Mikael Passare

Sesam öppna dig

Att finna den hemliga koden

Här beskrivs en problemlösningsprocess med Portkods-problemet från nr 3, 2001 som behandlats under en matematiklektion med klass 8e och 8f vid Adolf Fredriks musikklasser i Stockholm.

Anta att du ska hälsa på hos en kompis som dessvärre har glömt att meddela dig sin portkod. Du står nere på gatan och undrar hur många tryckningar du behöver göra för att hitta fram till den rätta koden. Portlåset är konstruerat så att det öppnas så snart de riktiga fyra siffrorna slås in. Om koden till exempel är 3007, så kommer du in även om du råkar trycka något i stil med 1563007.

Den första idén

Ett sätt att säkert hitta koden är att helt enkelt pröva alla möjligheter i någon lämplig ordningsföljd. Man trycker kanske först 0000, sedan 0001, sedan 0002, ..., sedan 9998, och slutligen 9999. Eftersom det finns 10 000 möjliga koder och varje kod består av fyra siffror, så måste man med denna metod göra 40 000 knapptryckningar för att prova alla koder.

Mikael Passare är professor i matematik vid Stockholms universitet.

En bättre idé

Låt oss se närmare på den sifferföljd vi nyss använde:

0000 0001 0002 0003 0004 ...

Nu ser vi att detta är samma sak som att helt enkelt trycka

00000001000200030004 ...

och det betyder ju att vi egentligen har testat först 0000, sedan 0000 igen (andra till femte siffran), sedan 0000 igen (tredje till sjätte siffran), sedan 0000 igen, sedan 0001, sedan 0010, sedan 0100, och så vidare. Inte särskilt listigt med andra ord.

Nu tänker vi efter: Om vi kunde hitta en sifferföljd så att samma svit av fyra siffror aldrig upprepas men så att alla dessa sviter kommer med, hur lång skulle en sådan sifferföljd då vara? Det finns som sagt

10 000 fyrsiffriga sviter, och nu ska den första av dem börja på den långa följdens första siffra, den andra börjar på följdens andra siffra, ... och till sist den tiotusende som inleds med följdens tiotusende siffra. Det betyder att den sista kodens fjärde siffra blir sifferföljdens tiotusentredje siffra. Det skulle alltså kunna räcka med 10 003 knapptryckningar för att prova alla koder.

Problemställning:

Finns det en "smart" sifferföljd med 10 003 siffror som innehåller varje fyrsiffrig kod precis en gång? Hur hittar man i så fall denna smarta följd?

Ett par mindre exempel

Låt oss tänka oss att det bara fanns två siffror, säg 3 och 7, att välja på. Då vore det totala antalet koder lika med $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, närmare bestämt skulle dessa sexton koder vara

3333	3733	7333	7733
3337	3737	7337	7737
3373	3773	7373	7773
3377	3777	7377	7777

En smart följd skulle här bestå av 16 + 3 = 19 siffror, och det är lätt att kontrollera att till exempel nedanstående följd fungerar.

3333777737377337333

Om vi i stället har tre olika siffror, säg 0, 1 och 2, men koden bara är tresiffrig, då finns följande 27 möjliga koder:

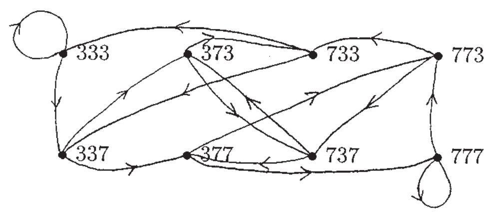
000	100	200
001	101	201
002	102	202
010	110	210
011	111	211
012	112	212
020	120	220
021	121	221
022	122	222

Här kommer en smart följd att bestå av 27 + 2 = 29 siffror och ett exempel på en sådan är

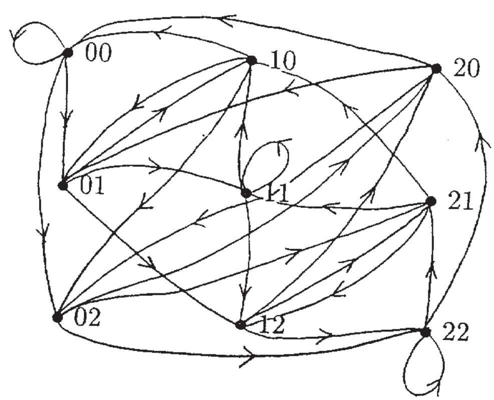
12120220102002101100012221112.

En metod

Följande visar en "promenad" som uppfyller villkoret för en smart sifferföljd. Börja vid någon av punkterna och genomför promenaden i pilarnas riktning på ett sådant sätt att varje väg passeras precis en gång:



Som synes är de två sista siffrorna i en punkt desamma som de två första i nästa punkt. På detta sätt fås en lösning till det första exemplet, och det andra fallet löses genom att göra motsvarande promenad i följande figur:



Slutsats

Om man skulle rita upp tusen punkter numrerade från 000 till 999, och om man sedan drog tio pilar från varje punkt enligt systemet att pilarna ska dras till alla de punkter vars två första siffror är lika med utgångspunktens två sista siffror, då skulle varje fyrsiffrig kod representeras av precis en pil, nämligen den som går från punkten med kodens tre första siffror till punkten med kodens tre sista siffror.

Om man sedan skulle promenera så att varje pil passeras precis en gång så skulle man på så vis finna en smart sifferföljd med 10 003 siffror. Det är inte särskilt svårt att bevisa att det faktiskt går att promenera runt på detta sätt. Detta är innebörden av nedanstående matematiska sats.

Eulers sats om riktade grafer:

I varje sammanhängande riktad graf med samma antal inkommande som utgående kanter vid varje hörn finns en Euler-cykel.

En *graf* är ett antal punkter (som kallas *hörn*) som förbundits med linjer (som kallas *kanter*), och en graf kallas *riktad* om kanterna är försedda med pilar som indikerar den tillåtna promenadriktningen. Den kallas sammanhängande om det går att promenera mellan vilka två punkter som helst. De figurer vi tittat på tidigare är alltså exempel på sammanhängande riktade grafer. En *Euler-cykel* betyder en promenad som passerar varje kant precis en gång. Eftersom våra grafer är sådana att det finns lika många inkommande som utgående pilar vid varje hörn så kan vi använda Eulers sats. Det existerar alltså en Euler-cykel, vilket precis betyder att vi kan promenera runt och samtidigt läsa av vår smarta sifferföljd.

Leonhard Euler levde under 1700-talet. Han föddes i Schweiz men bodde länge i Preussen och flyttade slutligen till S:t Petersburg i Ryssland. Han grundlade den så kallade grafteorin, det vill säga studiet av grafer, när han löste problemet med Königsbergs broar. Invånarna i östersjöstaden Königsberg hade länge undrat om det var möjligt att promenera runt i Königsberg så att var och en av stadens sju broar passerades precis en gång, och Euler bevisade att en sådan promenad var omöjlig. Staden Königsberg heter idag Kaliningrad och hör nu till Ryssland.