försöker överglänsa varandra i strategier, snabbhet eller mental styrka. Mänskligheten har utvecklat förutsättningar och strategier samt enats om regler och undantag att förhålla sig till, bland annat något så vanligt förekommande som turtagning. Det finns bestämmelser och regler om i vilken ordning man ska göra olika saker, vem som ska börja, vad som händer om en deltagare gör fel och så vidare. Överenskommelser betraktas ibland som absoluta sanningar och i matematiken finns många sådana exempel. Eftersom dessa regler finns kan aktiviteter ofta starta direkt när deltagarna bestämt sig för vad de vill göra. De behöver inte hamna i konflikt när något går fel, istället kan de vända sig till regelverk eller manualer. I spelliknande aktiviteter rör sig deltagarna i en fiktiv värld, ofta med likheter i det vardagliga livet, men där deltagarna kan "ta ut svängarna" och reflektera över och pröva vad som händer utan att behöva hantera konsekvenser i verkligheten. Bishop menar att detta kan vara roten till hypotetiskt tänkande; om ... så ...

Matematiken är en lek

I *Introduktion till matematiken* beskrivs matematikämnet av Tord Ganelius, professor emeritus i matematik:

Matematiken är en lek. Många kanske skulle säga att matematiken är ett spel, men det är inte riktigt lika bra som beskrivning. Det finns så mycket annat här i världen som kallas för spel eller som betraktas som spel av många människor... Att det nu är av intresse att hävda att matematiken är en lek sammanhänger med att det är så få som vet det... Och matematiken är alltså en lek, och det måste man förstå, om man på ett givande och naturligt sätt ska kunna närma sig den.
(s 9)

Metaforen "matematiken är en lek" är en kraftfull idé att tillvarata i undervisningen. Lekar och spel fungerar som modell för verkligheten, har en struktur, engagerar en, två eller flera deltagare och har logiska regler som måste hanteras tydligt och klart. Att förutsäga och ställa hypoteser är en viktig del i spel och lekar, liksom i matematiken. Gåtor, paradoxer och andra tankelekar har stor betydelse för utvecklingen av matematiskt tänkande.

Matematiken, denna lek med tecken, kan alltså fungera som språk i högst varierade sammanhang, och det torde i dagens läge vara få vetenskaper och aktiviteter som lyckats hålla sig obefläckade av matematikens symbolism.

(s 10)

Ganelius utvecklar sin idé och menar att det som av många betraktas som självklara sanningar, inte är något annat än från början fritt valda regler för lek

med tecken. Matematiker har i sin nyfikna lek, eller om vi föredrar att kalla det forskning, frågat sig "Vad händer om ...?". De har skrivit hypoteser, undersökt och fått fram resultat. Hypoteser har bekräftats eller förkastats. Forskare inom olika vetenskaper har enskilt och i samverkan valt att formulera regler utifrån vad de har kommit fram till. Filosofen och matematikdidaktikern Lars Mouwitz menar att avståndet mellan det lilla barnets nyfikna erövrande av världen och matematikprofessorns lika nyfikna erövrande av den matematiska begreppsvärlden kanske inte är så stort.

Lek karakteriseras av hypotetiskt tänkande där det finns likheter med verkligheten. Jag låtsas att "jag är en häst", "bladet är en kaka" eller "sängen är en båt". I verkligheten kan hästar inte klättra i träd, men i fantasin är det möjligt. Blad och kakor är inte utbytbara i verkligheten, men i fantasin, på låtsas, går det och jag kan låtsas äta "kakan". I leken får fantasin fritt spelrum eftersom verklighetens begränsningar inte finns. Deltagarna bestämmer vad som gäller, vilka regler de har att förhålla sig till och hur de ska hantera avvikelser från dem. Det som varit tillfälliga överenskommelser i en lek, har i olika sammanhang formaliserats i regler. Leken har bytt skepnad och blivit ett spel.

Som Ganelius skriver har många matematiska "sanningar" tillkommit genom kreativt och undersökande arbete där fantasin varit en förutsättning. För att lära matematik är fantasin både en bundsförvant och en förutsättning. I och genom fantasin kan eleven tänja gränser och skapa nytt kunnande. Bishop pekar också på intressanta likheter mellan vad som kännetecknar leken och det som är utmärkande för matematiken, där en kort sammanfattning är följande:

- ♦ att föreställa sig, att låtsas, är att tänka hypotetiskt och en början till abstrakt tänkande
- ♦ att föreställa sig vad som kan hända, att gissa och uppskatta är också en början på abstrakt tänkande
- ♦ att använda drag från verkligheten har med matematisk modellering att göra
- ♦ att formulera och tillämpa regler, kriterier och procedurer och att hantera "överträdelser" från det man kommit överens om i leken motsvarar hur matematikregler formuleras och tillämpas
- ♦ att undersöka och utforska företeelser i olika sammanhang karaktäriserar problemlösning.

Att fundera över

- ♦ Hur kan elevers fantasi ta sig uttryck på matematiklektioner?
- ♦ Vilka slags matematikaktiviteter kan hjälpa elever att utveckla sin fantasi?
- ♦ Ge exempel på konkreta aktiviteter, kanske rast- eller fritidsaktiviteter, som brukar engagera elever. Hur kan dessa utvecklas för att ge eleverna möjlighet till ett abstrakt kunnande i matematik?

Problemlösning

Elever ska ges förutsättningar att utveckla kunskaper kring val av strategier, metoder och verktyg som kan användas vid matematisk problemlösning i vardagliga situationer, i skolarbetet och på sikt även i yrkeslivet.

I undervisningen ska elever få möjlighet att utveckla sin förståelse av matematiska begrepp, få tilltro till sin förmåga att handskas med olika problem och stimuleras till nyfikenhet att söka ny kunskap. För att ge eleverna dessa förutsättningar för att utveckla sin problemlösningsförmåga, behöver undervisningen belysa matematikens användning i vardagen och ge eleverna möjlighet att använda matematik i olika sammanhang.

Forskare inom det matematikdidaktiska fältet lyfter fram skilda avsikter och förtjänster med problemlösning i matematikundervisningen. Det kan vara ett medel för att lära nya matematiska begrepp och färdigheter, att utveckla och tillämpa andra matematiska kompetenser och det kan också användas för att relatera den abstrakta matematiken till elevens vardagserfarenheter. Genom stimulerande problemlösning kan elever många gånger engagera sig i mer kognitivt krävande uppgifter än vad de annars skulle ha gjort.

Vad är ett problem?

Om en elev söker lösningen till en uppgift och till en början inte har en given metod att använda, och om uppgiften dessutom förutsätter eller stimulerar ett engagemang från elevens sida, då kan man kalla det för problemlösning. Med detta synsätt är inte det avgörande om en uppgift innehåller text eller ej. En uppgift med text kan mycket väl vara en rutinuppgift där metoderna är kända av eleven och likaså kan en uppgift med endast matematiska symboler utgöra ett stort problem om inte eleven är bekant med det aktuella matematikområdet. Om eleven exempelvis inte tidigare har arbetat med innehållsdivision kan det vara ett problem att lösa uppgiften *Hur många kan dela på tre pizzor om var och en ska få en halv pizza?* och för andra elever kan det vara en enkel rutinuppgift. För elever som inte förstått likhetstecknets betydelse kan det vara ett problem att lösa uppgiften $x - 2 = 10 + 3$, medan andra hanterar det som en rutinuppgift. För några kan det vara ett problem att identifiera likheter mellan några olika tvådimensionella geometriska figurer, medan det för andra elever inte alls är ett problem.

Gemensamt för problem är att eleverna uppmanas att ta reda på något utifrån givna omständigheter. Ibland finns alla omständigheter presenterade för eleverna, ibland ska de själva söka rätt på eller skapa vissa av dem. Det kan exempelvis handla om att tillfoga uppgifter som är utelämnade i texten, vilket man brukar kalla för – mer eller mindre – öppna problem. Om det finns flera tänkbara lösningar till ett problem betraktas det också som öppet. Då vi fortsättningsvis talar om problem utgår vi ifrån definitionen ovan där det framhålls att uppgiften också ska stimulera ett engagemang från elevens sida för att kallas problem.

Hur kan vi arbeta med problemlösning?

Lärarens roll vid problemlösning är att organisera, förbereda, stimulera och undervisa, men också att handleda eleverna i deras arbete med att lösa problemet. En sådan problemlösande kultur präglas av att aktiviteterna huvudsakligen liknar naturliga situationer där elever känner igen sig och vill lösa problemet. Detta stimulerar motivationen och förståelsen för hur kunskapen senare kan användas utanför skolan.

Eleverna ska kunna relatera till tidigare kunskaper och erfarenheter när de tolkar problemet. De ska också kunna samtala och diskutera med sina kamrater för att beskriva och förklara olika situationer. Problemet bör vara utformat så att det stimulerar användning av både vardagligt språk och ett mer utvecklat matematikspråk. Tidigare kunskaper och begreppsuppfattningar ska utmanas på ett stimulerande och engagerande sätt. Den franske professorn Guy Brousseau beskriver detta som att förutsättningarna för lärandet huvudsakligen ska likna naturliga situationer där eleverna ger sig hän åt problemlösning, inte i första hand för att lära sig matematik utan för att de faktiskt är intresserade av lösningen till problemet. I dessa problemlösningssituationer, där eleverna är motiverade och med intresse och engagemang söker efter lösningar, finns förutsättningar att skapa "egen" och djup förståelse för matematiken. Om i stället en lärare "förmedlar" samma matematikinnehåll riskerar kunskaperna att bli ytliga och svårare för eleven att använda i andra situationer.

Lösningen på problemet formuleras i interaktion mellan elever och lärare. Brousseau trycker på hur viktigt det är att inte betrakta elevers eventuella "felaktiga föreställningar" som misslyckanden. Däremot är det viktigt att läraren upptäcker dem, annars kan de komma att fungera som hinder för fortsatt kunskapsutveckling. När läraren formulerar nya problem måste dessa ge upphov till nya utmaningar så att eleverna själva upptäcker att de felaktiga föreställningarna inte längre håller. Läraren har därmed ett ansvar för att anpassa problemen till elevers förutsättningar.

Problemlösning kan alltså ha olika syften och funktioner och det är viktigt att läraren är klar över vad som ligger till grund för de aktiviteter som genomförs med eleverna. Om syftet är att undervisa om problemlösning fokuseras själva lösningsprocessen. I den klassiska boken *Problemlösning – en handbok i rationellt tänkande* av matematikern George Pólya presenteras olika "tumregler" för hur man bör gå tillväga i en problemlösningsprocess. Eftersom matematik både har en logisk och en undersökande sida handlar det inte bara om att lägga upp en strikt plan för hur problemet ska lösas, det är också viktigt att gissa och spekulera. Först sätter sig eleven in i problemets villkor och frågeställning, gissar och undersöker, sedan gör eleven upp en plan och genomför den för att slutligen utvärdera sin lösning. Pólyas numera klassiska problemlösningsmodell består av fyra steg:

- ♦ **Förståelse.** Vad innebär uppgiften? Är alla ord och begrepp förståeliga? Hur kan frågan omformuleras med egna ord? Vad efterfrågas? Vilka förutsättningar gäller? Finns illustrationer och varför finns de i så fall med? Finns överflödig information? Saknas några uppgifter?
- ♦ **Plan.** Liknar uppgiften något tidigare problem? Vilka delfrågor kan ställas? Vilken fråga bör ställas först? I vilken ordning bör övriga frågor ställas? Vilka lösningsstrategier är tänkbara? Finns det fler möjligheter? Välj lämplig strategi, t.ex. att gissa och prova, söka efter mönster, dramatisera, rita en figur, förenkla problemet, skriva en ekvation, göra en modell, göra en tabell, arbeta baklänges, prova alla möjligheter.

- ◇ *Utförande.* Följ planen! Kontrollera varje steg.
- ◇ *Återkoppling.* Kan resultatet kontrolleras? Är resultatet rimligt? Finns andra sätt att få fram lösningen? Finns det fler lösningar? Vilka? Gäller alltid resultatet? Vad händer om villkor ändras? Vilka rimliga generaliseringar kan göras? Analysera lösningsstrategin. Fördelar? Nackdelar? Vad är kärnan i problemet?

Pólyas modell har efter hand vidareutvecklats. När det gäller planering och vilken strategi som ska väljas för att lösa det aktuella problemet kan listan kompletteras med ytterligare alternativ, som att göra listor och diagram, att arbeta med laborativa material – och att sova på saken. Ibland kan det helt enkelt vara bra att lägga problemet åt sidan, ägna sig åt andra verksamheter ett tag och fortsätta vid ett senare tillfälle. Inte sällan kan en idé om lösning dyka upp när man minst anar det.

Redan Pólya själv menade att de fyra stegen inte måste tas i den nämnda ordningen. I en problemlösningsprocess är det fullt möjligt, och många gånger nödvändigt, att återvända till ett tidigare steg flera gånger.

Om, för och genom problemlösning

När man undervisar *om* problemlösning får eleven tillgång till en tydlig arbetsgång, och ramar att själv tänka och göra självvärderingar inom. Däremot uppstår det inte lika stora möjligheter för eleven att själv skapa och vara kreativ eftersom eleven är styrd av en struktur och fastställda strategier.

Syftet kan istället vara att undervisa *för* problemlösning och då fokuseras begrepp och färdigheter, inte processer. Undervisningen kommer då att präglas av lärarens förklaringar av olika begrepp samt av färdighetsträning. Eleven ska bli rustade för att senare kunna använda problemlösning i olika sammanhang. En sådan lärmiljö begränsar elevernas möjligheter att utveckla problemlösningsförmågan och att själva vara kreativa och få tilltro till sin förmåga.

Till sist kan syfte och funktion vara att undervisa *genom* problemlösning. Då utvecklas ny begreppsförståelse och nya färdigheter parallellt med att eleven utvecklar sin problemlösningsförmåga. Detta förbereder eleven för att vara självständig, för att själv skapa nytt kunnande och få tilltro till sin förmåga. Läraren kan uppleva det som krävande att förbereda den här typen av aktiviteter eftersom det behövs väl anpassade problemuppgifter och läraren själv behöver ha goda kunskaper inom matematikdidaktik. Genom ett väl utvecklat samarbete lärare emellan kan planeringsarbetet underlättas.

Att dramatisera problem

Ett problem som eleverna kan dramatisera passar ofta som en introduktion till ett arbetsområde eller ett specifikt matematikinnehåll. Det kan vara ett naturligt sätt att problematisera och göra eleverna nyfikna på vad som ska komma i undervisningen. Dramatiseringen kan öppna för nya frågeställningar. *Vad händer om vi gör så eller så istället? Varför blev det så här?*

- ◇ Vid val och eventuell justering av ett problem tas hänsyn till elevgruppens förutsättningar. Finns det tillräckligt många elever? Behöver någon elev särskilt stöd? De elever som inte deltar aktivt i dramatiseringen kan agera publik. Många gånger kan det vara de som ser lösningen eftersom deltagarna kan bli lite för upptagna med sina pågående roller.

- ◇ Fundera på hur dramatiseringen sedan kan representeras ”i mindre format”. Går det att i nästa steg byta personerna mot något material?
- ◇ Vilket blir nästa steg? Hur långt i abstraktion går det att dra problemet? Vad är möjligt för den enskilde eleven att erfara, uppfatta eller förstå?
- ◇ Hur ska eleverna dokumentera? Gemensamt eller enskilt? Både och?

Gemensam problemlösning

Vid *Gemensam problemlösning* presenteras ett problem, oftast på 4–6 kort. Med fyra kort passar det bra med fyra elever i varje grupp, men det är lika möjligt med andra fördelningar, bara inte alla kort delas ut till en och samma elev.


strävorna

1A

2,4F

Gemensam problemlösning – tal

PROBLEMLÖSNING – BEGREPP – KOMMUNIKATION – TALUPPFATTNING

Avsikt och matematikinnehåll
 Att låta elever i grupp lösa problem om tal. Eleverna ges möjlighet att kommunicera om begrepp som större än, mindre än, udda och jämna tal, printal och delbarhetsregler.

Förkunskaper
 Talraden.

Material
 Varje grupp får ett antal kort med ledtrådar på. Varje kort avslutas med en gemensam fråga. Låt eleverna få tillgång till plockmaterial som exempelvis knappar, multilinkkuber eller dekorationstenar alternativt talkort. När det söka talet ligger inom talområdet 0–100 kan det vara bra med tillgång till en hundruruta, se ncm.gu.se/matematikpapper.

Beskrivning
 Gruppstorleken kan variera från två till fyra elever.

- Varje elev får ett eller två kort.
- Det är tillåtet att läsa upp texten hur många gånger som helst, liksom det är tillåtet att fråga kamraterna vad det står på de andra korten hur många gånger som helst.
- Det är däremot *inte* tillåtet att lägga ett eller flera kort på bordet.

Orsaken till den sista punkten är att då tar ofta en elev kommandot och löser problemet på egen hand eller med bara begränsad hjälp från de andra. Som reglerna är utformade blir det verkligen gemensam problemlösning – alla elevers kort är lika viktiga och problemet blir oösligt om informationen på något kort inte läses upp.

Introduktion
 Gå igenom reglerna noga innan korten delas ut första gången. Pipeka också att gruppen bör läsa igenom alla kort när de anser att de har hittat lösningen för att se så att alla ledtrådar stämmer. I fortsättningen kan introduktionen exempelvis bestå av att nya ord eller begrepp som förekommer på korten diskuteras.

Uppföljning
 Låt grupperna berätta om sin problemlösning. Om det var ett enkelt eller svårt problem, om det var något särskilt ord de fastnade på eller om något i kortens text kunde tolkas på olika sätt. Diskutera strategier som vilka kort som är smartast att starta med och vilka som bör sparas till senare.


nämnamnen/NCM
ncm.gu.se/stravorna

sidan får kopieras

Ta fram det material som eventuellt behövs enligt korten. Det är vanligt med plockmaterial som stickor, kuber och sifferkort.

- ◇ På varje kort står en eller flera ledtrådar till det gemensamma problemet som ska lösas. Varje elev får minst ett kort.

- ◊ Nu kommer det viktigaste! Eleven får *inte visa* vad det står på sitt / sina kort för kamraterna. Om de gör det är det vanligt att en elev tar över och ensam löser problemet. Däremot är det tillåtet att läsa upp eller berätta om ledtråden, och kamraterna får gärna fråga varandra vad det står på de andras kort hur många gånger som helst.
- ◊ Gör följande till en vana: När eleverna tycker att de har löst problemet läser de igenom ett kort i taget och ser efter att allt verkligen stämmer.
- ◊ För att ytterligare öka kommunikationen mellan elever kan de arbeta i par. Det kan exempelvis vara bra att sätta olika goda läsare tillsammans.
- ◊ Detta slag av gemensam problemlösning går att finna i en del lärarhandledningar och särskilda böcker. Ett stort antal lärare känner igen och uppskattar två häften med titeln *Gemensam problemlösning* av Tim Erickson. Häftena är slut på förlaget, så var rädda om dem ni eventuellt har.

Att arbeta med öppna problem

Ovan har vi definierat problem som en uppgift där eleven till en början inte har en given metod att använda, och att uppgiften förutsätter eller stimulerar ett engagemang från elevens sida. Om eleven själv behöver tillfoga utelämnade uppgifter kallas problemet för öppet, likaså om det finns flera tänkbara lösningar. Genom att utelämna uppgifter stimuleras eleverna till både reflektion och kommunikation. Öppna problem löses därför helst i grupp. Det kan krävas både kreativitet och engagemang för att tillfoga de nödvändiga uppgifterna. Elevernas olika erfarenheter och intressen kan bli viktiga inslag i detta arbete. Genom att låta problemen ha flera tänkbara lösningar kan man komma ifrån elevernas fokusering på det "rätta svaret" och i stället kan lösningsprocessen komma i första rummet. Förmågan att resonera blir också mycket central i arbete med öppna problem. Eftersom det inte finns något "rätt svar" behöver eleverna både förklara och motivera sina lösningar för att få bekräftat om de lyckats lösa problemet eller inte. Genom att arbeta med öppna problem ökar därför förutsättningarna för kommunikation, interaktion och motiverande uppgifter. Utöver problemlösningens förmågan ökar också förutsättningarna att utveckla övriga förmågor. Exempel på ett öppet problem: *Räcker din månadspeng för att betala ett årskort på gymmet?*

Eftersom föräldrarna många gånger är en viktig resurs för elevernas kunskapsutveckling är det bra om de blir förtrogna med innebörden i öppna problem. Själva kanske de endast har erfarenhet av traditionella matematikuppgifter med "rätt och fel". Låt därför gärna föräldrar få bekanta sig med denna typ av uppgifter, varför inte på ett föräldramöte? Något annat att vara vaksam inför är att eleverna måste få erfara att alla uppgifter och problem de ställs inför inte är öppna, alla resultat kan inte legitimeras med "att det beror på...". Elever kan ha många olika beräkningsstrategier men inte tillräcklig erfarenhet eller kunskande om *när* och *hur* de ska tillämpas. Risken är att elever kommer fram till olika resultat och ser det som naturligt, eftersom det beror på vilken strategi som används.

Hur löser elever problem?

I undervisningen är det av stor vikt att eleverna får möjlighet att utveckla förmågan att lösa sådana problem som de kan stöta på i sin vardag. De ska också få chans att utveckla ett kritiskt förhållningssätt till egna och andras lösningar. Utöver detta ska eleverna också lära sig att söka information på olika sätt och utveckla sin språkförmåga. Om man undervisar *genom* problemlösning kan det givetvis även finnas inslag av både *om* och *för* problemlösning. Den uppgift som introduceras för eleven kan kräva utforskning, tankeverksamhet, kreativitet och resonemang samt en diskussion om olika matematiska begrepp. Ingenting hindrar att läraren samtidigt förklarar olika begrepp och metoder för eleven och belyser viktiga strategier. Detta är betydelsefulla verktyg som eleven behöver använda i sin kreativa process. För att skapa och diskutera sina idéer krävs det att eleverna har gott om tid och därför är tid en viktig faktor för att problemlösningen ska bli lyckad.

Pólya betonar att det inte räcker att lära sig tumreglerna för hur en lösningsprocess ska genomföras, de måste också praktiseras och han menar att det gäller för både elever och lärare. Elevens kreativitet får inte kvävas av regler och rutiner för då har beredskapen att lösa problem i vardagssituationer beskurits.

Vilka kunskaper och förmågor utvecklas?

Om eleven får lära matematik genom problemlösning, och dessutom samtala om problemen och lösningarna med både lärare och kamrater, kommer de att ha goda förutsättningar att utveckla både kunskaper och olika förmågor i matematik. Att lära matematik genom problemlösning innebär att fokus riktas mot processer i stället för resultat. Det handlar inte om att vara snabbast och smartast, det handlar om att få tilltro till sin förmåga att lösa problem genom att analysera, förstå och vara kreativ. Det handlar om att argumentera, diskutera och tolka både sina egna och kamraters strategier, metoder och förslag till lösningar. Eleverna får därigenom en beredskap att kunna använda matematik i olika vardagssituationer.

I matematikundervisningens styrdokument betonas förutom problemlösning också andra förmågor som eleverna ska ha möjlighet att utveckla. Om läraren undervisar genom problemlösning får eleverna tillfälle att utveckla de flesta av dessa förmågor. Att använda matematiska metoder är ett självklart inslag i problemlösning liksom att reflektera över rimlighet. Även lärare behöver utveckla sin problemlösningsförmåga, gärna i dialog med kollegor. Det är också viktigt att bli medveten om hur strategier och matematiskt innehåll kan relateras till olika elevers erfarenheter och potentialer.

Att fundera över

- ♦ Vilken är din syn på problemlösning? Om, för eller genom?
- ♦ Ge exempel på elevnära matematikinnehåll som skulle kunna ligga till grund för problem att dramatisera, att göra kort för gemensam problemlösning eller för att formulera öppna problem.

Alla behöver ha en känsla för vad tal är och förstå hur de fungerar. Det finns fem grundläggande principer i processen som leder fram till förståelse för hur antalet föremål i en mängd kan "mätas". Att förstå skillnaden på siffra och tal liksom att känna igen tals helhet och delar är andra viktiga grundläggande kunskaper för en god taluppfattning.

Vikten av att förstå innebörden i *begreppet tal* är välkänd. I det tidiga lärandet inser barn efterhand kopplingen mellan räkneord och siffror och att räkneorden också kan beskriva antalet föremål som finns i en väl avgränsad mängd. Antalet kan uttryckas skriftligt med tal som skrivs med siffror. Kunskap om processen som leder från barns tidiga möten med räkneord till att de kan använda räkneord och tal för att göra antalsbestämningar och beräkningar är viktig för alla lärare i arbetet med att stödja och utmana elevers taluppfattning. Det engelska uttrycket för taluppfattning, *number sense*, signalerar möjligen tydligare än det svenska att det handlar om att utveckla en känsla för vad tal är och hur tal fungerar. Känslan utvecklas genom många och olika erfarenheter av relationer inom tal, mellan tal och mellan tal och omvärld.

Redan urtidsmänniskan använde och dokumenterade tal. Ett exempel finns bevarat i ett ca 30000 år gammalt vargben där någon har ristat in ett antal streck i femgrupper. Vad strecken representerar vet vi inte, kanske djur, antal dagar eller ägodelar. Bakom markeringarna ligger en grundläggande förståelse för räkning.

Barn som växer upp i sammanhang där tal och räkning uppfattas som viktigt får erfarenheter som hjälper dem att lära och använda räkneorden. Vygotskij menar att det är en social rutin där kunnandet gradvis övergår till att bli den enskildes. Föräldrar och andra i omgivningen stödjer, utmanar och uppmuntrar barnets lärande. Att föräldrar pratar om antal och använder räkneord har visat sig vara viktigare för barns framgångar i matematik än man tidigare anat. Forskarna Rochel Gelman och Charles Gallistel har formulerat fem grundläggande principer om processen där förståelsen formas.

- ♦ *Abstraktionsprincipen* innebär att föremål i väl avgränsade och definierade mängder kan räknas.
- ♦ *Ett-till-ett-principen* innebär att ett föremål i en mängd kan bilda par med ett föremål i en annan mängd. Är antalet i de båda mängderna lika eller olika? Räcker bullarna så det blir en var? Det kan också vara att räkneord och föremål bildar par. En känd svårighet för nybörjare är att hålla samma takt för räkneord och föremål, t ex att säga ett räkneord i taget och samtidigt peka på det som räknas eller hoppa rätt antal steg på en spelplan.
- ♦ *Principen om godtycklig ordning* innebär förståelse för att när vi räknar antalet föremål i en mängd spelar det ingen roll i vilken ordning vi räknar dem eller hur föremålen är grupperade. Det viktiga är att veta vilka man har räknat och vilka som återstår.

1, 2, 3, 4
Fyra är det!

- ◇ *Principen om räkneordens ordning* handlar om att varje räkneord följs av ett annat bestämt räkneord. Antalet i mängden bestäms av ett ord i räkneramsan.
- ◇ *Antalsprincipen*, också kallad kardinaltalsprincipen, innebär att när varje föremål i mängden har parats ihop med ett räkneord så utgör det sist utsagda räkneordet antalet föremål i hela mängden. Vi "mäter" antalet föremål med hjälp av räkneorden. På frågan *hur många* det är i mängden, svarar nybörjare med att räkna alla en gång till. De tror att föremålen i mängden "heter" respektive räkneord. Elever som har förstått antalsprincipen upprepar eller betonar ofta det sista räkneordet för att markera att det skiljer sig från de övriga, att det betecknar hela mängden.



För att det ska vara meningsfullt att arbeta med tal och räkning är det nödvändigt att eleven förstår antalsprincipen och har innebörden i begreppet *antalskonservervation* klart för sig, det vill säga förståelse för att antalet i mängden inte ändras om föremålen räknas i olika ordning, om de ligger tätt eller glest. En annan grundläggande förmåga är att uppfatta ett litet antal i "en blink" (subitiserar), dvs utan att behöva räkna. De flesta uppfattar upp till 6–7 föremål på det sättet. Förmågan att subitiserar visar sig till exempel i att direkt uppfatta fem fingrar på handen eller en "sexa" på tärningen.

Några andra forskare som studerat utvecklingen av uppräknandets idé är Victoria Bermejo, Douglas Clements och Julie Sarama. Deras beskrivning av utvecklingen av förståelse för *hur*

många sammanfattas enligt följande av specialläraren Faith Sadler:

- ◇ Nivå 1, *pre-counters*. Barnet förstår inte frågan *hur många* utan ger ett slumpmässigt svar.
- ◇ Nivå 2, *reciters*. Barnet svarar med att säga en del av räkneramsan, utan att ett-till-ett-koppla räkneord och föremål.
- ◇ Nivå 3, *corresponders*. Barnet svarar på frågan genom att räkna mängden en gång till. Oftast har räkneord och föremål ett-till-ett-korrespondens.
- ◇ Nivå 4, *immature counters*. Barnet svarar med det sist uppräknade räkneordet även om det inte anger korrekt antal. Barnet har ännu inte kontroll över räknandet.
- ◇ Nivå 5, *rigid rule followers*. Barnet svarar med det största av de uppräknade räkneorden, även om det inte är det sist använda räkneordet. Barnet börjar upptäcka regler och mönster för hur antalsräkning fungerar men gör fortfarande misstag.
- ◇ Nivå 6, *counters*. Barnet har kontroll över sin egen och andras antalsräkning och svarar korrekt på frågan om *hur många*.

(De engelska beteckningar används då de saknar vedertagna svenska uttryck.)

Forskarna Joanna Nye, Michael Fluck och Sue Buckley har studerat förståelsen för ramsräkning, antalsräkning och kardinalitet hos förskolebarn med Downs syndrom och en kontrollgrupp med jämnåriga barn utan funktionshinder. Ett huvudresultat är att språket hos barnen med Downs syndrom var mindre utvecklat än kontrollgruppens. Det visar sig till exempel i att den räkneramsa

de kunde uttrycka var kortare än kontrollgruppens. Nye, Fluck och Buckley överraskades av att några barn i båda grupperna klarade att plocka ut ett bestämt antal ur en mängd föremål och ge dem till en docka; de visade förståelse för antal. Barnen i kontrollgruppen var säkrare i att räkna större antal. Forskarna menar att förväntningarna på vad barn med Downs syndrom har möjlighet att lära sig om tal ökar om de redan tidigt får lämplig stimulans och undervisning.

Läraren Anne Gullick, beskriver hur förståelsen för tal och antal utvecklades hos en elev med Downs syndrom genom att utgå från hans visuella styrkor i undervisningen. Hon inspirerades av undervisning i Östeuropa, särskilt Ungern, där de utgår ifrån att för dessa barn är synminnet och visuell bearbetning en styrka. Med utgångspunkt i en berättelse fokuserades ett antal, ett till tio, i taget där eleven fick möta och använda många olika representationer som föremål, rörelser, dramatisering, teckenspråk, tärningar, dominobrickor, Cuisenairestavar, siffror, tallinje och klocka, vilka gav eleven en rik och varierad bild av det aktuella antalet och fungerade som referenspunkter (minneskrokar). Språkliga uttryck fokuserades hela tiden för det aktuella antalet men också för att uppmärksamma och uttrycka relationer inom och mellan tal, till exempel *ett mer, ett mindre, udda och jämna*. Genom många men korta stunder där innehållet repeterades och varierades, där läraren och eleven samtalade muntligt och med stöd av teckenspråk, utvecklade eleven sin talförståelse och sitt språk. I sexårsåldern uttryckte pojken hela meningar om tal, tex "fyra är ett mer än tre". Han visade en stabil förståelse för talen upp till tio (liten additions- och subtraktionstabell) och var på god väg att generalisera till hela tiotal. Genom visuellt stöd, repetition och överinlärnning klarade han att bearbeta erfarenheter och att hantera korttidsminnet.

I *Learners with Down syndrome* sammanfattas klassrumsstrategier:

- ◇ Use concrete materials (including commercial materials such as Cuisenaire™ and Numicon™) and hands-on activities.
- ◇ Maximise use of visuals and support learning with visual materials, cues and supports wherever possible.
- ◇ Break tasks down into small component steps with lots of practice and reinforcement.
- ◇ Find extra activities to practice and consolidate skills in a range of contexts.
- ◇ Relate mathematics to real life and daily living skills wherever possible, as seeing the purpose will support motivation.
- ◇ Use simple language – explicitly teach the language of mathematics alongside the concepts.
- ◇ Use ICT for skills practice – it increases motivation and allows intensive repetition of skills.

Även om denna sammanfattning avser undervisning anpassad till elever med Downs syndrom finns det många andra elevgrupper för vilka det också är goda klassrumsstrategier.

Siffror och tal

Svårigheter och missuppfattningar kan uppstå tidigt. Vad är tex skillnaden mellan siffror och tal? I det dagliga livet används inte sällan uttryck som förvirrar. I media och i samtal möter vi uttryck som "siffrorna är större än förväntat", "undrar hur stora siffrorna ska bli" eller "det var längesedan vi hade så låga siffror". Det är inte ovanligt att barn och unga elever kopplar sådana uttryck till siffrors fysiska storlek.

För att motverka missuppfattningar är det nödvändigt att korrekta begrepp och uttryck används redan från början i matematikundervisningen. Vygotskij lyfter fram betydelsen av att vuxna i samspelet med barn och elever utmanar både språk och tänkande. Genom många möten med ord och begrepp, i meningsfulla och varierade situationer, införlivas dessa i elevens eget språkbruk och begreppsapparat. Ett medvetet och konsekvent språkbruk hjälper barn och elever att utveckla korrekt förståelse för de båda begreppen.

I *Matematiktermer för skolan* görs följande definitioner:

siffra tecken som representerar ett naturligt tal

tal grundläggande matematiskt begrepp som i sin enklaste form anger antal eller ordning i en följd. Ett tal representeras av en eller flera siffror.

Genom olika kombinationer av de tio siffrorna kan oändligt många tal skrivas. Tal kan också anges med andra tecken än siffror, t ex π (pi).

Tals helhet och delar

I det tidiga arbetet med tal och antal är de konkreta inslagen vanliga och nödvändiga. Elever möter frågeställningar som: *Hur många bollar ligger det i lådan? Hur många av dem är gula? Hur många är röda? Vilken färg finns det flest av? Hur många fler/färre är gula? Hur stor skillnad är det mellan antalet röda och antalet gula bollar?*

Vi leder in elevernas tänkande på tals helhet och delar och använder muntliga språkuttryck som representerar ett matematiskt sammanhang. Att kunna tolka andras muntliga uttryck och att själv kunna uttrycka sig med hjälp av matematiska begrepp är kritiska steg i lärandet. Genom att lyssna till, tolka och använda matematiska uttryck utvecklas språket. Ytterligare ett kritiskt steg är övergången till det skrivna matematiska symbolspråket. Eleverna behöver återkommande och varierade erfarenheter för att göra motsvarande skriftliga symboluttryck till sina.

Definitionen av ett enskilt naturligt tal i talraden kan vara att det är lika med *det föregående talet + 1*. Talet 2 kan då definieras som $1 + 1$, talet 3 som $2 + 1$ osv. Men ett enskilt tal i talraden, t ex 7, är inte bara $6 + 1$ utan också $7 + 0$; $5 + 2$; $4 + 3$ etc. Genom att uppfatta talen i grupperingar kan vi systematisera och kontrollera större mängder. Tio är lika mycket som två femmor, en sexa och en fyra eller en sju och en trea. Sådant kunnande underlättar i situationer som handlar om uppdelning på olika sätt, exempelvis: Tio barn ska dela upp sig i par. I hur många par kan de ställa sig? Tjugo personer ska äta vid fem bord. Hur många kan sitta vid varje bord?

Historiskt har olika vägval påverkat människans lärande i matematik. Det romerska systemets struktur och symboler för fem, femtio, femhundra gav gott stöd för att hantera tal. Många menar att det indoarabiska systemets tiobas är lite för stor för människans förmåga att uppfatta antal "i en blink". Av det kan man dra slutsatsen att helheten fem och dess delar är en viktig grund. Säkerhet

i de första tio talens helhet och delar, det vi ibland kallar liten additions- och subtraktionstabell, och att kunna göra omgrupperingar är nödvändigt för att hantera mer komplexa tal. Alistair McIntosh, som ägnat sitt forskarliv åt att utveckla elevers och lärares kunskande om tal och räkning, menar att man i undervisningen ska gruppera kombinationerna, så att de som bygger på en viss strategi behandlas tillsammans. Den struktur han rekommenderar för undervisningen är följande:

1 mer (+1)	2 + 1; 3 + 1; 4 + 1; 5 + 1; ..., 8 + 1; och omvänt 1 + 2; 1 + 3 osv
2 mer (+2)	3 + 2; 4 + 2; 5 + 2; 6 + 2; 7 + 2 och omvänt 2 + 3; 2 + 4, 2 + 5 osv
3 mer (+3)	4 + 3; 5 + 3; 6 + 3 och omvänt 3 + 4; 3 + 5; 3 + 6 osv
Inga fler (+0)	1 + 0; 2 + 0; 3 + 0; 4; ..., 9 + 0 och omvänt 0 + 1; 0 + 2 osv
Tiokamrater	10 + 0; 9 + 1; 8 + 2; 7 + 3; 6 + 4; 5 + 5; 4 + 6; 3 + 7; 2 + 8; 1 + 9
Dubblor	0 + 0; 1 + 1; 2 + 2; 3 + 3; 4 + 4; 5 + 5

Undervisningen bör inriktas på att eleverna ska kunna härleda subtraktionskombinationerna ur additionskombinationerna, tex $3 + 2 = 5 \Rightarrow 5 - 3 = 2$; $5 - 2 = 3$.

Elever som inte automatiserar de första tio talens helhet och delar, fastnar ofta i ett-och-ett-räkning, dvs för $4 + 2$ räknar de med konkret material, eller med hjälp av fingrarna, först upp de fyra och sedan ytterligare två innan de räknar fram svaret. De räknar antingen alla föremålen eller utgår från någon av delmängderna, två eller fyra, för att få fram summan. Andra dubbelräknar genom att säga nästa räkneord och samtidigt hålla ordning på hur många ord de har sagt. För $2 + 7$ räknar de tre^{ett}, fyra^{två}, fem^{tre}, sex^{fyra}, sju^{fem}, åtta^{sex}, nio^{sju}, en komplicerad och i längden ohållbar kognitiv utmaning. Det blir omöjligt att hålla isär de parallella räkneramsorna.

Det är viktigt att eleverna också automatiserar stor additionstabell. McIntosh föreslår följande struktur för den:

Lägg till 10	10 + 1; 10 + 2; ...; 10 + 8; 10 + 9 och omvänt 1 + 10; 2 + 10 osv
Dubblor	6 + 6; 7 + 7; 8 + 8; 9 + 9; 10 + 10
Nio plus	9 + 2; 9 + 3; 9 + 4; ..., 9 + 7; 9 + 8 och omvänt 2 + 9; 3 + 9 osv
Åtta plus	8 + 3; 8 + 4; 8 + 5; 8 + 6; 8 + 7 och omvänt
Sju plus	7 + 4; 7 + 5 och omvänt
Nära dubblor	4 + 5; 5 + 6; 6 + 7; 7 + 8 och omvänt

Liksom med kombinationer inom tio menar McIntosh att undervisningen ska ge eleverna erfarenheter som hjälper dem att härleda subtraktioner ur automatiserade additionskombinationer. Grunden för att förstå och kunna använda räknelaror som underlättar beräkningar ligger i att inledningsvis veta vilka två tal som tillsammans bildar en bestämd helhet. Ett exempel: $7 + 8 \Rightarrow$ omgruppera till $5 + 2 + 8 \Rightarrow 10 + 5$ alternativt $7 + 7 + 1 \Rightarrow 14 + 1$ och på motsvarande sätt $8 + _ = 15$; $15 - 7 = _ \text{ etc.}$

Exemplet $57 + 86 = _ + 84$ handlar om omgruppering. Det kända talet 84 i högerledet är två mindre än 86 vänsterledet. För att likheten ska kvarstå måste dessa två finnas i den andra termen i högerledet, dvs 59. Ett sådant resonemang

bygger på taluppfattning. Elever som rutinmässigt utför beräkningen i vänsterledet stöter på flera tiotalsovergångar. Resultatet ska sedan hanteras i högerledet, troligen i en subtraktion, också med tiotalsovergångar. Att se relationen mellan ingående tal och att uppfatta sambandet mellan dem, speglar elevens förmåga att kunna använda den associativa lagen $(a + b) + c = a + (b + c)$.

En kritisk punkt är hur det systematiska arbetet med de tio första talen följs upp i större talområden. Det är inte självklart för elever att $300 + 500$, $13 + 5$, $103 + 5$, respektive $800 - 500$, $48 - 5$, $48 - 45$ osv bygger på helhet och delar i talet 8 och ser sambanden mellan $3 + 5$; $5 + 3$ och $8 - 5$; $8 - 3$. Undervisningen måste redan från början betona detta.

En annan kritisk punkt är när lärare tror att när elever har förståelse för helhet och delar i ett litet talområde, kan de på egen hand generalisera till större talområden. Så är det oftast inte. Det är medveten och strukturerad undervisning som hjälper dem att nå den förståelsen. För att utveckla användbara och effektiva strategier för beräkningar i huvudet och för skriftliga beräkningar är det nödvändigt att kunna generalisera.

Egenskaper hos begreppet
som jag ska ta upp i min undervisning

Naturliga tal 1 till 10

- hur de kan storlekordnas, jämföras och delas upp
- hur de kan uttryckas och visas
- även föra in nollan

Hur begreppet kan representeras

Ord: ett, två, tre, ...
etta, tvåa, trea, ...
första, andra, tredje, ...

Laborativ material: Oändligt många material kan användas, allt ifrån leksaker till pedagogiska material som exempelvis markörer, multilinkkuber och tiobasmaterial.

Bild:
informella symboler som

∞ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

tallinje

Situationer: Välj i första hand händelser och situationer som direkt berör eleverna och deras vardag.

Symboler:
0, 1, 2, 3, ...
0,1; 4/5; 378 542; ...
1/2; 3/4; 1/100; ...
π, φ, ...

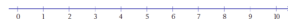
Tals helhet och delar

Relationer till andra begrepp

a. Större talområden
b. Enkla bråk som hel, halv, fjärdedel (kvart), tredjedel (tjugo minuter)
c. Decimaltal och procent

Definition av begreppet

Tal = grundläggande matematiskt begrepp som i sin enklaste form anger antal (kardinaltal) eller ordning i en följd (ordinaltal)




Begreppstavlan är ett stöd för att olika aspekter av det aktuella begreppet uppmärksammas i undervisningen.

Att fundera över

- ♦ Hur kan undervisningsaktiviteter varieras så att varje elev får stabil förståelse för de fem av Gelman och Gallistel formulerade principerna?
- ♦ Tänk på en elev med matematiksvårigheter som du har mött. Kan du, utan att göra någon fördjupad undersökning, placera in eleven i någon av de båda punktlistorna ovan? Vilka slutsatser kan du dra?

Räkna och beräkna

För att möta och utmana elevers kunskande om och i aritmetik är det som lärare angeläget att ha kunskap om det tidiga lärandet, från räkneramsa, talrad och att bestämma antal till att göra beräkningar.

I tidiga år möter barn ramsor som *Baka, baka, liten kaka*, en slags diktning som bygger på rytmiska uppräkningsramsor. Ramsorna saknar ofta mening eller sammanhang, t ex *Ole, dole, doff* eller *Ärtan, pärtan, puff*, men orden kommer alltid i samma följd, en egenskap som många fångas av och är förtjusta i. Inledningsvis uppfattas också räkneramsan, dvs orden *ett, två, tre, ...* som en ramsa bland andra och saknar koppling till antalsräkning. På frågan *Kan du räkna?* "rabblas" ofta räkneord. Längden på räkneramsan varierar kraftigt i olika åldrar och är beroende av erfarenheter av att möta, pröva och använda räkneorden i olika situationer. I allmänhet utvecklas den stegvis:

1. Räkneramsan är vare sig korrekt eller stabil, vilket innebär att någon "räknar" *ett, två, sjutton, nio, hundra* vid ett tillfälle och en annan gång *fem, ett, arton, åtta*. Ramsan är olika varje gång.
2. Räkneramsan är stabil men inte korrekt, vilket betyder att vid upprepade tillfällen används samma inkorrekta ramsa, t ex *ett, två, tre, åtta, fem*.
3. Hela räkneramsan är både stabil och korrekt.

Eftersom ramsan inledningsvis uppfattas som en helhet påbörjas den alltid vid ett. Axel räknade varje gång ett, två, tre, fyra, fem, sex, (tystnad, med huvudnickning), åtta, nio, tio, elva, ... *Varför nickar du på ett ställe? – Jag säger det tyst, för det är svårt att säga* och så försöker han uttala ordet sju. Ett utelämnat räkneord i ramsan betyder inte nödvändigtvis att personen inte kan. För att få grepp om var i utvecklingen någon är, behöver vi vara vaksamma på både ord och kroppsspråk. Innan man uppmärksammat att räkneramsan består av olika delar i en bestämd följd, är det svårt att svara på frågan *Vad kommer efter åtta?* För att kunna svara rabblas ramsan från början. Så småningom klarar man att uppmärksamma vad i ramsan som kommer efter åtta. Svaret kan bli *nio, tio, ...* och så långt som räkneramsan räcker. Ännu svårare är det att räkna baklänges. För att svara på frågan *Vad kommer före fem?* måste man rabbla ramsan (ev tyst för sig själv) från början och efterhand lyssna in vad som kommer före.

I *talraden* är talen skrivna med siffror, 0, 1, 2, ... och placerade i stigande ordning. Svårigheter med att lära räkneramsan och så småningom talraden hör ofta samman med språkliga strukturer och hur vi skriver talen med vårt siffersystem. Språket döljer ibland logiken. De gamla gotiska orden för elva, ainlif, och tolv, twalif, betyder ett respektive två mer än tio. När räkneorden tio, elva och tolv skrivs med siffror används en tiobas, ett tiotal och inget ental, 10; ett tiotal och ett ental, 11; ett tiotal och två ental, 12. Att "ton" i "tontalen" betyder tio går inte att förstå av sig självt utan måste klargöras i undervisning. För att följa "tontalens" struktur, där vi först säger entalet och sedan tiotalet, borde elva heta ett-ton och tolv två-ton. När vi säger tontalen uttalas entalet före tiotalet, men vi gör tvärtom när vi skriver dem med siffror, tiotalet till vänster och entalet

till höger i läsriktningen. Att entalen är fyra i fjorton och åtta i arton går inte att förstå av räkneorden. Räkneordet tjugo har sin egenart. I övriga hela tiotal hörs antalet tiotal i utläsningen, tre-(t)tio, fyr-tio o.s.v. Logiskt sett borde tjugo heta två-tio. Ordet "tjugo" härstammar från det fornsvenska ordet tiughu, som betyder två tior. Dessa språkliga och strukturella avvikelser är svåra att få grepp om i lärandet. Förenklat kan sägas att när hindren vid talen 11–20 och steget *tjugotio*, dvs 29, 30 övervunnits, kan man räkna nästan hur långt som helst. För att kunna möta och utmana elevers utveckling i undervisningen är det nödvändigt att vara medveten om dessa svårigheter.

För att lärare ska få inblick i de svårigheter som elever möter i räkneramsans komplexa struktur, föreslår Ingrid Olsson, fd lärarutbildare, att det är nyttigt att själv konstruera en ny räkneramsa med basen tio. Om vi tar hjälp av ramsan Ole dole doff blir räkneramsan till tio ole, dole, doff, kinke, lane, koff, koffe, ane, binke, bane. Vi kan sedan kalla "tontalen" oleton, doleton, doffton o.s.v. Räkneordet tjugo blir dolebane, trettio blir doffbane o.s.v. Början av ramsan följer här:

Ole, dole, doff, kinke, lane, koff, koffe, ane, binke, bane,

oleton, doleton, doffton, kinketon, laneton, koffton, koffeton, aneton, binketon, dolebane,

dolebaneole, dolebanedole, dolebanedoff, dolebanekinke, dolebanelane, dolebanekoff, dolebanekoffe, dolebaneane, dolebanebinke, doffbane,

doffbaneole, doffbanedole, doffbanedoff, doffbanekinke, doffbanelane, doffbanekoff, doffbanekoffe, doffbaneane, doffbanebinke, kinkebane,...

Hur fortsätter ramsan? Försök räkna vidare till lanebane! En annan variant på räkneramsa finns i Sten Rydhs *Dosimong-promenaden* i Nämnaren 2013:1.

Personer med andra modersmål än svenska kan ha en annan förståelse för räkneordens innebörd. I en del språk har räkneorden och skrivningen med siffror en gemensam och tydlig struktur. Andra språk har liksom svenskan en uppbyggnad som är svårare att förstå och överblicka.

Redan på 1940-talet visade forskaren och lärarutbildaren Fritz Wigforss att sambandet mellan ramsräkning och räknefärdighet är mycket stort:

*Det är tydligt att resultatet i provet "Hur långt kan du räkna" är ganska upp-
lyssande för hela frågan om barnets räknefärdighet. Den ringa respekt som
många lärare synes ha för värdet av barnens färdigheter i att 'rabbla' upp talen
är tydligen ej berättigad.*

Också Karen Fuson, psykolog och forskare, visade i sina studier att längden på räkneramsan har betydelse för framgång med att lösa aritmetiska problem.

Bestämma antal och göra beräkningar

För att kunna antalsbestämna är förståelse för uppräknandets idé nödvändig, liksom insikten i att varje tal alltid anger samma bestämda antal. Genom vardagserfarenheter lär man sig att göra beräkningar. Elevers utveckling av att beräkna summan av eller differensen mellan två mängder följer ofta den struktur som beskrivs i följande tabell, detta enligt forskning av exempelvis Tom Carpenter, Bengt Johansson, Wiggo Kilborn, James Moser och Fritz Wigforss.

Addition

$$3 + 4$$

Lägga samman. Eleven räknar först upp antalet föremål i en gruppen, tre, och sedan i den andra, fyra. Därefter förs de två grupperna samman, eller betraktas som en mängd, och samtliga föremål räknas upp ett och ett, *en, två, tre, fyra, fem, sex, sju*.

Uppräkning från början. Eleven räknar upp de tre och fortsätter sedan direkt med uppräkningsen till sju.

Uppräkning från första. Eleven vet att första gruppen är tre och fortsätter att räkna *fyra, fem, sex, sju*.

Uppräkning från största. Eleven inser att det inte spelar någon roll vilka man räknar först och att det går fortare att utgå från det största antalet. *Fyra, ..., fem, sex, sju*.

Härledd tabell. Eleven har automatiserat delar av additionstabellen och kan tex utgå från att *tre och tre är sex, och en till är sju*.

Automatiserad tabell. Eleven kan kombinationen utantill och behöver inte räkna. Tre och fyra är **sju** tillsammans.

Subtraktion

$$7 - 4$$

Ta bort. Eleven räknar upp alla föremålen och tar sedan bort fyra. Därefter räknar hen de återstående, *en, två, tre*.

Lägga till. Eleven räknar först upp de fyra och lägger för sig, fortsätter att plocka fram föremål och räknar dem ett i taget, *fem, sex, sju*. Därefter räknar hen den andra mängden, *en, två, tre*.

Jämföra. Eleven räknar upp två olika mängder, en med sju och en med fyra föremål. Mängderna jämförs genom parbildning och de överblivna föremålen räknas upp, *en, två, tre*.

Nedräkning till återstoden. Eleven räknar fyra steg bakåt från sju, och håller i huvudet eller med hjälp av föremål, reda på hur många steg som tas. *Sju, sex, fem, fyra, tre*.

Uppräkning från delen. Eleven uppfattar sambandet till addition ($4 + _ = 7$) och räknar upp från fyra. Antalet steg hålls i huvudet eller med hjälp av t ex fingrarna. *Fyra, ..., fem, sex, sju, ..., tre*.

Härledd tabell. Eleven har automatiserat vissa subtraktionskombinationer och utgår från dem, t ex *sju minus två är fem ... och minus två är tre*. Eller *tre plus fyra är sju, då måste sju minus fyra vara tre*.

Automatiserad tabell. Eleven kan kombinationen utantill, sju minus fyra är **tre**.

Talsystem

System för att uttrycka och beskriva tal och antal har utvecklats i många kulturer. För att ge överblick har små antal grupperats i större och man har enats om symboler för att uttrycka dessa. Egyptierna använde särskilda tecken för ental, tiotal, hundratal, tusental, tiotusental och hundratusental. Det romerska systemet byggde också på grupperingar av tio, med en särskild betoning på fem. Induskulturen utvecklade ett system, där positionen avgjorde värdet.

De använde skåror i marken, som från höger till vänster representerade ental, tiotal, hundratal osv. Små stenar i fårorna markerade tal och alla stenar kunde representera valfri talsort. Det var fåran som stenen låg i, positionen, som avgjorde värdet.

Siffran noll uppstår

Talen är lätta att avläsa när man ser fårorna och stenarna. En tom fåra har en viktig funktion och måste på något sätt finnas med när talen skrivs. Till en början markerades den med en prick. Så småningom blev symbolen 0. Med hjälp av nollan kan vi skriva vilka heltal som helst utan risk för feltolkningar. Nollan benämns ibland som den viktigaste siffran eftersom den medförde nya möjligheter för att skriva tal och räkna. Brahmagupta, som levde i nuvarande Pakistan på 600-talet, var astronom och matematiker och han var troligen den som först använde noll som ett tal.

Den viktigaste siffran är nollan.

Om den står först betyder den ingenting.

*Man kan ha hur många som helst och det händer inget,
men efteråt – då du – blir det bara mer och mer, hela tiden ...*

Därför är nollan bäst!

Erik, 8 år

Att förstå vårt talsystem

Vårt talsystem där valfria heltal kan skrivas med hjälp av endast tio olika tecken, 0–9, är grundläggande för hela aritmetiken. Undervisningen måste därför ge elever utmaningar som skapar behov av att gruppera. För att ta reda på antalet i en stor mängd, till exempel en låda full med skruvar, kan det vara svårt att räkna en i taget. Det är lätt att tappa bort sig. Genom att gruppera i tiomängder blir uppgiften lättare att överblicka och ha kontroll på. Tiomängderna kan samlas till hundramängder, osv. För att relationerna mellan enstaka (ental), tiogrupper (tiotal) och kanske hundragrupper (hundratal) som bildats av tio tiogrupper är det viktigt att storleksrelationerna mellan talsorterna är tydliga. Konkreta material måste därför väljas med omsorg. Ett vanligt förekommande tiobasmaterial som synliggör detta består av entalskuber, tiotalsstavar, hundratalsplattor och tusentalskuber. Tio entalskuber får plats utmed tiotalsstaven. Hundra entalskuber eller tio tiotalsstavar får plats på hundratalsplattan osv. Genom att använda flera uttrycksformer som konkret material, bilder, talsspråk och symboler stärks förståelsen. Eftersom storleksrelationer mellan sedlar och mynt är underförstådda är pengar inte lämpliga för att bygga förståelse för positionssystemet.

Ett sätt att synliggöra hur siffrors värde hör samman med position är att låta rutor representera talsorter där vi placerar siffror, till exempel:

tiotal	ental	hundratal	tiotal	ental
4	7	3	0	5

Det framgår tydligt att platsen avgör siffrans värde. De fåror som användes i Induskulturen har försvunnit i vårt sätt att skriva tal, men positionernas betydelse kvarstår. Fyra tior är fyrtio och sju ental till det, *fyrtiosju*. Tre hundratal är trehundra, det finns inga tiotal men fem ental, *trehundrafem*.

Talet 300 utläses vanligen *trehundra*, men det är viktigt att eleverna även kan se talet som 300 ental, 30 tiotal eller 3 hundratal. Det har vi nytta av i beräkningar, som $4 \cdot 30$ då man kan tänka $4 \cdot 3$ tiotal = 12 tiotal = 120. I räkneorden kan man höra resultatet av den *multiplikativa egenskapen*: $2 \cdot 100$ (tvåhundra) $3 \cdot 10$ (trettio) $5 \cdot 1$ (fem). Den *additiva egenskapen* innebär att de olika talsorterna kan adderas: $200 + 30 + 5 = 235$.

Talsystem definieras som ett system för hur tal anges med hjälp av siffror. När en siffras värde beror av dess plats, position, kallas systemet *positionssystem*. Eftersom vårt talsystem bygger på basen 10, kan det också kallas *decimalsystem*. Alla tre benämningarna innefattar såväl hela tal som tal i decimalform. Decimalsystemet gör det möjligt att skriva och tolka hur stora eller små tal som helst.

Det tar lång tid att bygga upp förståelse för positionssystemet. Ingen enskild aktivitet eller sekvens av aktiviteter ger eleven allt som behövs. Genom många och varierande erfarenheter med olika representationer som betonar olika aspekter, växer förståelsen.

(Förstå och använda tal, s 24)

Förslag på material

Ibland uppstår diskussion om det är bra eller dåligt att räkna på fingrarna. Fördelen med fingrarna är att de alltid finns med, men nackdelarna kan snart bli fler än fördelarna. Annat "löst" material är enklare att ordna och gruppera på sätt som underlättar för beräkningar. Grundläggande räkning som nybörjare gärna gör med hjälp av sina fingrar bör efterhand automatiseras. *Vad*, dvs vilket material en elev ska använda, beror dels på syftet med aktiviteten och dels hur långt eleven har kommit i sin kunskapsutveckling. I det följande ges förslag på material och motiv till när de passar i undervisningen. Det som blir tydligt är att det går att variera och utveckla färdigheten att räkna, och i förlängningen få förståelse för positionssystemet, i mycket små steg.

Hur många?

Inledningsvis kan, för eleven, välbekanta föremål användas. Välj sådana som ligger still, är så enkla som möjligt att hantera och som tilltalar eleven. Här handlar det om att räkna ett antal föremål. Egenskaper som exempelvis färg och storlek ska eleven bortse ifrån. Det är antalet, hur många, som står i fokus. Jämför med *Fem myror är fler än fyra elefanter*. Var observant på när eleven förstår att antal bara innebär *hur många* och att det inte har med andra egenskaper att göra. Abstrahera sakta genom att byta ut elevens egna föremål till laborativa matematikmaterial som kuber, duploklossar, markörer, dekorationsstenar, rispåsar etc.

Variera genom att låta föremålen ligga i ordning, välordnade, på rad, nära varandra, utspridda etc. Då material används styckvis kan de placeras hur som helst på bordet, det är alltid samma antal, det har ingen betydelse från vilket håll eller i vilken ordning man ser eller räknar, bara man räknar varje föremål exakt en gång.

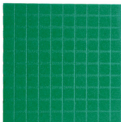
Är färg en tillgång eller ett hinder? Avgör för varje aktivitet om olika färger på materialet är förvirrande eller kan vara en tillgång. En elev som kan förstå att två röda markörer (två äpplen) plus tre blå markörer (tre päron) är sammanlagt fem markörer (fem frukter) är på god väg mot att kunna abstrahera innebörden i att räkna antal.

Att närma sig positionssystemet

Är det många föremål behövs sortering av något slag. Sakerna kan läggas fem och fem, sedan tio och tio, hundra och hundra. Pinnar kan buntas samman med gummiband, småsaker kan läggas i muggar som ställs i glasslådor etc. Fortfarande är en sak = 1. Nästa steg är att byta tio små föremål mot ett större. Snäckor, kottar och plastplugg kan vara lämpliga material. Tio alkottar kan ersättas med en tallkotte. Tio tallkottar byts mot en grankotte. Tio grankottar mot en pinjekotte. Hur kottarna läggs på bordet har ingen betydelse för det totala värdet. Tre tallkottar och fyra alkottar representerar talet 34, men det är oftast enklare att få överblick om kottarna sorteras och eventuellt läggs i rader.

När det gäller exemplet med kottar är det storleken (beroende på trädslag) som avgör värdet. Nästa steg i abstraktion kan vara att använda ett material i olika färger och där eleven bestämmer värdet på respektive färg. Används dekorationsstenar kan blått vara värt 1 och rött värt 10. Nu går det inte att se att större föremål är värt mer än ett mindre föremål. Inte heller har placeringen på bordet någon betydelse. Hur vi än "rör runt" bland dekorationsstenarna är det totala värdet detsamma. Kommen så här långt har eleven förstått att se på de abstrakta värdena som ges materialet. Pengar kan nu införas. Att en tia med liten area är värd mer än en femma med större area behöver inte orsaka problem. Nu är det *värdet* på mynten som räknas. Även när det gäller pengar kan de läggas hur som helst på bordet, i fickan eller i plånboken och det totala värdet är hela tiden detsamma, men det kan underlätta om pengarna ordnas. Om enbart en- och tiokronor (samt hundralappar) används kan det bidra till förståelse för positionssystemet.

Parallellt med alla dessa, mer eller mindre, vardagsnära material bör tiobasmaterial användas. Delarna kan läggas fritt på bordet och det totala värdet avgöras, men det går också att ordna var talsort för sig i en mall:

hundratal	tiotal	ental
		

Att fundera över

- ♦ Vilka barnsånger kan aktualiseras i undervisningen? *Fem små apor, En elefant balanserade, Två små händer, ...*
- ♦ Gå igenom material i klassrummet. Hur kan de på bästa sätt användas för att skapa förståelse för att bestämma antal? För att göra beräkningar?

Tal i bråkform

Genom att uppmärksamma vardagliga uttryck som "ät hälften av smörgåsen" eller "drick en tredjedel av juicen" går det att förbereda för mer formell bråkräkning. En viktig aspekt av tal i bråkform är att förstå vad som är det hela och att det är det som avgör hur stora delarna är.

Elever möter inte enbart naturliga tal i sin vardag och i undervisningen. Många får tidigt erfarenheter som kan ge förståelse för tal i bråk- och decimalform samt procent. Kim tittar på brödsken som han ska äta och säger *Jag vill ha den i två halvor. Du kan skära här*. Kim pekar i luften på mittlinjen. Han vet vad halvor är och hur mamma ska dela brödbiten. Olle tittar på de cirkelrunda platta chokladbitarna i asken. *Får jag ta två?* Olle lägger dem framför sig. *Du kan dela dem på mitten*, säger Olle och pekar längs en osynlig diameter. *Dela dem på mitten åt andra hållet också, så får jag många*. Olle räknar. Han lyckas parbilda räkneord och chokladbitar. *Åtta. Det är många. Förut var det bara två, fast större*. Kim och Olle visar och uttrycker förståelse för att när en hel delas i lika stora delar ökar antalet, men varje del är mindre än helheten. Många barn får tidigt erfarenheter som att när de sitter ensamma i soffan eller runt bordet får de all plats själva. När fler ska sitta där blir utrymmet mindre för var och en. Många har också erfarenheter av att dela rättvist. Då delar de ofta ut en i taget, en till dig, en till mig, osv.

Hur gör elever när de får i uppgift att dela fyra runda kakor rättvist till tre barn? Några exempel: De ger varje barn en kaka var. En kaka återstår. Många delar kakan i fyra lika delar, först på hälften och sedan de båda delarna på hälften. Barnen får var sin mindre bit och sedan finns en liten bit kvar. Den får hunden, eller så smulas den sönder och kastas bort. Om kakorna istället är rektangulära delar de den fjärde kakan på två sätt. Den fjärde delen hanteras på samma sätt som med den runda kakan, men några delar kakan i tre lika delar. Vid ett annat tillfälle diskuterar läraren med eleverna hur tre barn ska dela fyra äpplen lika. Lösningarna liknar kakdelningen, med ett undantag. En grupp menar att de inte kan vara säkra på att äpplena är lika stora, så det är bättre att först göra äppelmos och sedan dela lika. Rättviseaspekten får ibland oväntade följder.



Del av helhet och del av antal

Vid likadelning utgör varje del en av antalet delar i helheten eller mängden. När flaskans bubbelvatten är jämnt upphällt i fyra glas eller åtta burkar är lika fördelade på fyra personer, har varje person fått en fjärdedel av vattnet eller antalet burkar. För att bygga upp förståelsen krävs många och varierade laborativa erfarenheter, samtal och diskussioner, där det talade språket är utgångspunkten och bråkuttryck skrivs med hela ord, tex "fjärdedel". På sikt uttrycker vi helheten som 1 och de olika delarna med symboler. Eleverna behöver efterhand referenspunkter, som en halv och en fjärdedel, att förhålla sig till för att kunna storleksordna bråk.

Till vardags använder vi uttryck som *ta halva var* och *dela i fyra delar*. Då menar vi inte alltid en *exakt likadelning*, som är just grunden för att förstå tal i bråkform och måste göras synlig i undervisningen. Att ordet bråk kommer ur tyskans *gebrochen*, som betyder bruten, är bra att känna till. Tal i bråkform är just tal som brutits i mindre, men lika stora delar. Flera olika representationer bör användas parallellt och många elever behöver visuellt stöd av såväl helhet som delar under lång tid. Det visuella stödet får inte begränsas till enbart tårtor eller pizzor. Det finns mycket annat som kan utgöra *en helhet*: ett pappersark, ett snöre, en skål med vatten, en klump modellera, en frukt, en chokladkaka. Titta också på delar av *en mängd* stenar, russin, kex, klasskamrater, husdjur.

Kända svårigheter och missuppfattningar

Forskning kring att förstå tal i bråkform har identifierat områden där svårigheter och missuppfattningar är vanliga. När vi lär något nytt eller när vi vidgar och fördjupar kunskande tar vi utgångspunkt i det vi redan kan. För elever som är väl bekanta med hela tal blir de utgångspunkt i mötet med tal i bråkform. En del elever tror att en tiondel är större än en fjärdedel, eftersom tio är större än fyra. Ordningstalens likhet med muntliga uttryck för tal i bråkform, som ”nu följer fjärde delen i serien ...” och fjärdedelen, kan leda till att eleven tror att fjärdedelen är den fjärde delen i en mängd eller av en helhet. Många elever har svårt att förstå att flera bråkuttryck kan ha samma värde, $1/2 = 3/6 = 4/8 = 5/10$ osv, eller att en fjärdedel kan vara större än en halv. Den svårigheten hör samman med att eleven inte har insett att delen alltid enbart kan relateras till den helhet den är en del av. Den konkreta hälften av en småkaka är normalt mycket mindre än fjärdedelen av en pizza.

En annan kritisk aspekt är att elever inte uppfattar att symboluttrycket (tex $2/3$) är en helhet, *ett tal*, som beskriver ett förhållande. Täljaren anger antalet delar av helheten och nämnaren visar hur många delar helheten är delad i. Bråkstrecket åtskiljer täljare och nämnare, så att förhållandet syns. Detta ska alltid ses i relation till den aktuella helheten. Elever som inte förstår detta hanterar ofta täljare och nämnare var för sig, något som kan bli förödande vid bråkräkning. För att stärka ordningen även för tal i bråkform är det viktigt att gemensamt räkna högt i kör, både framåt: en hel, en halv, en tredjedel, en fjärdedel, ... och bakåt: en åttondel, en sjundedel, en sjättedel, ...

... och en orsak

Vardagsanvändning av bråk var mer frekvent förr. Avstånd mättes och uttrycktes som fjärdingsvägar, dvs fjärdedelar av en mil. I affären användes ett kvarts kilo och en halv liter. I recept kunde vi läsa $1/4$ kg, $1/2$ liter. Sinneserfarenheter gav en intuitiv känsla för en aktuell mängd. Flera uttrycks storheter oftare i decimalform och uttryck som är vanligare idag är till exempel *två av tre väljer ...*, *varannan buss ...*, *nio av tio använder ...*, *var fjärde klarar inte ...*, vilka också beskriver förhållande, alltså del av.

Att fundera över

- ♦ Del av helhet och del av antal. Hur tar jag upp det i min undervisning? Vilka vardagshändelser kan jag använda som komplement till laborativa material?

Tal i decimalform – och lite procent

Tänk att vi med bara tio siffror, och ibland ett decimaltecken, kan beskriva både avstånd till avlägsna planeter och vad en brödsmula väger. Och hur skulle det gå med resultaten i sim- och skidtävlingar om vi inte kunde bestämma och uttrycka hundralets sekunder?

Med hjälp av decimalsystemet kan vi effektivt uttrycka såväl mycket små som mycket stora tal. Genom att utnyttja siffrors inbördes position klarar vi detta med bara de tio siffrorna 0–9 och ett decimaltecken. I Sverige används normalt ett decimalkomma, men decimalpunkt förekommer också och det behöver elever uppmärksammas på. På miniräknaren och på kontoutdrag kan vi se punkten och i samband med prismärkning används även kolon för att särskilja kronor och ören. Några andra grundläggande principer för decimaltal som är viktiga att synliggöra för eleverna:

- ◇ Siffrorna på båda sidor om decimaltecknet bildar tillsammans ett enda tal.
- ◇ Ibland uppfattas decimaltecknet som ett decimaltals "mittpunkt". Så är inte fallet, entalssiffran är alltid mittpunkt. Decimaltecknet visar bara att siffran direkt till vänster om det är entalet.
- ◇ Går vi till vänster i ett decimaltal ökar värdet på varje position tiofalt, åt höger minskar det istället tiofalt.
- ◇ Nollan är fortsatt viktig för att visa var det finns tomma positioner. I talet 007 är nollorna oväsentliga, men i talet 0,007 är samtliga nollor nödvändiga för att visa att sjuan finns på tusendelsplatsen.

En missuppfattning som är vanlig bland elever som ännu inte förstått positionssystemet är att de uppfattar siffrorna till vänster om decimaltecknet som ett heltal och siffrorna till höger som ett annat heltal. De ser alltså inte decimaltalet som en helhet, ett enda tal. Bristen på förståelse för positionssystemet kan leda till att de uppfattar 3,75 som större än 3,8 eftersom 75 är större än 8. Andra kan uppfatta 1,125 som större än 1,2 eftersom 1,125 består av fler decimaler. En missuppfattning kopplad till nollan är att 0,8 är ett annat tal än 0,80. Det är inte heller ovanligt bland dessa elever att de anser att det inte finns några tal mellan 0,4 och 0,5 eller mellan 0,34 och 0,35.

Detta visar att förståelse för positionssystemet på heltalssidan är en nödvändig förkunskap till förståelse för decimalsystemet. Å andra sidan kommer elever i kontakt med decimaltal i vardagen. Särskilt den idrottsintresserade behöver förstå rapportering av tider. I många sporter räcker det inte längre med timmar, minuter och sekunder, utan tid mäts ner till tiondelar och till och med hundralet. I måttangivelser av olika slag används decimaluttryck. Världrekordet i höjdhopp innehas i skrivande stund av Javier Sotomayor med 2,45 m. Stopp! Hur läste du 2,45 m? "Två å fyrtiofem" eller "Två komma fyrtiofem meter"? Uttalar vi decimaltal så är det inte konstigt att elever uppfattar talet som två enheter med heltalen 2 och 45. Åtminstone i undervisningssammanhang är det oerhört betydelsefullt att vi uttalar decimaltalen matematiskt

korrekt. I detta fall som 2 hela och 45 hundra-delar eller 2 hela, 4 tiondelar och 5 hundra-delar. Alternativt kan vi säga 2 meter och 45 centimeter. Om det är lämpligt i sammanhanget kan vi naturligtvis även omvandla till 245 centimeter.

Med andra ord är det viktigt att samtala både om konventionen för hur vi skriver decimaltal och hur vi uttalar dem. I vardagen klarar vi oss ofta bra med maximalt två decimaler, men det kan finnas anledning att utöka till tusendelar. Exempelvis används tre decimaler vid viktmärkning i affären; en förpackning köttfärs kan väga 0,853 kg. Inom de flesta sporter nöjer man sig med hundradels sekunder men i exempelvis dragracing redovisas resultat i tusendels sekunder. Noteringen "Tävlingarna körs över $1/8$ mile (201,17 m)" kan också leda till insiktsfulla matematiska samtal med intresserade elever.

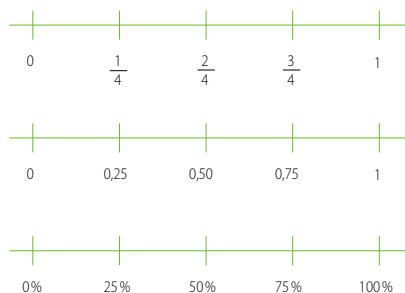
Procent

Vi omges dagligen av procentuttryck, allt ifrån formella beräkningar till vardagliga talesätt som *Det är jag hundra på!* Dagens barn och ungdomar lägger ofta märke till de staplar som växer fram på elektroniska apparater som laddas, och inser att när det kommer till 100 % är det fulladdat eller klart på något annat sätt. Precis som vid bråkräkning måste eleverna förstå vad som är det hela. 100 % av en skolklass är alla eleverna i klassen precis som 100 % av jordens befolkning är alla människor i hela världen. Fast det är 100 % i båda fallen är det otroligt stor skillnad på vad det innebär i praktiken. När förståelse finns för att 100 % är allt eller det hela behöver inte steget över till att 50 % är hälften bli särskilt stort, förutsatt att eleverna har förståelse för begreppet hälften.

I dagspressen finns det dagligen annonser baserade på procentuttryck och i reatider blir vi fullständigt översköjda av procentskyltar. Låt eleverna leta bilder som visar olika reaskyltar eller annonser. Diskutera ord som ordinarie pris, reapris, rabatt, rea/realisation, sale, etc. Vad är det hela? Vad syftar annonsen på? Om det står *Rea 50 %*, hur vet man hur mycket man ska betala? Hur kan man ta reda på hur mycket 50 % av något är?

Tal i bråkform, decimalform och procentform

En illustration som den nedan kan ge stöd då elever börjar bygga upp förståelse för hur de olika representationsformerna för tal i bråk-, decimal- och procentform hör samman. Den stora skillnaden är att för tal i bråk- och decimalform är helheten *ett* och för tal i procentform är helheten *hundra*. Låt eleverna ge exempel på företeelser i vardagen som brukar uttryckas i en av formerna och se tillsammans efter hur de kan uttryckas på de båda andra sätten. I en förpackning med en liter glass har hälften jordgubbssmak. Det kan också uttryckas som att 0,5 liter glass har jordgubbssmak, $1/2$ liter har jordgubbssmak eller 50 % av glassen smakar jordgubb. Hur vi än väljer att uttrycka oss är mängden jordgubbsglass densamma. Titta sedan på illustrationen och hjälps åt att förklara varför det inte står $1/2$ utan $2/4$ på den översta tallinjen. Och vad är skillnaden på 0,5 och 0,50 liter?



Att fundera över

- ♦ Vilken uttrycksform verkar eleverna bekvämast med? Hur kommer det sig? Vad bör det leda till i undervisningen?

Vår spatiala värld

Vi lever alla i en tredimensionell värld där förståelse för form, läge, riktning och avstånd är avgörande för att vi ska få en god rumsuppfattning. Den är bland annat viktig för att vi ska hitta till olika platser och kunna förklara var saker finns placerade.

I vårt dagliga liv rör vi oss i miljöer som hemmet, skolan, närsamhället och den omgivande naturen; några välkända andra mer obekanta. En del av det vi kallar verklighetsuppfattning handlar om att förstå sambanden mellan såväl fasta som rörliga objekt i dessa miljöer. För att kunna känna igen, hitta och orientera oss i en komplex omvärld behöver vi kunna urskilja särdrag samt strukturer och organisera våra intryck. Vi behöver även formulera språkliga uttryck som beskriver form, läge, riktning och avstånd, och som vi alla kan tolka lika. Detta brukar benämnas som spatial förmåga eller rumsuppfattning och kan kortfattat beskrivas som relationer inom och mellan objekt samt mellan objekt och omvärld. Det handlar om att med hjälp av avstånd, riktning, höjd, djup och position kunna förstå, använda och utbyta information om objekts positioner. Spatialt tänkande handlar om att föreställa sig rummet, var man själv och annat befinner sig och de språkliga uttryck som beskriver rummet. En annan aspekt är att veta hur rumsliga idéer kan representeras liksom hur och när man ska tillämpa dessa färdigheter. Spatial orientering, eller lokalisering, innebär att uppfatta och hantera den egna positionen i relation till annat i omgivningen men också förståelse för att såväl egna som andras positioner kan ändras genom förflyttningar i någon riktning.

Ett av skolans uppdrag är att förbereda elever för att leva och verka i samhället. För att kunna orientera sig och ta sig fram, hitta, ta till sig information i bilder, avbildningar och kartor är god rumsuppfattning avgörande. Det matematikområde som bland annat behandlar rumsuppfattning är geometri, den gren av matematiken som behandlar avstånd, vinklar, ytor, kroppar och former.

Position

Utvecklingen av spatial orientering börjar tidigt i livet. Nyfödda lokaliserar exempelvis maten genom att vrida på huvudet. Genom beröring, ögonkontakt och att barnet hör röster i rummet, utvecklar barnet sin uppfattning om var den egna kroppen börjar och slutar. När vi lyfter och bär barnet ser det omgivningen från olika håll och i olika perspektiv. Erfarenheterna förstärks när den som lyfter och bär talar med barnet om det som händer och använder lägesord och ord som beskriver riktning. När barn börjar förflytta sig själva fördjupas bilden. De observerar omvärlden från olika perspektiv och utvecklar förståelse för rummet genom utforskning. Erfarenheterna leder till att ett slags inre tredimensionellt system konstrueras och utvecklas, och efterhand till förståelse för språkliga uttryck för relativa avstånd och lägen. De tidigaste språkliga uttrycken om rumsliga förhållanden: *i, på, under, upp* och *ner* är gemensamma

i många språk. Något senare tillägnar sig barn uttryck om närhet: *bredvid* (*vid sidan av*) och *mellan* och så småningom ord som hänvisar till *framför* och *bakom*. Språkliga uttryck om form, lägen, riktningar och avstånd är nödvändiga när vi ska kommunicera om rummet. Små barn använder kroppsspråk för att visa var något är eller vart de vill ta sig: *upp*, *ner*, *framåt*, *bakåt*, *åt sidan* ... *Vart ska vi?* undrar farmor. Albin (10 mån) visar genom att luta sig och peka åt det håll han vill komma. Budskapet är tydligt och kan inte missförstås. Maja (15 mån) drar i farmors hand och pekar. Utan att använda ord visar hon både vad hon vill och vart hon vill gå. Erfarenheter förstärks genom att omgivningen ger språkligt stöd. Den språkliga förmågan stärks när barn tolkar uttryck: *upp*, *lite till*, *hitåt*, *bakom*, *högt upp*, *överst* och efterhand också själva uttrycker och beskriver lägen, avstånd och riktningar.

Redan ettåringar har lärt sig att upptäcka vad någon annan tittar eller pekar på. De följer en osynlig linje mellan ögat eller fingret på någon annan och aktuellt föremål. Erfarenheter leder också till insikt om att det som döljs av en dörr, ett lock, en filt eller ett avstånd faktiskt finns fast det för tillfället inte är synligt. De lär sig att något kan hindra det som är bakom att synas, exempelvis genom tittut-lekar. Genom upprepade erfarenheter utvecklas inre föreställningar. Dessa inre bilder är viktiga för att kunna söka efter sådant som inte finns framför ögonen, t ex de rena strumporna i byrålådan eller glasen i skåpet. Lekar som *Kurragömma* och *Gömma nyckeln* bygger på och utvecklar sådan förståelse.

Olika kulturer

Språkliga uttryck för att beskriva lägen och riktningar formas utifrån den egna kulturens förutsättningar och behov. En folkgrupp som bor isolerat bland bergen utvecklar många olika språkliga uttryck om lutningar på bergssidor, men färre ord som beskriver horisontella lägen. Befolkningen i en tropisk ögrupp har många olika uttryck för hur strömmar går och hur vågor bryts för att de ska kunna navigera säkert. Alan Bishop refererar Rik Pinxten i *Mathematical enculturation*:

Alla kulturer har sina specifika sätt att representera världen. Men de hänvisar alla till samma sol, måne eller jord och alla gör det med hjälp av samma grundläggande verktyg för att samla kunskap och förståelse, dvs genom att manipulera ting med händerna, genom att se på världen genom identiska ögon, genom att flytta runt likadana kroppar på samma sätt t ex gå framåt och bakåt, vända sig i ett horisontellt plan, och så vidare.

(s 29, egen översättning)

Språket fortsätter att utvecklas för att beskriva rörelser och lägen. Förståelse för förminskning av omvärlden, som på kartor, ritningar och fotografier, utvecklas genom aktiviteter i omvärlden som kodas och symboliseras på olika sätt. I möten med nya miljöer tillägnar vi oss inledningsvis övergripande bilder av karaktär, yttre avgränsningar och kanske några kännetecken. Efterhand som vi befinner oss i miljön lägger vi märke till allt fler detaljer om vad som finns nära och längre bort, vad vi kan se och vad vi kan nå från en fast position eller när vi förflyttar oss. Ett objekt man ser på nära håll ser större ut än om man ser samma objekt på avstånd. Erfarenheter utvecklar förståelse för att föremålets storlek är konstant. På nära håll är bussen på gatan stor jämfört med människorna vid busshållplatsen. På långt håll ser både buss och människor mindre ut, men relationen i storlek är densamma.

Lägesord

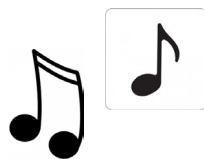
Frågan *var?* är central för att lokalisera någon eller något. Svaren *här* eller *där* räcker inte alltid. Det man söker måste ses i relation till andra saker i omgivningen, bland annat med hjälp av lägesord: *i, på, över, under, först, sist, före, efter, upp, ner, ovanpå, överst, underst, i början, i slutet, i mitten, mitt på, framför, bakom, bredvid, mellan, högst upp, längst ner, nära, närmast, utanför, innanför, ovanför, nedanför, uppåt, neråt, fram, bak, framåt, bakåt, till, från, vänster, höger, etc.* För att dessa ska bli och förbli aktiva i elevers ordförråd måste de ständigt aktualiseras i undervisningen. Skillnader mellan innebörder i närbesläktade lägen som *ovanför* – *ovanpå* eller *under* – *nedanför* behöver diskuteras och exemplifieras. För att lokalisera objekt i rummet räcker det inte alltid med lägesord. Informationen kan behöva kompletteras med beskrivningar av form, storlek och färg.

- Snälla Malte, hämta min matlåda i kylskåpet.
- Här finns många lådor. Vilken är din?
- Den står på översta hyllan.
- Där står fyra lådor ...
- Oj då ... Den är grön.
- Tre är gröna ...

Verkligheten avbildas

Rummet kan representeras av mer eller mindre naturtrogna bilder och modeller men även av schematiska kartor. Föremål kan representeras av ritade avbildningar eller symboler medan "överst i tredje lådan i hurtsen till höger om dörren" är en position som uttrycks språkligt. Att överföra sådana representationer och språkliga uttryck till en kartbild eller ett koordinatsystem är en komplex process. När elever gör en ritning över sitt klassrum blir resultatet ofta en kombination av olika perspektiv. Golvet ses ovanifrån, dvs i fågelperspektiv, medan föremål ses ritade helt eller delvis från sidan. Möblers position är ofta godtycklig utmed väggar och mitt på golvet. Sådana erfarenheter bekräftar den komplexa processen. För att hela bilden ska ses ur samma perspektiv, tex ovanifrån som på kartor, är det nödvändigt att eleverna får observera, diskutera och dokumentera hur olika föremål ser ut i fågelperspektiv, grodperspektiv och från olika håll i sidled. För att placeringen ska stämma med originalet krävs mätningar. Om föremålen i rummet ska behålla sin relativa storlek krävs ytterligare mätningar och förståelse för förminskning och skala.

I kartor och koordinatsystem representeras objektens positioner av punkter. För att lokalisera en punkt i den tvådimensionella kartbilden måste angivna markeringar på båda axlarna sökas upp. För att finna skärningspunkten rör man sig vinkelrätt inåt i kartbilden. Skärningspunkten utgörs ofta av en ruta, inom vilken man kan hitta den sökta orten, floden eller berget. I koordinatsystem som används i ritningar över exempelvis byggnader, avloppsnät och elnät har axlarna metriska skalor. Eftersom relationerna mellan punkterna är lika kan systemet användas för att representera viktiga geometriska egenskaper och möjliggöra resonemang om avstånd mellan punkterna. För att hantera detta måste man kunna analysera avstånden och hur de kan bestämmas med hjälp av koordinater.



Där är där man inte är

Här är här där man är

Åh här har man alltid med sig

Här har man alltid med sig

Från "Fem myror..."

I ett koordinatsystem ska två vinkelräta och oberoende axlar hanteras. Julie Sarama visar i en studie att när elever inledningsvis arbetar med koordinatsystem är de osäkra på vilken som är x - respektive y -axel. De tar inte heller vara på axlarnas metriska markeringar. För att finna punkten (8, 9) räknar många åtta linjer åt sidan och nio uppåt. Koordinaterna betraktas som rörelsesteg. Om axlarna då enbart är markerade i multiplar av tio blir uppgiften svår att hantera. Ett annat vanligt misstag är att när första koordinaten är noll, t ex (0, 7), blandar eleverna ihop x - och y -koordinater och rör sig först horisontellt. Studien visar också att elever inte inser att koordinater utgår från en särskild punkt, origo (0, 0).

Jean Piaget observerade olika nivåer av förståelse hos elever som skulle markera en punkt på ett papper, på samma ställe som på en förlaga. Aktuell forskning bekräftar processen.

1. Eleverna uppskattade punktens placering visuellt. De som använde mätverktyg gjorde det på ett felaktigt sätt.
2. Eleverna gjorde en mätning, t ex hur långt in från en sida på papperet som punkten fanns.
3. Eleverna insåg att de behövde två mätningar. De tog utgångspunkt i ett hörn och försökte visuellt bevara linjens lutning. Några gjorde två mätningar.
4. Eleverna mätte uppifrån och nerifrån. Mätningarna var inte planerade utan kom till genom "trial and error".
5. Eleverna insåg att båda dimensionerna måste beaktas och att mätningarna måste vara vinkelräta mot varandra. De konstruerade ett koordinatsystem.



Vanligtvis kommer inte svenska elever i kontakt med tredimensionella koordinatsystem i matematikundervisningen förrän tidigast på gymnasiet. De kan ändå redan tidigt få förståelse för ett koordinatsystem med tre axlar (x -, y - och z -axlar) genom att exempelvis spela tredimensionellt luffarschack.

Att fundera över

- ♦ Hur brukar jag och mina elever förklara var saker finns i klassrummet och på skolan? Vilka lägesord använder vi? Vilka lägesord kan behöva aktualiseras eller tillföras?

De flesta barn lär sig tidigt att känna igen kvadrater, trianglar och cirklar, men geometriska former är så mycket mer. Vilka egenskaper har de? Vad heter de? Vad är lika och vad skiljer? Vilka är de matematiska benämningarna på alla tredimensionella föremål som vi möter dagligdags?

Precis som när vi möter nya miljöer är det helheten som dominerar när vi inledningsvis tittar på ett objekt. Geometribegreppen har, till skillnad från många andra begrepp, föreställande egenskaper och elevers förståelse utvecklas successivt genom konkreta erfarenheter där flera sinnen involveras och undervisningen uppmärksammar dem på allt fler detaljer. Elevers tidigare förståelse utmanas och omprövas och efterhand smälter deras inre föreställningar om avbildningar och definitioner samman till en helhet. Genom sådana erfarenheter utvecklar elever en intuitiv känsla för olika geometriska egenskaper och samband, *det geometriska ögat* utvecklas.

Matematikdidaktikern Peter Bryant menar att barn redan i mycket tidig ålder på många sätt är experter på former. De kan skilja mellan och komma ihåg abstrakta geometriska former som kvadrater, trianglar och cirklar. Under skoltiden genomgår sedan kunskandet om former en serie radikala förändringar. Först utvecklas förmågan att skilja mellan och klassificera former genom sinnesintryck. Så småningom kan de också analysera och kommunicera formernas egenskaper. Det är väl känt att det är lättare att lära sig korrekta uttryck från början än att lära om. Undervisningen bör därför redan från början använda korrekta matematiska ord och uttryck och förankra förståelsen i elevernas språk. Barns spontana uttryck för en rektangel är ofta *fyrkant*, som i någon mening beskriver en egenskap hos formen. Genom undervisningen ska eleven utveckla både språk och förståelse även för andra slags "fyrkanter".

Teori om geometrilärande – van Hiele-nivåer

Aktuell forskning kring geometrilärande relaterar ofta till den teori som utarbetades av forskarparet van Hiele på 1980-talet. Teorin beskriver hur lärandet sker i nivåer, med ökande abstrakt tänkande och där varje individ genomgår nivåerna i tur och ordning. Senare forskning har kompletterat denna teori och visat att nivåerna inte behöver vara strikt åtskilda, att elever kan arbeta på en nivå i ett sammanhang och på en annan i ett annat, och att det finns mellanliggande steg som också passeras. Teorin kan ändå fungera som ett stöd för planering av geometriundervisningen.

- ♦ Nivå 1. *Igenkänning, visualisering*. Eleven lär sig vissa termer och känner igen en geometrisk form som en helhet, men ser inte till dess delar. Eleven kan känna igen en bild av en rektangel men är i allmänhet inte medveten om dess egenskaper, t ex att den har parallella sidor. Eleven liknar gärna former vid konkreta objekt, som att rektangeln ser ut som en dörr eller en fönsterruta.

- ◊ Nivå 2. *Analys*. Eleven kan analysera egenskaper hos figurer genom att exempelvis vika papper, mäta, rita på rutat papper eller använda ett geobräde. Eleven kan inse att motstående sidor hos en rektangel är parallella och lika långa men kan ännu inte se sambandet mellan rektanglar och rätvinkliga trianglar eller se kvadraten som en rektangel eller romb.
- ◊ Nivå 3. *Abstraktion*. Eleven kan ordna figurer logiskt och t ex inse att alla kvadrater är rektanglar men att alla rektanglar inte är kvadrater, förstå inbördes samband mellan figurer och inse vikten av korrekta definitioner. Eleven kan ännu inte härleda varför exempelvis diagonalerna i en rektangel är lika långa eller dra logiska slutsatser av samband mellan egenskaper.
- ◊ Nivå 4. *Deduktion*. Eleven kan dra slutsatser utifrån geometriska påståenden och t ex bevisa vinkelsumman i trianglar eller att diagonalerna i en parallelogram skär varandra i två lika delar. Tänkandet är i allmänhet inte så precist att eleven förstår nödvändigheten av att utgå från allmänt erkända grundförutsättningar inom matematiken, så kallade axiom.
- ◊ Nivå 5. *Stringens*. Eleven förstår vikten av precision när man arbetar med geometris grunder och kan utveckla ett resonemang utan att använda konkreta föremål. Eleven kan också analysera och jämföra olika geometrier, t ex jämföra en triangel i planet (t ex på ett papper) med en triangel på en sfär (t ex på en jordglob).

Kunnandet vidgas och fördjupas för varje nivå. Genom nivåerna utvecklas elevens förmåga att uttrycka sig allt mer matematiskt korrekt och van Hiele menar också att för att utvecklas och nå nästa nivå behöver elever stimulans. I lärandet samverkar biologisk mognad, kontakt och interaktion med omgivningen samt vägleda, utforskande inlärningsprocesser. Förutsättningen för en fördjupad förståelse är att undervisningen utgår från sammanhang som är välbekanta för eleven och har en tydlig kontinuitet och progression. För att hjälpa eleven att nå nästa nivå av tänkande kan undervisningen struktureras i olika faser. (Jämför gärna med arbetsgången i ett laborativt arbetssätt.)

1. *Observation/information*. Lärare och elever samtalar om området som ska undersökas. Eleverna observerar föremål och figurer och både lärare och elever ställer frågor. Läraren hjälper eleverna att utveckla relevant ordförråd för den aktuella nivån.
2. *Vägledad undersökning*. Genom en noggrant strukturerad följd av aktiviteter blir eleverna bekanta med det som är karakteristiskt för den nivå de arbetar på.
3. *Förklaring*. Eleverna bygger på tidigare erfarenheter och berättar om sina upptäckter. System av sammanhang börjar bli tydliga. Läraren hjälper även nu eleverna att utveckla ett ändamålsenligt och korrekt språk.
4. *Fri undersökning*. Eleverna får mer komplicerade uppgifter och flerstegsuppgifter som kan lösas på flera sätt, men också uppgifter som de inte kan lösa fullständigt.
5. *Sammanfattning*. Lärare och elever ser tillsammans tillbaka och sammanfattar det de arbetat med för att få överblick över begrepp och se sammanhang. Läraren sätter in den nya kunskapen i ett vidare sammanhang, men presenterar inte något nytt innehåll.

Två och tre dimensioner

Vi omges alltid av former i två och tre dimensioner. Små barn skiljer i första hand mellan former som avgränsas av räta eller krökta linjer men de skiljer inte mellan former inom respektive grupp. Forskning visar att det är lättare att upptäcka skillnader än likheter. Elever måste uppmärksammas på och få erfarenhet av att urskilja och särskilja och att uttrycka sina upptäckter språkligt. Ett förslag för undervisningen är att eleverna sorterar en mängd former, både konkreta och på bild, i kategorierna *tillhör* eller *tillhör inte*, och att de motiverar sina val. I motiveringen får läraren tillgång till hur eleverna uppfattar likheter och skillnader, och hur de definierar och beskriver formers egenskaper.

I illustrationer och digitala medier representeras verklighetens tredimensionella kroppar av tvådimensionella bilder. Kopplingen mellan dessa verkar vara oproblematiske för små barn. På frågan om var bollen/muggen/bananen är pekar Molly (14 mån) helt rätt i sin pekbok eller på surfplattan. För att utveckla förmågan att urskilja former i olika sammanhang kan det vara bra att fokusera på en form och gå på formjakt. Eleverna i en klass hittade först cirkelformade tallrikar, speglar, knappar, brunnslöck och lampor, sedan rektangulära dörrar, fönster, bord, handdukar, dukar, mattor och tavelramar.

Hur känner vi igen en cirkel? *Den är alldeles, alldeles rund. Inga bucklor någonstans*, förklarar ett barn i förskolan. En formell definition är *kurva i planet som består av alla punkter som har ett givet avstånd (radien) till en fix punkt (medelpunkten)*. Cirkelformen ser alltid likadan ut oavsett position. Med tillräckliga erfarenheter uppfattar våra sinnen det, även när vi ser den i ett perspektiv snett ovanifrån. Hur är det med andra grundläggande former som kvadrat, rektangel, triangel? Vilka likheter och skillnader finns? Hur kan de beskrivas? Vilka egenskaper fokuserar eleverna på? Hur uttrycker de sig?

Undervisningen måste ge erfarenheter av att se de geometriska formerna i olika positioner. Läroböcker presenterar ofta tvådimensionella former i samma position för eleverna och det är lätt hänt att läraren ritar eller visar former på samma sätt gång efter gång. När eleverna sedan möter formerna i andra situationer och andra lägen är det inte säkert att de känner igen dem. Laborativa matematikmaterial har fördelen att de inte har en fast placering utan enkelt kan vridas och vändas. Bara det att en elev ser en kamrats material från andra sidan bordet kan öppna upp för förståelsen att en form är densamma hur den än orienteras. De olika geometriska grundformerna måste också varieras på fler sätt än bara hur de orienteras. Vikten av att elever tidigt får möta exempelvis olika typer av trianglar och inte enbart liksidiga kan inte nog betonas.

Dela upp och sätta samman

Enligt van Hiele är en av de största förändringarna i elevers analys av former att de blir medvetna om att alla former, särskilt de komplexa, kan delas in i mindre delar där de skilda delarna till och med kan ha olika form. Det är en förståelse som är väsentlig för att förstå areabegreppet. Insikten att en rektangel kan sättas samman av två identiska trianglar är viktig för att skapa förståelse för hur trianglars area beräknas. Vilka nya former kan bildas när en kvadrat delas längs mittlinjen eller diagonalen? Hur förhåller sig arean i de olika formerna till varandra? Varför?

Stråvornaaktiviteten *Geometriskt bokmärke* beskriver hur ett konkret arbete med omkrets och area kan resultera i ett fint bokmärke. Idén med att tillverka ett bokmärke kan också användas när syftet är att eleven ska få erfarenhet av att dela kvadrater och rektanglar till trianglar.



Att kunna föreställa sig och att beskriva effekterna av att sätta samman och dela upp geometriska former är alltså viktigt. Förmågan att förutse och visualisera förändringar utvecklas efterhand och till en början kan elever enbart visualisera och operera med formers helhet. För att utveckla denna förmåga till inre föreställningar är undersökande aktiviteter en förutsättning. Från att sakna förmågan att sätta samman former utvecklar eleverna den gradvis genom att ta vara på kännetecken och egenskaper, de skapar bilder med formerna och slutligen uppfattar de sammansättningar av former som helheter och nya former. Efterhand hanterar de också allt fler detaljer. Clements och Sarama identifierade fyra nivåer av förståelse och deras forskningsresultat ger starkt stöd för giltigheten i dem.

- ♦ *Pre-composer.* Eleven hanterar varje form för sig men kan inte pussla ihop till andra former eller till en likadan större form. På denna nivå placeras formerna en bit från varandra. Eleven klarar att lägga enkla pussel om bitarna inte behöver vridas.
- ♦ *Piece-assembler.* Eleven bildar figurer genom att lägga former intill varandra. I fria uppgifter är det vanligt att varje form utgör en specifik del av bilden, t ex ett ben. Eleven klarar att täcka enkla former med markerad kontur. Förmågan att vrida och vända är begränsad.
- ♦ *Picture-maker.* När elever fritt får sätta samman former för att skapa bilder, prövar de sig fram för att hitta lämpliga bitar, men kan inte förutse vilka bitar de ska välja.
- ♦ *Shape-composer.* Eleven kombinerar olika former för att med stigande avsikt och förutseende skapa nya figurer samt väljer former både utifrån vinklar och sidlängd. Slutligen överväger eleven olika alternativa lösningar.

(De engelska benämningarna används eftersom det inte finns vedertagna svenska översättningar)

Förstoring och förminskning

Arbete med förstoring och förminskning kan ge intressant information om elevers geometriska förståelse. Vad menar vi när vi säger att en figur är dubbelt så stor som en annan? Är det sidornas längd som har dubblats eller är det arean eller volymen? Erfarenheter från såväl klassrum som forskning säger att elever tolkar det på olika sätt, några uppfattar en längdskala och andra en area- eller volymsskala. Konsekvenserna blir tydliga när resultaten jämförs. För att säkerställa att alla elever tolkar uppgiften att göra en figur dubbelt eller hälften så stor på samma sätt måste förutsättningarna diskuteras. Det är nödvändigt att i varje enskilt fall fastställa vilken skala som avses.

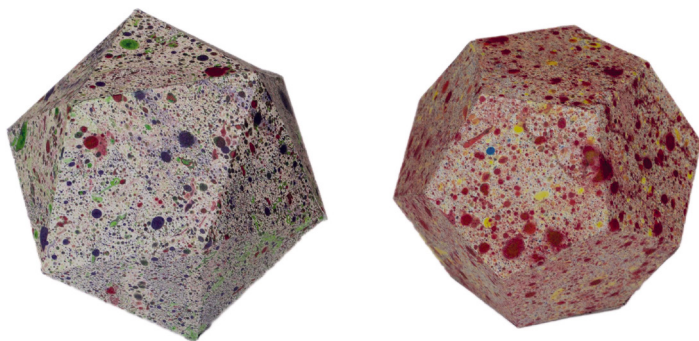
Strävornaaktiviteten *X-kuber* kan användas av läraren för att ta fram material som kan åskådliggöra förhållandet mellan längd-, area- och volymsskala. Vik och sätt samman en kub av A4-papper och minst två, men gärna fyra eller helst åtta kuber av papper i storleken A6 (ett kvarts A4-papper). Med dessa går det att åskådligt visa att om kantlängden på den stora kuben halveras får två av de



mindre kubernas kanter plats längs kanten på den stora kuben, längdskala 1:2. Areaskalan förhåller sig som 1:4 då det går att ställa fyra små kuber direkt på den stora. Volymskalan kan visas genom att åtta små kuber formade till en stor kub har samma storlek som den stora, alltså 1:8.

Tredimensionella kroppar

Vår omvärld domineras av tredimensionella kroppar. Hus består förenklat ofta av ett eller flera sammansatta rätblock med olika höjder, bredder och djup. Ibland kan det finnas inslag av cylindrar, prismor, pyramider eller koner i olika storlekar. I lek- och idrottssammanhang finner vi puckar (cylindrar), bollar i olika storlekar (klot) och rugbybollen som är en ellipsoid. I olika sammanhang används koner som avgränsning och markering. Föremål i våra hem som dricksglas, grytor, burkar, förpackningar, böcker och möbler kan ofta beskrivas med hjälp av benämningarna på tredimensionella kroppar. När vi tittar närmare på många föremål ser vi att sidoytorna är cirklar, trianglar, rektanglar eller andra månghörningar. En traditionell fotboll är sammansatt av svarta liksidiga femhörningar och vita sexhörningar. Liksidiga trianglar eller femhörningar som sätts samman i tre dimensioner bildar de klotliknande formerna ikosaeder (20 liksidiga trianglar) och dodekaeder (12 liksidiga femhörningar).

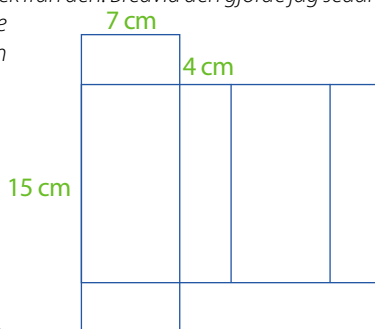


Sambanden mellan tvådimensionella former och tredimensionella objekt är många. En lärare ställde frågorna: *Vilken form får du när många likadana cirklar (trianglar, rektanglar) läggs ovanpå varandra? Det blir en hög cirkel*, menade Milan. Han och kamraterna hade ännu inte benämningarna cylinder, prisma och rätblock klara för sig. Eleverna kan upptäcka samband genom att undersöka utbredningar av tredimensionella kroppar. Klipp tex upp hörnen på en skokartong och vik ut sidorna. Det syns hur sidoytorna är fästa vid bottenytan och vilka de enskilda formerna är. Detta ger erfarenheter som hjälper eleverna att utveckla förståelse för samband och för att själva kunna konstruera geometriska kroppar.

Utbredningen av en toarulle (cylinder) är en rektangel, om den klipps upp vinkelrätt från kortände till kortände. Vilken form har utbredningen om toarullen istället klipps upp i den synliga skarven? Elever som undersökte vilken tredimensionell form som bildas av en del av en cirkel, upptäckte sambandet mellan cirkeln och konen. De upptäckte också att radiens längd och hur stor del av cirkeln som används avgör konens höjd och bottenarea. Nedan följer några exempel där elever skulle konstruera tredimensionella kroppar med bestämda mått. Kropparna blev sedan utgångspunkt för en ny uppgift.

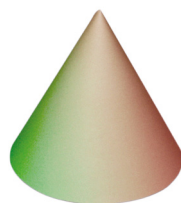
Rätblock, med måtten längd 15 cm, bredd 4 cm och höjd 7 cm.

Först gjorde jag en $15 \cdot 4$ cm rektangel och utgick från den. Bredvid den gjorde jag sedan en annan rektangel $15 \cdot 7$ cm för att det skulle bli höjden. Sedan fortsatte jag att bygga på en rektangels utbredning.



Kon, basens omkrets 14 cm.

Jag gjorde en halvcirkel med diametern 10 cm. Då är omkretsen på hela cirkeln ungefär 30 cm och halva cirkeln 15 cm. Man skulle ha 14 cm, då har jag en cm att klistra på.



För att få syn på utbredningen av en prisma tog en elev hjälp av en Tobleroneask.

Att fundera över

Kan du för dig själv förklara, både matematiskt och genom att exemplifiera med konkreta föremål, hur följande kroppar ser ut?

- ♦ kub, tetraeder, oktaeder, ikosaeder, dodekaeder, dvs de platonska kropparna
- ♦ rätblock
- ♦ klot
- ♦ cylinder
- ♦ ellipsoid
- ♦ prisma
- ♦ pyramid

Även om du känner dig säker, slå gärna upp orden i ett matematiskt lexikon och jämför med dina egna förklaringar. Cylinder är ett begrepp som för många visar sig vara lite mer omfattande än vad de först trodde. En cylinder måste inte alltid se ut som en konservburk ...

Mätandets idé

Mätning ger förutsättningar för att överblicka och strukturera omvärlden. Det handlar om att jämföra, ordna och kvantifiera viktiga egenskaper. Mätandets idé innebär att om olika personer genomför en mätning eller om mätningen genomförs vid skilda tillfällen ska resultatet bli detsamma.

Redan från födseln finns vi en omvärld där jämförelser av olika slag görs mellan egenskaper hos fenomen. I alla kulturer finns företeelser som betraktas som viktiga, men vad som värdesätts och mäts beror på den lokala miljön och dess behov. Det som ses som självklart i den egna kulturens mätsystem uppfattas ofta som universellt och generellt, men det som vi tycker är viktigt att mäta kvantifieras inte alls i en del andra kulturer. Sådana skillnader tyder på att det måste finnas kulturella behov av att jämföra och ordna för att mätande och måttenheter ska utvecklas.

Nedslag i historien visar att metoder för mätning inte bara har utformats för vardagliga behov utan också för naturvetenskapliga syften som att förstå solsystemet eller att navigera på världshaven. Numera översköljs vi av mätdata som beskriver företeelser inom högst varierande områden: befolkningstillväxt, fattigdom, hälsa, infrastruktur, logistik, löner, börsutveckling, arbetslöshet, sophantering, skolresultat, energiförbrukning, väder ... Resultat redovisas i tabeller, diagram, kurvor och scheman. För att underlätta för överblick och jämförelser redovisas ibland resultat från olika mätningar i samma bild eller diagram. Mätning, redovisning och tolkning av mätresultat är med andra ord en betydande del av vår vardag och mätdata utgör ofta underlag för beslut på olika samhällsnivåer. Det är därför ett viktigt område i matematikundervisningen.

Måttenheter

Troligen var människokroppen det första mätverktyget. Längdenheter som fingerbredd, tum, handsbredd, aln (underarm), fot och famn återfinns i många kulturer, men innebörden har varierat beroende på vems kropp som har betraktats som normerande. Några gamla svenska måttenheter som inte längre används är areaenheter som tunnland, skäppland, kappland; volymenheter som jungfru, kvarter, stop, kanna, tunna, fat, kappe; massaenheter som lod, skålpund och lispund. Få i vår tid har erfarenhet av dem. Historiskt har också enheter som dussin, tjug, bok och ris varit vanliga. Dussin och tjug är fortfarande i bruk, bok och ris användes om buntar med pappersark.

När människor började röra sig mellan olika handelsplatser blev det uppenbart att samma måttenheter inte användes överallt, liksom att mått med samma namn inte hade samma värde. Det ledde till att myndigheter satte upp "kontrollenheter" vid stora handelsplatser och missförstånd i handeln ledde i vår del av världen till att ett enhetligt måttssystem avseende längd, area, volym och massa, utarbetades runt sekelskiftet 1700–1800. Exempelvis bestämdes att grundenheterna för längd, massa och volym fick namnen meter, gram och liter. Större och mindre enheter kunde bildas genom prefix.

kilo = tusen
hekto = hundra
deka = tio

deci = tiondel
centi = hundradel
milli = tusendel

Mätandets beståndsdelar

Mätandets idé bygger på att om olika personer genomför en mätning, eller om samma mätning genomförs vid olika tillfällen, ska resultatet bli detsamma. För att det ska hända är det nödvändigt att samma enhet, och möjligen samma metod, används. I mätandets idé ingår förståelse för att den valda enheten ska packas tätt samman, utan mellanrum eller överlappning, i, på eller utmed det som ska mätas. Enheten itereras, upprepas. Mätning av en storhets precisa mått bygger också på en förståelse för att objekt kan delas in i lika stora enheter. Utan den förståelsen saknar mätning mening och ger inga adekvata svar.

Storhet = mätetal + (prefix)enhet

Mätning hör samman med *mer än* och *mindre än*. Genom jämförelser av objekt utvecklas idén om att storleksordna. I många kulturer och yrkesområden är ögonmått, dvs uppskattning, en bärande idé. För att kunna uppskatta krävs många erfarenheter där vi skaffar referenser att förhålla oss till. Ibland räcker varken jämförelser eller uppskattning, utan större precision i mätningen är nödvändig. När behov av mer precisa mätningar uppstår, utvecklas också språkliga uttryck för ordning och jämförelser. Ju större behovet är av precision, desto mer detaljerade, systematiska och precisa är de mått, måttssystem och redskap som utvecklas.

Ord som stor, liten, tung, lätt, lång, kort och deras komparationsformer används ofta i mätsituationer. Att säga att något är stort, tungt eller kort saknar egentlig mening, men i ett sammanhang där ett objekt jämförs med ett annat blir det begripligt och meningsfullt. Storlek kan uttryckas med hjälp av olika storheter: längd, area, volym, massa, hastighet, effekt, vinkel etc. Sådana storheter har formella standardiserade mått och enheter. Storlek hos människor betyder ofta längd men också massa (vikt) och ibland klädstorlek. Vad menar vi när vi talar om storleken på en tallrik, en TV, en penna, en motor, ett rum, en kopp, en bräda, en spik eller en sten?

Undervisning om mätning handlar såväl om att jämföra och uppskatta som att göra precisa mätningar. För att förstå mätning med standardiserade metoder och enheter behöver eleverna först erfarenheter av direkta och indirekta jämförelser och av mätning med informella redskap och enheter. Innebörden i en informell enhet måste definieras för att vara begriplig till skillnad från de formella enheterna som är definierade i konventioner och lagstadgade.

Mätredskap

Hjälpmedelskompetens innebär att kunna använda hjälpmedel och redskap och känna till deras möjligheter och begränsningar. Förutom tekniska och IT-relaterade hjälpmedel samt laborativa material ingår mät- och ritredskap som linjaler, gradskivor, passare, vinkelhakar, vågar och mätglas. Det tycks ibland så självklart att elever ska kunna hantera hjälpmedel korrekt och effektivt att undervisning om och med dem glöms bort.

Att fundera över

- ♦ Vilka måttenheter använder eleverna spontant i lek, spel och vardagsaktiviteter? Hur kan dessa erfarenheter tas tillvara i undervisningen?

Mäta längd

Längder kan mätas med både informella och formella enheter, men vad som än används är det lika viktigt att olika enheter inte blandas och att de täcker hela avståndet utan att det blir tomrum eller överlappningar.

Maja har sett andra använda måttband och håller det mot bordet, väggen och sig själv och säger olika räkneord. Arras använder linjalen på ungefär samma sätt. Vid varje "mätning" säger han *femti–femti*. Maja och Arras har förstått att måttband, linjal och räkneord används vid mätning, men inte *hur*.

Direkta och indirekta jämförelser

För att utveckla förståelse för längdmätning behöver elever erfarenheter av både direkta och indirekta jämförelser. En direkt jämförelse kan innebära att avgöra vilket av två snören som är längst genom att lägga dem bredvid varandra. Agnes och Stephanie upptäckte att de hade samma skostorlek och provade varandras skor. *Konstigt, dina skor känns mycket mindre än mina, hur kan det komma sig?* Flickorna satte sig på golvet med fotsulorna mot varandra och hälen mot golvet. Nu hade de en gemensam utgångspunkt och kunde avgöra likheter och skillnader. *Min stortå slutar längre fram än din. Titta, min fot tar mer plats på bredden än din.* För att mätning genom direkt jämförelse ska vara tillförlitlig måste den utgå från en gemensam punkt. Det blir då möjligt att jämföra egenskaper och uppmärksamma avstånd.

Små barn tar inte hänsyn till föremåls ändpunkter då de jämför längder. De förstår inte heller att längden på en pinne är konstant hur den än förflyttas. Det är först i samband med att elever lär sig mäta som förståelsen för längdkonstans utvecklas. För flickorna blev det en given startpunkt när de satte hälarna mot golvet och det räckte att "läsa av" vid tårna. När snören eller pinnar ska jämföras måste hänsyn tas till båda ändpunkterna.

Vid indirekta jämförelser används en referens för att ta reda på vilken av två sträckor som är längst. Fredrik och Karl samlade pinnar för att bygga en koja i skogen. De skulle ge sig iväg för att leta efter pinnar som var längre än de redan insamlade. Hur skulle de veta att de nya pinnarna var längre? Karl mätte av mot sin kropp. Pinnen nådde till hans armhåla och de hade fått en referens att förhålla sig till. Det var den längden de måste komma ihåg, konservera, och med hjälp av den kunde de göra indirekta jämförelser av andra pinnars längd.

Informella och formella enheter

För att besvara frågor om *hur lång*, *hur hög*, *hur bred* och *hur mycket längre*, *kortare*, *högre*, *bredare*, *smalare* krävs oftast en mer formell mätning. Sådan mätning bygger på förståelse för att ett objekt kan delas in i lika stora enheter. Att tänka på mätning som upprepning av en enhet, iteration, är komplext. Det är vanligt att elever inledningsvis enbart fyller upp med hela enheter. Om

enheten sträcker sig förbi objektets ändpunkt eller om objektet är längre än enheten bortser de från överskjutande delar. En del elever inser heller inte problemet med att blanda enheter, som att använda olika stora gem, bara de täcker föremålets längd.

Längdenheter kan vara informella, som armlängder, gem och stickor eller formella, dvs vedertagna enheter som här i Sverige är definierade enligt metersystemet. Enheten för längd, meter, är $1/10\,000\,000$ av meridianen från Nordpolen till ekvatorn genom Paris. Längden bestämdes genom avancerade mätningar och fastställdes i form av en arkivmeter. Denna internationella prototyp förvaras i Paris och användes för att definiera meterenhetens storlek fram till 1960, då den ersattes av en fysikalisk definition baserad på ljusets hastighet. Sverige tilldelades meterprototyp nr 29, vilken förvaras vid *SP Sveriges Tekniska Forskningsinstitut* i Borås.

När elever ska gå över till att mäta med formella längdenheter och mätredskap kan ett mellansteg vara att använda en kloss som är 1 cm tjock och 1 dm lång. På klossen är ett snöre på 1 meter fastsatt. Eleverna kan mäta längder av olika slag, först ett antal hela metrar med det losstagna snöret, sedan antal decimetrar och slutligen antal centimetrar. Sådana klossar saluförs inte men att tillverka dem kan vara en lämplig aktivitet för samverkan med slöjden.



Några vanliga missuppfattningar

Jag tog arton tomtesteg från staketet till trappan, sa Samir när han balanserade på trädgårdsmuren. Det vill jag också kolla, sa Vilma. ..., tretton, fjorton, femton, sexton. Jag fick det till sexton. Muren är både arton och sexton tomtesteg. Innan man förstår mätandets idé är det inte konstigt att resultaten blir olika. Det är samstämmigt med att när en elev inte har antalskonservation klar för sig kan samma grupp föremål vara olika många när de räknar igen. Samir och Vilma gjorde om sina mätningar, med samma resultat. *Kan det vara olika långt?* Hur kommer det sig? Varför? Vad innebär det att gå tomtesteg (häl mot tå)? Hur långt är ett tomtesteg? När börjar man räkna?

Forskning visar att i många fall förknippas mätning i det tidiga lärandet med rörelse. Att barn får skillnader i resultat då de jämför uppstegade avstånd kan alltså bero på att någon räknar antal förflyttningar, dvs börjar räkna när första foten flyttas, och en annan räknar antal skolängder. Det kan också bero på att de inte förstår att tomtestegen ska tas tätt samman, utan mellanrum eller överlappning.

När elever börjar mäta med linjal startar de ofta vid siffran 1, som om den vore startpunkten. Bakom detta finns missuppfattningen att mätning hör samman med förflyttning. Markeringarna på linjalen, liksom förflyttningar av en fot, signalerar att de ska börja räkna, inte att en del av utrymmet är täckt. Det kan också vara så att de inte har förstått att innebörden i markeringen 5 på linjalen innebär att utrymmet mellan nollpunkten och 5 är täckt av fem lika enheter. Elever kan alltså ibland ange rätt svar utan att förstå, kunna kontrollera eller motivera det.

Att fundera över

- ♦ Vilka olika direkta och indirekta mätningar brukar eleverna genomföra?
- ♦ Vilka olika slags informella och formella längdenheter brukar eleverna använda?

Mäta areor

Areor mäts med någon form av tvådimensionell enhet som ska placeras så att det, som vid längdmätning, varken blir tomrum eller överlappningar. Den som förstår innebörden av areabegreppet förstår att även oregelbundna områden har en yta som kan mätas.

Areor kan precis som längder jämföras direkt och indirekt. När två handdukar läggs ovanpå varandra syns det tydligt vilken som är störst. För andra areor behövs referenser att förhålla sig till, på motsvarande sätt som vid längdmätning. För att svara på frågor som: *Hur stor? Hur mycket större? Hur mycket mindre?* är mätning med en bestämd enhet nödvändig.

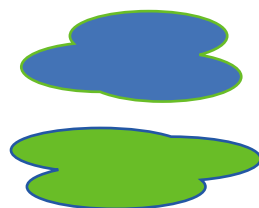
I ett inledande skede kan det vara lämpligt att gemensamt täcka ett avgränsat område med en bestämd tvådimensionell enhet och diskutera frågor som rör tomrum, överlappning och precision. Samtalen stöder den mentala processen om att utveckla förståelse för att områden kan delas in i mindre men lika stora delar. Sedan beräknas antalet delar. Vid informella mätningar kan händer, fötter, markörer, löv, kastanjer, bönor etc utgöra enheter.

I formella mätningar används vedertagna areaenheter som kvadratmeter, m^2 , kvadratdecimeter, dm^2 , och kvadratcentimeter, cm^2 . Då metersystemet blev vårt lagstadgade enhetssystem 1874 infördes även enheten *ar*. Ett ar är en yta på 10 gånger 10 meter dvs 100 kvadratmeter. En följd av detta är hektar, dvs "hekto ar", hundra ar, 100 gånger 100 m^2 som ger 10 000 m^2 .

Även en färgfläck har area

Många lärare har erfarenhet av, och forskning visar också, att en del elever tror att oregelbundna kurviga former inte har en area. Det signalerar att de inte förstår innebörden i begreppet area. Andra förstår att området har en area, men tror att den inte kan mätas. Oregelbundna eller kurviga områden behöver därför särskild uppmärksamhet. Rita upp två någorlunda lika stora oregelbundna former. Låt eleverna ge förslag på olika sätt för att kunna avgöra vilken form det är längst väg runt (omkrets). Ett förslag på en informell jämförelse är att lägga ett snöre, eller piprensare som kan vara enklare att hantera, runt varje form och sedan jämföra längderna. I nästa steg kan motsvarande samtal föras om ytan innanför de båda formernas linjer (area). Vilken är störst? Någon kanske föreslår att det går att klippa ut den ena formen och lägga den på den andra. Pappersbitar som sticker utanför kan klippas av och pusslas in. Fler exempel finns i Strävornaaktiviteten *Färgfläckar*.

En elevgrupp hade varit i skogen och hämtat var sin sten, lika stor som den egna tumnageln. I klassrummet frågade läraren *hur många stenar, lika stora som din tumnagel kan få plats på din hand?* Läraren visade sin hand, med fingrarna tätt samman och avgränsad vid handleden. Eleverna gissade och läraren antecknade. *Hur kan vi ta reda på om det stämmer?* Eleverna flyttade runt sin sten och försökte få fram antalet. *Jag kommer inte ihåg var jag varit med stenen.*



Jag vet – vi kan rita av handen och sedan rita runt stenen på bilden, sa Amanda. Kamraterna tyckte det var en bra idé. På den avbildade handen gick det bra att flytta och rita runt stenen. Eleverna färglade så många stenar på handen som de hade gissat skulle få plats. *Titta, det fick plats dubbelt så många som jag trodde!*

Eleverna hade gjort en slags informell areaberäkning. Området var tydligt avgränsat och stenen användes som informell areaenhet. Stenen i sig var tredimensionell men eleverna använde arean på den yta som placerades mot avbildningen av handen. De delar av området som inte kan täckas av hela enheter måste hanteras. *Jag räknade först alla hela stenar, det var 25. Sedan såg jag att jag kan sätta ihop småbitar som blir lika stora som en sten. Delarna blev fyra hela stenar. Hela området är 29 stenar stort.* I en annan grupp som skulle beräkna arean på en hand ledde samtalet till att ett kvadratisk rutnät användes som mätredskap.

Michael Battista har i sin forskning sett att elever genomgår följande process för att utveckla förståelse för areaberäkning, de:

- ♦ formar inre modeller utifrån konkreta erfarenheter
- ♦ strukturerar hur ett objekts delar förhåller sig till varandra
- ♦ lokaliserar och koordinerar enheter i rader och kolumner
- ♦ organiserar objektet i delar, exempelvis så att enheterna i en rad kan upprepas och täcka eller bilda hela figuren.

Battista rekommenderar därför följande struktur för undervisningen:

- ♦ Samtala om att hela området ska täckas utan överlappningar eller tomrum.
- ♦ Hur ska så många enheter som möjligt få plats? Utmana till att använda lämplig areaenhet. Låt eleverna upptäcka att "kakling" av områden, dvs arrangemang av kvadrater i rader och kolumner, täcker bäst och underlättar att hålla ordning på antal. Uppmuntra eleverna att lägga material eller rita enheterna i rader. Observera om eleven lämnar tomrum eller ritar olika många kvadrater i raderna. Det blir sedan en utmaning att med allt mindre grafisk information som stöd räkna ut hur många kvadratiske enheter som finns i rader och kolumner. Att enbart använda kvadratiske enheter kan möjligen ge för stort stöd, så variera även med andra enheter.
- ♦ Låt eleverna upptäcka att antal enheter i varje rad och kolumn anger sidornas längd på en rektangel. *Jag har fyra våningar med tre i varje rad.*
- ♦ En aktivitet som är lämplig när eleverna upptäckt att antalet enheter kan beskrivas som t ex tre rader med fem i varje, är att de lär sig multiplicera de två dimensionerna som en genväg till antalet kvadrater. Först när eleven har den förståelsen är innebörden i areaformeln, uttryckt t ex som *längd x bredd*, begriplig.

Att fundera över

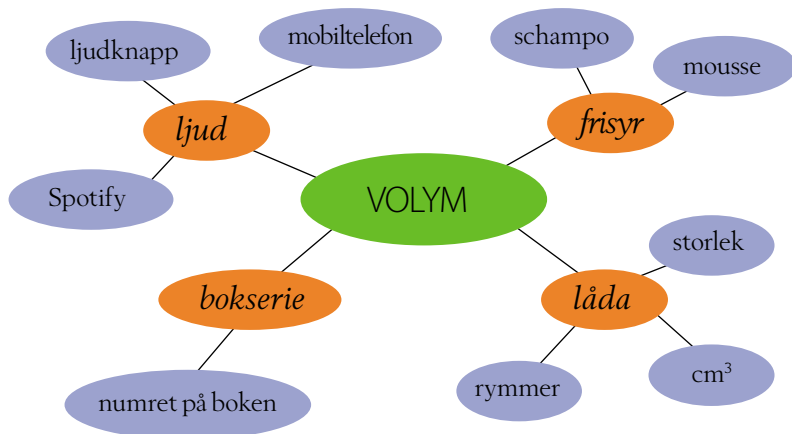
- ♦ Vilka fler sätt, än de som nämns på förra sidan, kan användas för att ta reda på omkrets respektive area på oregelbundna figurer?
- ♦ Hur uppfattar och utläser eleverna "den lilla tvåan" i exempelvis m^2 ? Kan de konkret visa eller förklara skillnaden mellan meter (m) och kvadratmeter (m^2)?

Mäta volym

Volym handlar om hur mycket något innehåller eller rymmer. I vardagen är det skillnad på om ett kärl innehåller hårda och oformliga saker eller sådana som är mjuka och formbara. Ju mindre objekt, desto fler kan få plats och vätska kan alltid fylla ut mellanrum mellan aldrig så små föremål.

Det är skoj att leka både i och med vatten. Axel håller vattenfyllda burkar i en hink. *Titta, det får inte plats mer. Det rinner ut!* Han får erfarenhet av att volymen är avgränsad. När han badar i badkaret upptäcker han att vattennivån stiger när han går i och sjunker när han går ur. Nivåskillnaden anger kroppens volym, det fenomen som kallas Arkimedes princip. Historien berättar om upptäckten när han klev i sitt badkar som var fyllt till kanten. Vattnet svämmade över. Arkimedes lär ha insett att mängden vatten som rann över motsvarade den volym vatten som hans kropp trängde undan. Som en följd lär Arkimedes ha sprungit ut på gatorna och ropat *Heureka!*, vilket ungefär betyder "jag har kommit på det". På grund av vätskors egenskaper kan det inte bli tomrum med vatten och när kärlet är fullt rinner överskottet över.

När saker ska städas undan blir frågan *Får allt plats i lådan?* aktuell, liksom *Hur ska vi packa för att allt ska få plats?* Redan små barn får erfarenhet av att för att bäst ta tillvara ett utrymme, ska innehållet packas utan tomrum emellan.



Ordet volym är ett av de snudd på klassiska flertydiga matematikorden. När vi talar om volym på en matematiklektion menar vi i regel inte att det är hög ljudvolym, inte heller att någon har använt volymschampo eller läser tredje volymen i ett bokverk. Volym ska på matematiklektionen oftast tolkas som hur mycket som rymmer i något. Det visar hur viktigt det är att göra introduktioner så att alla elever är med på vad som diskuteras. För den elev som tänker ljudvolym blir en matematiklektion om volym troligen ganska obegriplig.



Den som förstår att ett paket innehåller lika många sockerbitar hur paketet än vrids och vänds förstår också att det inte har så stor betydelse vilken sida som kallas längd, bredd eller höjd.

Den volym vatten vars massa är 1 kilogram fick namnet liter då Sveriges riksdag beslöt att införa metersystemet. Till vardags använder vi enheterna *liter (l)*, *deciliter (dl)*, *centiliter (cl)* och *milliliter (ml)*. Relationen i storlek till enheten liter beskrivs alltså av prefixen *deci*, *centi* och *milli*.

Enheterna 1 liter och 1 kubikdecimeter (dm^3), dvs en kub med sidan 1 dm, anger samma volym. Den som är medveten om detta kan utnyttja sambandet för att exempelvis beräkna volymen på ett akvarium utan att trassla in sig i enhetsbyten. När längderna på akvariets sidor mäts används dm som enhet: $3 \text{ dm} \times 4 \text{ dm} \times 5 \text{ dm} = 60 \text{ dm}^3$, dvs 60 liter. I vardagen möter vi också kubikmått i tex storlek på behållare och på motorer. Lastvolymen på en tankbil kan vara 45 kubikmeter (m^3). Motorvolymen på en moped kan vara 50 kubikcentimeter (cm^3), i vardagligt tal "en femtikubikare", 50 cc. Det är för de flesta lättare att förstå innebörden i tankbilens lastvolym än mopedmotorns cylindervolym.

Det som komplicerar volymläsningsberäkningar är att vi i vardagen använder dessa två system utifrån liter respektive kubikdecimeter parallellt. Steget från att fylla ett litermått genom att hälla vatten från ett decilitermått tio gånger till att förstå volymläsningsberäkning enligt formler som *längden $\times$ bredden $\times$ höjden* är stort.

Byggbara kuber visar principen för volymläsningsberäkning

Processen som leder till förståelse för matematisk beräkning av kroppars volym bygger dels på förståelse för längd- och areaberäkning, dels på förmågan att uppfatta den abstrakta idén att bestämma storlek, volym, på tredimensionella kroppar. Genom att sätta samman enheter som exempelvis byggbara kuber till större enheter, är det möjligt att göra upprepningar och skapa en helhet. För att beräkna storleken på en tredimensionell kropp, tex en skokartong, kan eleven sätta samman kuber i en rad som bildar en sammansatt enhet som kan upprepas till kolumner. Raderna och kolumnerna bildar ett plan eller en våning. Dessa våningar kan sedan byggas på i höjddled. Först när eleven insett att enheter måste ordnas i rader och kolumner och också i lager eller våningar har formler för volymläsningsberäkningar någon mening.

Enstaka kuber byggs ihop till rader, som sätts samman till plattor, som byggs upp våning för våning...



Att fundera över

- ◇ Hur använder vi ordet 'volym' i undervisningen? Hur uppfattar eleverna det?
- ◇ 'Rymmer' är ett annat ord som också kan leda elevers tankar fel. Att någon är på rymmen och att tillbringaren innehåller åtta dl saft är mer vardagligt än att tillbringaren rymmer saft.

Att väga

Att väga innebär att bestämma ett föremåls massa. Förr – och fortfarande i vardagligt tal – användes ordet vikt, men en vikt är ett fysiskt föremål som har en mycket noggrant uppmätt mängd materia, vilket ofta står på den.

Redan små barn upptäcker att föremål är olika tunga. De lyfter somliga föremål enkelt med en hand, medan de till andra behöver använda båda händerna. En del objekt är tyngre än de klarar att lyfta. Moa kan bära omkring sitt gosedjur hela dagen men den fina stenen som hon hittat blir snart för tung. Genom erfarenhet lär hon sig att hon kan flytta en stol men matbordet står kvar trots att hon tar i allt vad hon kan.

Att väga innebär att man bestämmer ett föremåls massa. Ett annat ord som används är tyngd, men det är inte en synonym till massa utan ett mått på jordens dragningskraft på föremålet. En vikt eller en tyngd kan också vara ett fysiskt föremål. En vikt har en mycket noggrant uppmätt mängd materia vilket även står tryckt på den medan en tyngd kan vara stenen som läggs på tidningen för att den inte ska blåsa iväg. Undvik ordet vikt när du menar massa så eleverna vänjer sig vid det vetenskapliga begreppet. Du behöver inte rätta dem om de säger vikt men använd gärna själv ordet massa.

Uppmärksamma också eleverna på att vi skriver att föremålet har massan 1 kg eller väger 1 kg och att vi ska uttala enheten för massa som kilogram och inte kilo. Gör jämförelsen med kilometer som har samma prefix, kilo = 1000, men ingen skulle komma på tanken och säga att joggingrundan var på fem kilo. Om eleverna sen fortsätter säga kilo när de menar kilogram gör inte så mycket, men de bör känna till principen.

Barn får erfarenhet av att den egna massan förändras när de möter uttryck som: *Så stor och tung du blivit, snart orkar jag inte bära dig!* Det kan ge föreställningen att massan är relaterad till storlek. Vardagserfarenheter motsäger det. En liten metallkula är tyngre än en stor ballong. Frågan om vilket som väger mest, ett kilogram bomull eller ett kilogram bly, och som många barn utmanar varandra med, tyder på en gryende förståelse för att mäta storheten massa.

Att väga till vardags

Också för massa är direkt jämförelse en inledande aktivitet. Genom att jämföra två föremål i taget, ett i varje hand som en balansvåg, kan vi avgöra vilket föremål som är tyngre än det andra. När flera objekt ska storleksordnas efter dess massa kan de "vägas i händerna" och ordnas efterhand. Vägning i vardagen kan vara kopplat till affären. Att det ofta finns en inbyggd våg i kassan är inte alla medvetna om. I frukt- och grönsaksdisken är det ibland självbetjäning och kunden lägger sina varor en våg, där det finns en bild på varan att trycka på. Som resultat av vägningen kommer en klisterlapp där det mest framträdande är priset. På samma sätt är det med lösgodis. *Du får köpa för femton kronor* fokuserar på priset och inte på hur många hektogram påsen väger. Sambandet mellan en varas massa, dess kilopris och hur mycket den kostar är komplext.

Ord som tung – lätt och deras komparationsformer hör samman med massa. Också objekt med liten massa kan beskrivas som tyngre eller tyngst. Världens minsta fågel, bikolibrin, väger knappt två gram. Jämfört med sitt ägg är den vuxna fågeln fem gånger tyngre. Jämfört med massan på en personbil är fågeln lätt. Jämfört med en tung lastbil eller ett transportplan är personbilen lätt.

För att besvara frågor om *hur tung*, *hur mycket tyngre* och *hur mycket lättare* behöver vi ett måttetal kopplat till lämplig enhet. Enheten kilogram, kg, är central och andra formella enheter för massa har bestämda relationer till den. För att utveckla en intuitiv känsla för dessa formella enheter behövs erfarenheter som skapar förståelse för relationer och ger referenser att förhålla sig till. När vi vet att en mjölkkartong kan rymma en liter har vi en förståelse för storleken på en liter. Att veta att en full mjölkkartong väger ungefär ett kilogram ger en god referens till den enheten.

Något som kan ställa till det vid olika enhetsomvandlingar är det faktum att för längd är enheten meter och för volym liter, medan den för massa är gram. I vardagen uppfattar nog de flesta "ett kilo" (1 kg) som någon slags grundenhet. En ytterligare orsak till svårigheter vid enhetsomvandlingar är att vi till vardags inte använder alla prefixen. Prefixet deka används i princip aldrig – dekameter, dekaliter och dekagram känns alla ovana. Deci och centi är vanligt förekommande vid längd och volym (decimeter, centimeter, deciliter och centiliter) men decigram och centigram är betydligt ovanligare och elever har knappast stött på dem. I en del länder, exempelvis Österrike, går det bra att be om 15 dekagram salami vid charkdisken. Finns förståelse för prefixen är det enkelt att räkna ut att 15 dekagram är detsamma som 150 gram.

Material för undervisningen

Centikuber har användbara egenskaper: en sida är 1 cm, en sidoyta är 1 cm², volymen är 1 cm³ och vikten är 1 g. Hundra sammansatta klossar väger 100 g, dvs ett hektogram, hg. Tusen sammansatta klossar har vikten 1000 g, dvs ett kg. Vilka objekt i omvärlden har ungefär vikten 1 g, 100 g eller 1000 g?

Numera används viktsatser och enstaka vikter, som de på bilden, sällan i vardagen. Tillsammans med laborativa material som kan sättas samman för att illustrera relationer, tex centikuber, är vikterna användbara för att ge erfarenhet av den fysiska känslan då de lyfts.

För direkta jämförelser är balansvågar praktiska. Vissa laborativa material, exempelvis *Jämförbjörnar*, har också bestämda relationer. Den stora björnen väger lika mycket som två mellanstora eller tre små. Låt elever undersöka frågor som: Hur många mellanstora björnar har lika massa (väger lika mycket) som sex små? Hur många små björnar har lika massa (väger lika mycket) som tio stora?

För att få fram en exakt massa kan olika vågar användas. Det värde som vågen anger ska läsas av och tolkas. För det krävs förståelse för både talet som visas och enheten som vågen mäter i.

Att fundera över

- ♦ Vilka slags vågar har eleverna vardaglig erfarenhet av? Vilka vågar har vi tillgång till på skolan? Vilka behöver vi komplettera med i undervisningen?

Mönster

I vardagen omges vi av mönster och strukturer. Mönster kan vara dekorationer och arbetsbeskrivningar, men de kan också beskriva cykliska förlopp som exempelvis dag och natt, veckans dagar eller årstider. Vissa mönster är statiska, upprepar sig på exakt samma sätt, andra är dynamiska där någon del av mönstret förändras.

Elever måste få möjlighet att möta det stora och fantasieggande området matematiska mönster. Ju mer man själv som lärare lär sig att se och upptäcka mönster i sin egen omgivning, desto rikare blir möjligheterna att finna intressanta uppdrag att ge till sina elever.

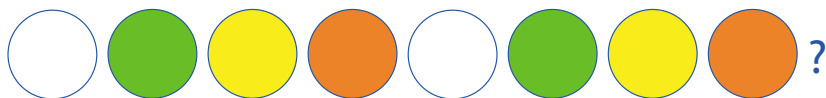
Statiska mönster

De flesta människor har rutiner och gör samma saker, på samma sätt och i samma ordning varje dag. Sådana upprepade, oförändrade förlopp är uttryck för statiska mönster, vilka också finns i kläder, på tapeter, i danser osv. Såväl hemma som i skolan kan elever utforska och skapa upprepade mönster med olika saker och skilda egenskaper: kottar och löv, små och stora stenar och pinnar, leksaker, klossar med olika form, läskburkar, koppar och fat, sig själva och kamrater. De uppmärksammar att det är växelvis dag och natt. De trär pärlor i en bestämd följd: röd, blå, gul, röd, blå, gul, ... Eleverna behöver även möta mönster gestaltade genom andra uttrycksformer som rörelser, ljud, händelser, bilder och symboler för att befästa förståelsen för begreppet mönster.

Det som utmärker statiska mönster är att sekvensen, oavsett hur många delar den består av, upprepas utan att förändras. För att fortsätta ett påbörjat mönster måste vi studera hur det ser ut, låter eller visas för att upptäcka dess delar och ordningen på dem. Frågan är hur mönstret kan fortsätta utan att förändras. För att eleverna ska upptäcka strukturen i statiska mönster behöver de utmanas på ett systematiskt sätt. Det kan vara nödvändigt att starta med ett mönster med en enda del, som upprepas, tex ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ och att diskutera hur det ska fortsätta och motivera varför. Antalet komponenter får sedan öka successivt, tex      följt av        .

Mönstret kan fortsätta oändligt långt i båda riktningarna, inte nödvändigtvis i en lång rak rad. Ett mönster kan också gå runt, som dekoration på en rund tårta eller på ett armband, "det bara fortsätter". Antalet komponenter kan vara hur många som helst, men med för stort antal olika delar blir det svårt att få överblick och att hålla ordning:

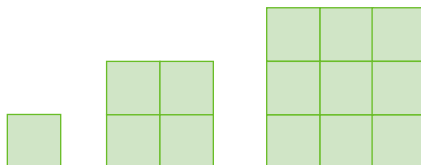
*       *       *       *       ...



Färgmässig symbolisk representation av det cykliska mönstret De fyra årstiderna.

Dynamiska mönster

I dynamiska mönster förändras en eller flera delar på ett bestämt sätt och efter givna förutsättningar, t ex          . Vad är det som förändras? Hur förändras det? Hur ska mönstret fortsätta? Hur kan vi veta det? Hur ser det ut efter nästa bok eller efter den tionde? Hur vet vi det? Hur kan mönstret beskrivas?



Kvadraterna ovan representerar också ett dynamiskt mönster. Vad förändras? På vilket sätt? Hur ser nästa figur ut? Den femte? Den tionde? Hur vet vi det?

Talmönster

Aritmetiken är också rik på samband och mönster. Talen i talraden finns alltid i en bestämd följd, 1, 2, 3, 4 osv. Hur kan mönstret, dvs relationen mellan talen i talraden, beskrivas?

Hur ser fortsättningen ut i följande talmönster? Varför? Hur vet vi det?

1, 3, 5, 7, 9, ...

1, 2, 4, 7, 11, ...

1, 4, 9, 16, ...

200, 100, 50, 25, ...

1, 5, 13, 25, 41, ...

6, 7, 9, 12, 16, ...

Att abstrahera och generalisera

Att upptäcka likheter och skillnader samt att se strukturer och mönster är viktigt för matematiken. Att beskriva det man upptäckt, till en början med vardagsspråk och på sikt med matematikens ord och symboler, är en del i lärandet. Vygotskij talar om dialektiken mellan språk och tanke. Det vi kan berätta om så att andra förstår, har vi själva förstått. Eller som skalden Esaias Tegnér uttryckte det motsatta: *Det dunkelt sagda är det dunkelt tänkta*.

Att se och beskriva mönster är grundläggande för att kunna abstrahera och generalisera vilket är nödvändigt för att kunna utveckla ett algebraiskt tänkande. Hur kan exempelvis mönstret ovan med kvadrater beskrivas om vi efter den tionde figuren utökar till n figurer?

Att fundera över

- ♦ När använder jag mönster för att underlätta i min vardag?
- ♦ Vilka mönster använder eleverna? Hur kan jag utmana dem att både finna och skapa nya mönster?

I många matematiska problem handlar det om att upptäcka och uttrycka likheter och skillnader. Det kan vara att förutse vad som kommer att hända och vilka riskerna eller chanserna är. Genom att fantisera om olika scenarior kan det vara enklare att se vad som skulle kunna vara möjliga lösningar.

Vi gör dagligen sannolikhetsbedömningar, en del medvetna med mer eller mindre formella beräkningar, andra där vi av erfarenhet kan göra bedömningar som ligger nära vad som faktiskt kommer att inträffa. Vi bestämmer relativt enkelt hur vi ska klä oss utifrån sannolikheten att vädret blir på ett särskilt sätt under dagen, vi bedömer hur mycket frukt vi ska köpa för att det både ska räcka och inte bli för mycket över och vi tar ställning till vad vi tror om ränteläget när vi ska förnya lån.

Alla elever behöver få tillfälle att utveckla förmågan att göra intuitiva bedömningar av händelser i vardagen men också få kunskap om något mer formella sätt att bedöma sannolikhet. Inledningsvis behöver de lära sig att skilja händelser som är *helt säkra* alternativt *totalt omöjliga* från händelser som är *slumpmässiga*. Sannolikhet är också ett exempel på matematiskt innehåll som lätt kan stimulera elevers nyfikenhet, lust och fantasi.

Kort terminologi

Några av de centrala termer som används inom sannolikhetsläran är följande:

- ♦ *Slump*. Slump används för att beskriva en oförutsägbarhet som vanligen beror på en eller flera okända orsaker.
- ♦ *Slumpförsök (slumpmässigt försök)*. En händelse som har minst två möjliga utfall och där det är omöjligt att i förväg säga vilket som kommer att inträffa. Försöket ska kunna upprepas under i stort sett samma omständigheter. Exempel är kast med tärning och att dra kort ur en väl blandad kortlek.
- ♦ *Utfall*. Ett möjligt resultat vid ett slumpmässigt försök. Vid kast med en vanlig tärning är till exempel "tre" ett utfall.
- ♦ *Utfallsrum*. Mängden av alla möjliga utfall vid ett slumpmässigt försök. För en vanlig tärning är utfallsrummet: {ett, två, tre, fyra, fem, sex}. Mängden skrivs vanligen med mängdklamrar.
- ♦ *Händelse*. Vilket resultat man *faktiskt* får då man genomför ett slumpmässigt försök. Man kan till exempel få en sexa då man kastar en vanlig tärning.
- ♦ *De stora talens lag*. Den sats inom sannolikhetsteorin som säger att det aritmetiska medelvärdet av ett stort antal oberoende observationer av en slumpvariabel ligger nära förväntat värde (variabelns väntevärde, matematisk förväntan).

Tre grundläggande sannolikhetsbegrepp

Det finns tre grundläggande sannolikhetsbegrepp: *teoretisk*, *experimentell* och *subjektiv* sannolikhet.

- ◇ *Teoretisk sannolikhet* innebär att vi i förväg kan bestämma sannolikheterna för olika utfall. Vanliga exempel utgår från mynt, tärningar och kortlekar som förutsätts vara symmetriska, dvs det ska vara lika stor chans att få krona eller klave, lika stor chans att vilken sida som helst på tärningen kommer upp eller att inget kort i leken har större chans än övriga att bli draget. Sannolikheten att få krona är en av två, dvs $1/2$, att slå en 4:a på en vanlig pricktärning är en av sex, dvs $1/6$, att dra spader åtta är en av 52, dvs $1/52$. Utifrån detta kan vi exempelvis beräkna sannolikheten för att tärningen visar ett jämnt antal prickar, 2, 4 eller 6 vid ett kast ($3/6 = 1/2$). Andra vanliga exempel som kan illustrera teoretisk sannolikhet är chokladhjul med färgade fält i olika storlekar, lotto- och tipsrader och lotter av olika slag.
- ◇ *Experimentell sannolikhet* handlar om slumpförsök där det inte lika säkert går att bestämma utfallen som i exemplen ovan. Det finns ett sällskapsspel som heter *Kasta gris*. Där används små plastgrisar som en slags tärning. De kan t ex landa på benen, på ryggen eller på trynet. Här är det inte lika enkelt att bestämma sannolikheten för ett utfall eftersom grisarna är osymmetriska. Ett sätt för att ändå ta reda på sannolikheten för ett visst utfall, t ex att grisen hamnar på trynet, är att göra en stor mängd kast och se på den relativa frekvensen, alltså hur många gånger av det totala antalet kast utfallet blir "trynet ner". Detta sätt att undersöka sannolikhet kallas *De stora talens lag*. Förutom att det måste ske ett stort antal försök är det nödvändigt att varje försök görs på identiskt sätt varje gång och varje försök ska dessutom vara oberoende av de andra.
- ◇ *Subjektiv sannolikhet* används för att beskriva sannolikhet för händelser som inte kan bestämmas på något av de båda andra sätten. En väderprognos är ett bra exempel. Vi kan inte beräkna den enligt teoretisk sannolikhet eftersom det inte finns ett begränsat antal väl definierade utfallsrum. Det går inte att förutsätta att det t ex blir ett av utfallen sol, mulen, regn eller snö eftersom det finns andra vädertyper som växlande molnighet och spridda skurar. Vi kan inte heller göra en stor mängd försök med (eller undersökningar av) morgondagens väder. Istället måste vi förlita oss på andra sätt att använda det kunnande som finns: logik, matematiska modeller, erfarenheter, statistik etc. Ju mer kunskap som finns om ett område, desto säkrare sannolikhetsberäkningar kan göras.

Så snart eleverna börjat få ett grundläggande kunnande om sannolikhet är det viktigt att inleda diskussioner om exempelvis den omfattande reklamen från spelbolag. Det är enkelt att få uppfattningen att alla vinner, ofta och mycket – men hur ser det ut i verkligheten? Vilka säkra alternativ finns om man vill ha pengar till något man vill köpa eller göra?

Att fundera över

- ◇ Vilka möjligheter finns att få in ett sannolikhetstänkande i skoldagens vardag så att sannolikhetsbedömningar inte bara är något som eleverna möter på enstaka matematiklektioner?

Statistik används för att samla in, tolka och sprida information. I media presenteras allt oftare fakta i tabeller och diagram. För att förstå hur de ska tolkas behöver elever många erfarenheter från egna undersökningar.

Bakåt i tiden förmedlades information muntligt, från person till person. När tidningar och senare radio och tv blev allmän egendom förändrades bilden och information kunde snabbt nå ut till stora grupper i samhället. Med dagens informationsteknik har möjligheter till snabb spridning ökat ytterligare. I det moderna samhället översköljs vi av information i olika medier. Det kan handla om allt ifrån enkla undersökningar av den mest populära glasen i kamratgänget till avancerade vetenskapliga undersökningar. Information kan vara upplysande och det finns mycket som vi i någon mening kan "bevisa" med hjälp av statistik, men statistik kan också vara vilseledande.

En av förutsättningarna för att kunna fungera som en självständig individ i ett modernt samhälle är att kunna tolka, analysera och kritiskt granska informationsflödet. Tabeller och diagram är vanliga uttrycksformer för att kortfattat förmedla data och för att kunna hantera sådan information behöver elever många erfarenheter där de själva samlar in och presenterar data. Med tanke på elevers datorvana kan kalkylprogram (vanligtvis Excel) användas tidigt då information ska föras in i, presenteras och avläsas ur tabeller och diagram. Det är ofta enklare att mata in värden i datorn och få ut tydliga och överskådliga tabeller och diagram än att göra motsvarande arbete för hand.

Insamling av data

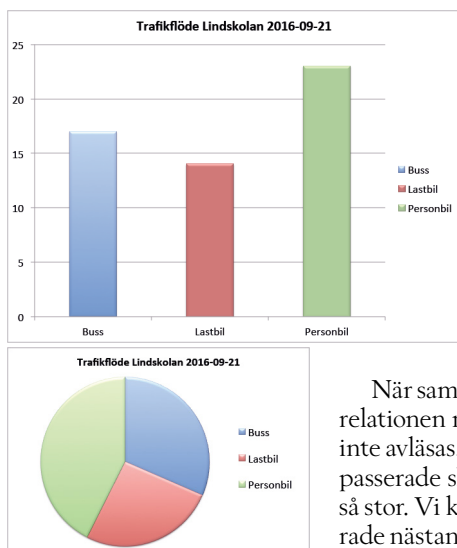
För att få fram uppgifter om fakta och uppfattningar måste data samlas in. Utgångspunkten är att den som vill göra en undersökning formulerar frågor som ska besvaras. En del frågor besvaras bäst genom observationer, andra genom intervjuer, där följdfrågor kan ställas, eller i enkäter där uppfattningar om något kan ringas in genom flera frågor. I enkäter markeras svaren vanligen direkt i ett protokoll, allt oftare med en glidande skala från t ex *instämmer helt*, *instämmer delvis* till *instämmer inte alls*. I statistiska undersökningar ingår kvalitetskontroll av att insamlingen av data är tillförlitlig och korrekt genomförd och mäter det som avses, det vi kallar reliabilitet och validitet. Dessa funktioner tas inte upp här, inte heller processen med att analysera och sammanställa data som kommer fram i intervjuer. Det är ofta ett komplext arbete med många variabler att ta hänsyn till.

Dokumentation och analys

Data som samlas in dokumenteras i observationsprotokoll, exempelvis där varje observation markeras med ett streck. Strecken visar då vilken frekvens, dvs antal observationer, de olika kategorierna har. De kategorier som undersöks i följande exempel är fordonsslagen buss, lastbil och personbil. För att lättare få en överblick markeras strecken fem och fem. För att få en bild av

situationen *Hur ser trafiken ut på vägen förbi skolan mellan klockan 7.30 och 8.00?* då många elever är på väg till skolan, gjordes ett stort antal observationer. Vid ett specifikt tillfälle vid den aktuella skolan såg det ut så här:

Bussar	
Lastbilar	
Personbilar	



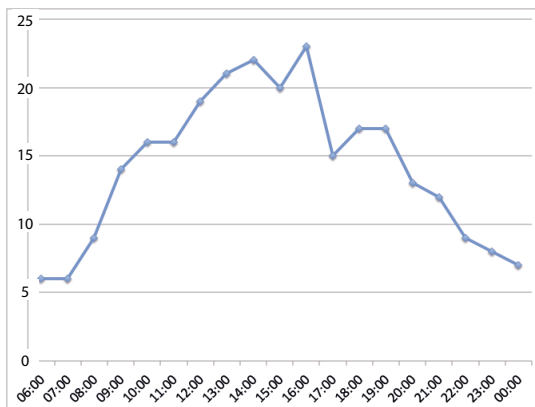
Stapel- och cirkeldiagram

För att ge en tydlig visuell bild av resultat görs ofta redovisningar i något slags diagram, tex stapel- eller cirkeldiagram. I stapeldiagram är rektangelnars baser alltid lika, medan höjderna motsvarar frekvensen i undersökningen. I tolkningen av stapeldiagrammet kan antalet bussar, lastbilar och personbilar utläsas med hjälp av den metriska skalan och de numeriska värdena kan jämföras, tex att det var 17 bussar, tre fler än lastbilar. Det var flest personbilar som passerade förbi skolan vid mättillfället, 23 stycken.

När samma data presenteras som cirkeldiagram är det storleksrelationen mellan värdena som fokuseras. De precisa antalen kan inte avläsas. Diagrammet visar att något fler personbilar än bussar passerade skolan vid den aktuella tidpunkten. Skillnaden är inte så stor. Vi kan också se att det vid den aktuella tidpunkten passerade nästan dubbelt så många personbilar som lastbilar.

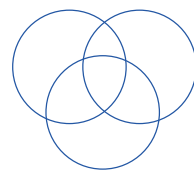
Linjediagram

I vissa undersökningar följer man vad som händer med en bestämd företeelse över tid. Ett sådant exempel är temperaturen timme för timme under ett dygn. Sådana data kan sammanställas i linjediagram. Det som går att utläsa är i första hand tendenser. I exemplet syns det tydligt att det blir allt varmare fram emot eftermiddagen för att sedan bli kyligare mot kvällen. Vi vet hur många grader det är i de givna punkterna, men vad händer emellan dem? Det skulle kunna vara så att mitt emellan två klockslag ökar eller sjunker temperaturen drastiskt för att sedan återgå till det värde som visas i nästa punkt.



Venn-diagram

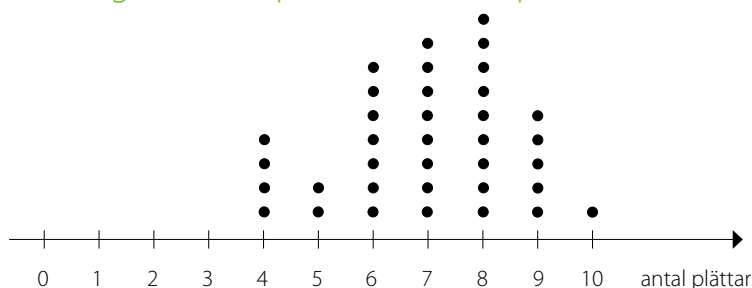
Venn-diagram är uppkallade efter engelsmannen John Venn som introducerade denna typ av mängddiagram omkring år 1880. Ett Venn-diagram består i regel av två eller tre överlappande cirklar. Det kan ses som en grafisk modell där såväl fysiska föremål som tankemönster av olika slag kan sorteras in. Ett Venn-diagram är med andra ord lämpligt då man önskar sortera en mängd fakta i ett relativt begränsat antal grupper och där vissa faktauppgifter kan sorteras efter två till tre kriterier. Det allra enklaste diagramet består av en cirkel och används i regel bara som en introduktion i undervisningssammanhang. Med en cirkel kan fakta sorteras efter en enda egenskap, några exempel:



- ◇ Alla födda under första halvåret placeras sig i cirkeln, övriga utanför.
- ◇ Alla böcker med foton läggs i cirkeln, övriga läggs utanför.
- ◇ Alla lappar med udda tal sätts fast i cirkeln, övriga sätts fast utanför.

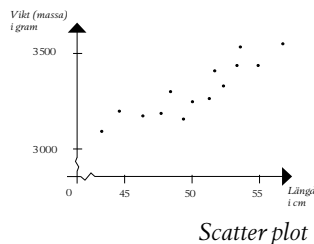
Med två överlappande cirklar är det möjligt att sortera efter två egenskaper, vilket medför fyra utfall och med tre cirklar blir det åtta utfall. Ett fördjupat resonemang och lektionsförslag finns i Strävornaaktiviteten *Venn-diagram*.

Punktdiagram – dot plots och scatter plots



Punktdiagram som ser ut som ovan, vilka benämns dot plots i engelskspråkig litteratur, är inte särskilt vanligt förekommande i svenska matematikläromedel. Slår vi upp ordet punktdiagram i *Matematiktermer för skolan* kan vi läsa: "diagram som illustrerar samband mellan två variabler och där paren av observationer presenteras som punkter i ett koordinatsystem". Som synonym anges spridningsdiagram. Dessa punktdiagram med två variabler benämns scatter plots i engelskspråkig litteratur och i Sverige används de i regel först på gymnasienivå där man tittar på korrelationer, dvs samband och överensstämmelser.

Ett punktdiagram är en statistisk sammanställning av data på en relativt enkel skala. Namnet kommer av att det vanligtvis används mindre fyllda cirklar (punkter) för att markera observationer på skalan och där en punkt är lika med en observation. En fördel med endimensionella punktdiagram (dot plots), jämfört med flera andra diagram, är att eleverna inte behöver ha förståelse för koordinatsystem när bara en (x-) axel används. Här räknar man hur många punkter det är vid varje värde och det gör att datamängden inte får vara allt för omfattande, såvida man inte nöjer sig med att bara avläsa grovt vad som ser ut att vara mest, minst eller någon annan inbördes ordning.



I internationella sammanhang förekommer endimensionella punktdiagram relativt ofta i både läromedel och elevundersökningar. Vad som än är anledningen till att de inte presenteras i svenska läromedel, eller nämns explicit i styrdokumentet, finns det klara fördelar med att använda dem för att sortera data och beskriva resultat från enkla undersökningar.

Antal avsnitt	Antal elever
0	0
1	0
2	0
3	1
4	4
5	2
6	0
7	8
8	9

Frekvenstabell

Ett exempel

Eleverna i en klass undersöker hur många avsnitt var och en sett av tv-serien *Hemlige Hugo* och får in följande data:

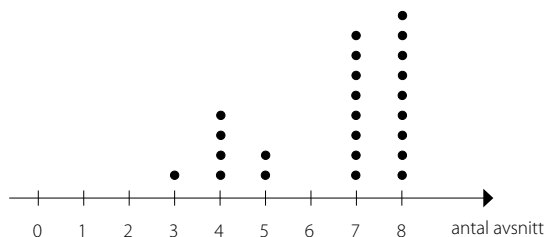
7, 8, 8, 5, 7, 4, 7, 8, 8, 4, 8, 7, 3, 8, 8, 4, 7, 8, 7, 7, 8, 5, 4, 7

Det finns flera sätt att ordna uppgifterna. Ett är att skriva dem i ordning från minsta till största värde:

3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8

Nu är det ganska enkelt att se att det var en populär serie där många såg alla eller nästan alla avsnitt. Ett annat sätt att ordna uppgifterna är att skriva in dem i en frekvenstabell.

För att göra resultatet av undersökningen visuellt passar ett punktdiagram. Eleverna behöver bara ta hänsyn till en axel men det är naturligtvis viktigt att punkterna ritas eller klistras med så jämna avstånd som möjligt.



Det blir åskådligt hur antalet sedda avsnitt har fördelats. Följdfrågor som nu kan ställas kan vara mer eller mindre matematiska: Hur många avsnitt var det vanligast att en elev såg? Minst vanligt? Hur stor var spridningen? Maximalt sågs åtta avsnitt och det minsta antal avsnitt som någon såg var tre, $8 - 3 = 5$, alltså var spridningen fem. Hur många fler avsnitt såg de som såg alla jämfört med de som såg först (minst antal) avsnitt? Frågorna kan också vara av mer socialt resonerande karaktär: Hur kan det komma sig att det är noll elever som sett sex avsnitt?

En utveckling av punktdiagram har lett till stam-bladdiagram som kan beskrivas som ett mellanting av frekvenstabell och histogram. För genomgång och lektionsförslag, se Strävornaaktiviteten *Stam-bladdiagram*.

Att fundera över

- ◊ Förutom förmåga att avläsa och tolka tabeller och diagram är det också viktigt med grundläggande förståelse för de vanligast förekommande lägesmåten. *Typvärde* kan introduceras tidigt, men när passar det att introducera *median* och *medelvärde* i undervisningen?

För de allra flesta har pengar en avgörande betydelse i vardagen. Vi måste göra kloka val för att anpassa utgifter till inkomster. I media kan vi ofta ta del av undersökningar, rapporter och program som visar att privatekonomi inte är ett alldeles enkelt område att hantera, utan något vi måste lära oss.

Pengar håller på att bli ett allt mer abstrakt begrepp. Förr kunde det räcka med att känna igen och konkret hantera sedlar och mynt, veta ungefär vilka saker man kunde köpa för en viss summa pengar och göra rimlighetsbedömningar för att veta att man fått rätt växel tillbaka. I allt större delar av samhället fungerar det på andra sätt än med kontantbetalning. Ett exempel är hur man ska betala för bussbiljetten. Vi kan betala med olika dags-, månads- eller årskort, med bankkort i en automat, en app i mobilen eller via sms. Det är sällan som man kan betala med sedlar och mynt direkt till chauffören.

Utan att gå in i några längre historiska skeenden är det enkelt att konstatera att det har hänt mycket med hanteringen av pengar de senaste årtiondena. Långt in på 1900-talet var det vanligt att löntagare fick sina pengar kontant i ett kuvert. Först veckovis, senare var fjortonde dag och slutligen som månadslön. Beloppet skulle räcka till nästa utbetalning, när det var tomt i kuvertet var pengarna slut. Inte bara de fysiska pengarna utan hela situationen var konkret.

Från kronor och ören till kontoutdrag

Vi har gått från ett etablerat system med kronor och ören till en vardag där ören, i praktiken, bara finns i teorin. Det är många abstrakta tankesteg från de 95 örena i 9:95 kr till att de antingen avrundas i kassan eller faktiskt dras från kontot. Många lärare beskriver elevers svårigheter med decimaltal. Man kan misstänka att gårdagens elever som hade en vardaglig förståelse för ören, och tillhörande mynt, också förstod decimaltalen bättre. Dagens äldre lärare vet sedan barnsben att det gick fyra 25-öringar på en krona och att de kunde köpa 20 femöreskolor för en krona. Ville de köpa större kolor så blev det tio stycken 10-öres för kronan. Idag finns inte dessa mynt och, kanske något som är ännu mer avgörande, godisbitar köps inte längre styckvis – nu fylls en påse som vägs. Vad vi kan hoppas är att dagens elever är säkrare på att det går fem tjugor på en hundra och vad kr/hg innebär i praktiken.

Nu är verklighetens pengar ofta mycket mer abstrakta. Det handlar om konton, kontoutdrag, bankomater, internetbanker och bankappar. Hur det kommer att se ut framöver är svårt att sia om. Utvecklingen går väldigt snabbt och vi törs nog vara säkra på att pengar i form av mynt och sedlar kommer att bli allt ovanligare. Dagens barn och ungdomar kommer troligen att leva i en mer eller mindre kontantlös vardag som vuxna och det som förr kunde betraktas som en fast utgift är inte heller längre så fast med tanke på alla val som vi måste göra. Även om vi kan ta god hjälp av datatekniska lösningar, blir det allt viktigare att förstå *begreppet pengar* och den matematik som ligger bakom.

Pengar och ekonomi i matematikundervisningen

Matematikundervisningen kan inte längre ta lika stort stöd i elevers vardagliga hantering av sedlar och mynt, istället är det elevers matematikkunnskap som måste utvecklas så de förstår det abstrakta begreppet pengar och pengars värde. Utöver det är det viktigt att diskutera annat matematikinnehåll som är nödvändigt för att kunna förstå och hantera sin privata ekonomi på ett sunt och begripligt sätt. Vad är viktigast att fokusera på i undervisningen? Vad ska eleverna ges möjlighet att lära när det handlar om pengar? Procent? Lån, ränta och amortering? Negativa tal? Statistik?

Förutom hanteringen av pengar är hela den ekonomiska miljön extremt abstrakt. Det vimlar av termer och begrepp som är svåra för alla. Den dator-tekniska utvecklingen ger många nya möjligheter som kan underlätta vardagen, men vilket kunnande krävs för att enskilda personer ska kunna sköta sin privatekonomi på ett tryggt sätt? Det är helt klart att bättre kunnande i matematik ger konsumenter som kan hantera sin privatekonomi säkrare. Det är ett motiv bland många för att lägga stor vikt vid vilket matematikkunnskap som är nödvändigt för dagens elever, i alla skolformer, som ska klara sig så självständigt som möjligt i samhället.

Ännu finns och används pengar konkret och fysiskt. Det motiverar att dagens elever lär sig känna igen sedlar och mynt, särskilt nu med nya utseenden på många av dem. "Att leka affär" är fortfarande en populär aktivitet bland barn och ungdomar. Personal på science centers i Sverige berättar att deras torgstånd, affärskiosker och caféer utan tvekan hör till de mest utnyttjade och uppskattade delarna i utställningarna. Miljöerna inbjuder till spontanlek mellan barn medan ungdomar mer utvecklar det till något slags rollspel. Det finns mycket i aktiviteterna som är så vardagligt och enkelt att fantisera om att även vuxna lätt dras med i barns och ungdomars entusiasm.

Storleksordna sedlar och mynt

Vad innebär det att storleksordna pengar? Eleverna får inte särskilt stor vägledning av hur mynt och sedlar ser ut. En femkrona har större area än en tiokrona, ändå är tian dubbelt så mycket värd som femman. Växlar man en femma får man fem stycken kronor, men växlar man en tia får man bara två stycken femmor, fast de eller tian kan också växlas till ett antal enkronor och tvåkronor. På motsvarande sätt kan vi resonera om sedlarna. Nog är hundralappen lite större än femtiolappen, men arean på två tjugor bredvid varandra är betydligt större än både en femtiolapp och en hundring. Hur storleksordnar vi två tior och en tjuga? Tiorna är i vart fall tjockare och tyngre än sedeln, men inte har det med värdet att göra.

För oss som förstår pengars värde och har lång erfarenhet av att hantera sedlar och mynt kan det tyckas som ett bra stöd i elevers lärande att använda pengar. För elever som inte har tillräcklig erfarenhet kan det bli förvirrande att försöka förstå vad de ska titta på då de ska storleksordna sedlar och mynt. Först när en elev har förståelse för positionssystemet och vilket värde de olika pengarna har blir det en meningsfull uppgift.

Att fundera över

- ♦ Att handla mat, tanka bilen, betala skatt och ta lån beskrivs ofta som vardagsmatematik, men det är knappast det för de flesta elever i grund- och gymnasieskolan. Vilken ekonomisk miljö rör sig eleverna i? Vad är det de behöver kunna om pengar just nu?

Vad är tid? Tidsbegreppet omfattar så mycket mer än att avläsa klockan. Ibland är tiden cyklisk, som veckor eller år. I andra fall är tidsförloppet linjärt, från att något startar till det tar slut, som en trerätters middag.

Vi talar om att tiden går. För små barn är verbet *går* förknippat med att någon förflyttar sig. Tiden finns inte i den bemärkelsen, utan är en abstrakt företeelse. Innebörden i *begreppet tid* är svår att komma underfund med och svår att definiera trots att hela vår tillvaro kretsar kring begreppet. Tid är något vi erfar och upplever, men inte kan ta på. Vi kan observera att tiden går genom förändringar i rörelser och åldrande. Upplevelser av tid och tidsavstånd varierar både mellan situationer och mellan individer. Vi lär oss vad tid är genom att leva *i* och *med* tiden.

För att kunna kommunicera om tid, har mänskligheten enats om tidsuttryck kopplade till rörelser och relationer mellan solen, jorden och månen. Dessa cykliska förlopp fortgår utan förändring. Tidsförloppet för mänskligt liv är linjärt – födelse, barndom, ungdom, vuxenliv, åldrande, död. För att beskriva dessa skeenden används begrepp som ung, yngre, yngst, gammal, äldre, äldst. Begreppen kräver något att relatera till samtidigt som de kan ha olika betydelse beroende på vem som använder dem och vem som tolkar.

Igår och i morgon

Erfarenheter av tid ger perspektiv. Vuxna kan föreställa sig tiden när de var barn och tiden när de blir gamla. De kan tänka hundratals år bakåt eller framåt i tiden. Barn saknar tillräckliga erfarenheter för att göra det, deras tidsperspektiv är kort, de lever i nuet. Att påminna sig det som hände dagen före kan vara lika svårt som att minnas förra sommaren. Minnena finns kanske, men är olika detaljrika och svåra att ordna kronologiskt. Många gånger saknar barn språkliga begrepp. *Igår* kan representera all tid som varit. Vuxna kan roas av att barn, till synes på allvar, tror att dinosaurierna levde när mormor var barn eller att läraren nog är sjutton eller kanske hundra år. I någon mening visar detta vilken grad av tidsuppfattning barnet har.

Att tänka framåt är inte heller enkelt. Att vid frukost tänka på tiden "efter lunch" kan verka lika abstrakt och långt borta som "nästa vecka" eller "till vintern", men efterhand kan barn överblicka allt längre tidsavstånd. Behovet av att i allt mer precisa ordalag kunna uttrycka tid, för att berätta om vad som har hänt eller ska hända, växer. För att vardagslivet ska fungera behöver vi kunna förstå skeenden i kronologisk ordning och planera framåt. Vi behöver också en struktur för händelser i förfluten tid. Vi möter dagligen uttryck om tid. Det handlar om allt från millennier och sekler till minuter och sekunder. Tiden det tar att gå eller åka till skolan får barnen efterhand en intuitiv uppfattning av. Efter att ha gjort ett antal resor till samma ställe vet många barn att den tiden räcker till att lyssna på, se på eller spela något välkänt. Att förstå tiden som har gått sedan dinosaurierna levde, eller att fantisera om något som kan hända om tusen år, är svårt också för oss vuxna.

De centra i hjärnan som hanterar rum, tid och kvantitet går i varandra, men är inte ömsesidigt eller helt beroende av varandra. Det kan förklara att när barn lär sig om tid är det nära kopplat till avstånd. Förlopp handlar ofta både om tid och avstånd. Det är längre väg och tar längre tid att ta sig till skolan än att gå till grannen. Det är kortare väg och tar kortare tid till affären än till simhallen. Avstånd uttrycks ofta med tidsuttryck. *Hur långt är det till bussen? Det tar sju minuter att gå.*

Gunnel Janeslätt och hennes forskargrupp med experter från olika discipliner menar att tidsuppfattning består av flera delar:

- ◇ *Känsla för tid* är medfött. Studier visar att nyfödda som fick höra en serie pulsljud med lika långa ljud, reagerar tydligt när de hör en puls av annan längd. Reaktionen visar sig i ögonrörelser och EEG. Denna känsla för tid stärks genom vardagserfarenheter, som tiden det tar att byta blöja eller värma vällingen. Barnen utvecklar en intuitiv känsla för hur lång tid sådana aktiviteter brukar ta. Om det tar längre tid än vanligt, reagerar de.
- ◇ *Förmågan att orientera sig i tiden* handlar exempelvis om att veta vilken veckodag det är eller månadernas ordningsföljd. Hit hör tidsenheter, men också ordning i skeenden, kronologi, att kunna avgöra vilken aktivitet som tar längst eller kortast tid, t.ex. att äta en banan eller att gå till simhallen; samt att kunna avläsa klockan.
- ◇ *Förmåga att planera tid* handlar om att hantera relationer mellan tider: Klockan är kvart i tio en söndagsmorgon. Du ska gå till simhallen kvart över tio. Hur lång tid har du på dig att bli färdig?

Förståelse för tid är en samordning mellan det som händer och vad barnet är medvetet om i sin omgivning. Att kunna tolka och uttrycka tidpunkter är nödvändig vardagskunskap. Med hjälp av begreppet tid ordnas vardagens händelser i korrekt följd. Klockan, kalendern och tidslinjen hjälper oss att hålla ordning på vardagens sysslor, men även sådant som tillhör det förgångna. För att förstå och själv kunna uttrycka tidsuttryck krävs samordning av förståelse för dåtid, nutid och framtid, förståelse för i vilken ordning saker inträffar, samt hur lång tid kända händelser tar i förhållande till varandra. Exempel: Äta lunch tar längre tid än att tvätta händerna. Lunchen är längre än tiden det tar att äta.

Olika tidsuttryck

Vissa tidsuttryck beskriver fasta tidsavstånd, medan andra är mer flytande. När barn frågar hur länge det dröjer eller hur lång tid det tar saknar svaren *ett ögonblick, strax, snart, om en liten stund* och liknande mening. Att däremot relatera till ett känt tidsavstånd, som ett avsnitt av ett tv-program som är välkänt eller tiden det tar att tvätta händerna har en begriplig innebörd. De flesta normalbegåvade sjuåringar börjar kunna hantera grundläggande begrepp som år, årstider, månader, veckor, dagar och klocktid. Ungefär i trettonårsåldern inser många att tid är en abstraktion. Barn använder ändå tidsuttryck innan de fullt förstår den bakomliggande betydelsen. I spontan lek använder små barn ord som *idag* och *i morgon* tidigare än *igår*. I intervjuer var det först fyraåringarna som kunde berätta vad de hade gjort igår. För de yngsta kunde det innebära förflyuten tid i allmänhet.

Att undervisa om tid

Vi tänker oss några lärare som ska undervisa om begreppet tid. De vill undersöka vilket stöd de kan få av den bakomliggande matematiken för att möta, stödja och utmana eleverna på ännu fler sätt än genom dem de redan möter i vardagen. Någon vecka före introduktionen får eleverna berätta vad de tänker på när de hör ordet "tid". Elevernas svar fungerar som en fördiagnos där lärarna kan få veta en del om vilket kunnande eleverna har. Utifrån Centralt innehåll i kurs- och ämnesplaner bestämmer lärarna vilka egenskaper hos begreppet tid som ska belysas. Detta skrivs in under rubriken *Egenskaper hos begreppet*. Följande uttryck är samlade från styrdokument för grundskola och gymnasieskola: enheter och uttryck för tid, mäta och uttrycka tid, uppskatta och mäta tidsskillnader, beräkna tid och tidsskillnader, tidsuppfattning, uppdelning av tid, tidsföljd, tidslängd, tidsåtgång, planera sin tid, typ av tidmätare, tid och rum, rimlighet, resonemang. Allt detta är relevant också för elever i grundskolan även om tid enbart nämns explicit i matematikkursplanen i samband med jämförelser, uppskattning och mätning av matematiska storheter.

Lärarna är måna om att eleverna ska bli medvetna om *hur begreppet tid kan representeras* med hjälp av olika uttrycksformer:

Laborativa material. Eleverna ska möta tidsbegreppet genom exempelvis tidslinjer, tidsaxlar, timglas, timstockar och klockor av allehanda slag.

Ord. Här handlar det om både elevernas vardagliga ord och korrekta matematiska termer. Lärarna vill skilja mellan vardagligt språk som "klockan är ungefär fyra", "vid halvsjutiden", "strax efter tre" och mer formellt språk som "tv-programmet börjar klockan 17:30". Ord som är centrala är tidsuttryck som igår, idag, i morgon, sen, om en liten stund, snart, strax, nyss, tidigare, före, efter och nu samt tidsenheter som sekund, minut, timme, dygn, vecka, månad och år.

Bild. Eleverna får i uppgift att rita, teckna eller måla egna bilder för att illustrera "tid". Lärarna kommer att uppmuntra eleverna att rita händelsekedjor av vad som sker under en dag eller annan tidsperiod. De ska även illustrera direkta kopplingar till klockor och mätning av tid som kan svara på frågor som när och hur länge så att eleverna får många olika erfarenheter av begreppet tid.

Situationer. Elever och lärare ska föra samtal om vad tid är och i vilka situationer man behöver jämföra, uppskatta eller beräkna tid. När lärarna funderar över vilka förslag de kan tänkas få av eleverna ger de exempel på hur dags saker händer, hur man kan uppskatta hur lång tid något tar, hur man avläser klockor, hur det känns att ha bråttom eller långtråkigt. Eleverna ska få fantisera framåt och bakåt med hjälp av en "tidsmaskin".

Matematiska symboler. De symboler som kommer att behandlas är hur tid förkortas, t ex tim och sek, men även att det är vanligt att förkorta timme till *h* eftersom det heter hour på engelska (och heure på franska). Eleverna ska titta på hur tid anges med hjälp av symboler, t ex 2:00, 06:30 och 19:45. En grupp ska närmare undersöka hur de digitala siffrorna ser ut.

Under rubriken *Relationer till andra begrepp* samlar lärarna begrepp

- som kommer att tas upp i *direkt anslutning* till tid. Vissa välbekanta för eleverna medan andra kanske behöver repeteras eller förklaras, t ex enkla bråk som hel, halv, fjärdedel/en kvart och tredjedel/tjugo minuter.
- som kan *jämföras*. För att ytterligare befästa begreppet vill lärarna uppmärksamma eleverna på både *vad som är tid* och *vad som inte är tid*.

*Jämför med
begrepps-
tavlan på
sidan 20.*

Vilka likheter och skillnader finns mellan utvalda begrepp som t ex mellan tid och klocka, tid och händelser eller tid och avstånd? Eleverna kan ge egna förslag på jämförelser samt diskutera likheter och skillnader.

- c. som har *samband* med tid i *ett något mer utvidgat perspektiv*. Exempelvis kan historiska begrepp beröras, kanske via filmer som utspelar sig under andra tider, både förr och i framtiden som *Tillbaka till framtiden*, *Jurassic Park* och *The day after tomorrow*.

Genom att visa på relationer till andra begrepp synliggörs den väv av begrepp som matematik är uppbyggd av. Matematiken ses som en helhet och inte som isolerade delar utan samband med varandra och inte heller som ett ämne skilt från skolans andra ämnen eller ett område som står för sig självt utan koppling till elevens verklighet.

I *Definition av begreppet* uppges innebörden så precist och exakt som möjligt. I undervisningen kan ett begrepps olika delar – egenskaper, uttrycksformer, relationer och definition – tas upp i den ordning som är mest lämplig för eleverna. Kanske börjar man med att nysta i en persons definition av tid och avslutar med en laboration där eleverna undersöker vad som händer med upplevelsen av tid beroende på vad man gör under en viss tidsrymd. Andra gånger kanske lärare väljer att gå mellan de fyra aspekterna beroende på hur eleverna resonerar. Definitionen kan också ses som en avslutning på den process som ska leda fram till utökad förståelse för det aktuella begreppet. Ytterligare ett sätt är att redan inledningsvis ta upp definitionen som en slags inspiration för *det här är vad vi ska förstå när vi har arbetat med...*

Vi bad Lars Mouwits, matematikdidaktiker och filosof, att bidra med en definition av tid: "Tid är ett samlingsbegrepp för att allt i tillvaron förändras i en riktning från att vara ett nuvarande tillstånd till att bli ett förflutet tillstånd som ej längre finns i nuet." Han kommenterade också att det finns andra sätt att definiera tid, till exempel genom att låta tiden ingå i en vetenskaplig teori. För Newton var tiden som en oberoende klocka som tickade på i universum. För Einstein var tiden en fjärde dimension, med egenskapen att man bara kan röra sig längs den i ena riktningen. Det kommer säkert att komma nya "förslag" från dagens eller framtidens fysiker. Man kan också definiera tid utifrån vår subjektiva upplevelse av ett flöde där allt förändras, såväl vår yttre värld som våra kroppar. Ett tredje sätt är att jämföra tid med hur vi mäter den. Utan klockor och andra tidmätare skulle inte tid finnas till för oss. Att kunna välja en lämplig definition som speglar begreppet tillräckligt strikt för sammanhanget och samtidigt är greppbar för eleverna är en central aspekt i undervisningen. Lärarna tänker därför att tillsammans med eleverna skriva egna förklaringar med vardagligt språk.

Efter genomförd undervisning avsätts tid för att gemensamt följa upp hur arbetet fallit ut, vilka lärdomar som kan dras utifrån elevernas förståelse och vilka förändringar och förbättringar som kan göras inför den fortsatta undervisningen eller med nya elevgrupper.

Att fundera över

- ♦ Skalmans mat- och sovklocka och dikten Nyårsklockan som inleds med "Ring, klocka ring..." känner många till. Vilka litterära klockor känner eleverna till och hur kan de anknytas till undervisning om tid?

Innehållsförteckning

1	Inledning
5	Nyfikenhet, lust och fantasi
9	Problemlösning
15	Tal och antal
21	Räkna och beräkna
27	Tal i bråkform
29	Tal i decimalform – och lite procent
31	Vår spatiala värld
35	Form
41	Mätandets idé
43	Mäta längd
45	Mäta areor
47	Mäta volym
49	Att väga
51	Mönster
53	Sannolikhet
55	Statistik
59	Pengar
61	Tid

Strävorna består av Nämnarenartiklar och aktiviteter för undervisningen. De anknyter till kurs- och ämnesplanernas centrala innehåll och de förmågor som eleverna ska få utveckla i både grund- och gymnasieskolan.

I de blå strävorna anpassas innehållet i aktiviteterna på elevnivå för de elever som behöver möta matematik i många små steg och med lagom stor variation i åtanke.

En aktivitet i *Strävorna* består av lärarsidor samt elevsidor. På lärarsidorna beskrivs relativt kortfattat avsikt och matematikinnehåll, vilka förkunskaper eleverna behöver, hur aktiviteten kan introduceras, genomföras och följas upp. Elevsidorna är ofta en arbetsgång eller en spelplan.

Innehållet i denna bok har sitt ursprung i arbetet med Matematiklyftets båda moduler *Didaktiska perspektiv på matematikundervisningen* för lärare i särskolans skolformer. Här använder vi *Strävorna* i det fortsatta arbetet med att försöka sprida dessa idéer.

För mer information om *Strävorna*, de aktiviteter som finns utlagda och för att både kunna följa och påverka kommande blå strävor, se

ncm.gu.se/stravorna

