

## 1 AB

## Grodhopp

PROBLEMLÖSNING – TALUPPFATTNING – ALGEBRA

## Avsikt och matematikinnehåll

Elever behöver få möta många aktiviteter där de kan se att algebra bland annat är generaliserad aritmetik. För många är det ett stort steg att ta från att räkna med tal till att räkna med bokstäver. Att kunna se vilken verklighet som ligger bakom ett generellt uttryck underlättar förståelsen.

## Förkunskaper

Eleven behöver ha en god uppfattning av talraden.

## Material

En grodhoppbräda, se första elevsidan. Alternativt kan en rad med rutor ritas. Som grodor kan i princip vilket plockmaterial som helst användas bara det går att dela i två tydliga grupper. Det finns också en färdig rutrad, för kopiering, på kommande sidor.

## Beskrivning

Två grodfamiljer ska byta plats efter ett par givna regler, se första elevsidan. Genom att ändra antalet grodor i familjerna kan eleverna finna samband mellan antalen hopp. Aktiviteten stannar efter att eleverna löst uppgiften praktiskt och sedan räknat minsta antal hopp för upp till fyra grodor i varje familj. För många elever är detta ett tillräckligt omfattande problem att lösa.

## Introduktion

Om du är säker på hur grodorna hoppar kan följande vara ett sätt att introducera aktiviteten: Fyll grodhoppbrädan med fyra + fyra grodor. Berätta om reglerna samtidigt som du löser uppgiften. Eleverna hinner inte uppfatta "tricket", men alla ser att problemet är lösbart. Det brukar vara tillräckligt motiverande för att de allra flesta verkligen vill försöka själva.

För dig som ännu inte provat aktiviteten och vill försöka komma på "tricket" själv så avstår vi från att berätta om det här. Lösningen finns på [ncm.gu.se/node/5378](http://ncm.gu.se/node/5378).

## Uppföljning

Låt några elever visa hur de gjort sina tabeller. Diskutera likheter och skillnader. Vilka samband har de funnit? Diskutera hur de tänkte när de skulle gissa hur många hopp det skulle bli med fyra grodor. De såg kanske att från 3 hopp med en groda *ökar* det med 5 och sedan 7 hopp. Därför borde det bli en ökning med 9 hopp när antalet grodor ökar från tre till fyra.

Antal grodor i varje familj	Antal hopp tills alla bytt plats	Ökning
1	3	5
2	8	7
3	15	9
4	24	

Diskutera hur många hopp det borde bli med först fem och sedan sex grodor.



## Variation

*Tornet i Hanoi* är en aktivitet som är snarlik Grodhopp (se tex Uppslaget i Nämnaren nr 1, 1999).

## Utveckling

För de elever som vill, eller för elevgrupper som kommit längre i algebraundervisningen, finns en andra elevsida med fortsättning. Här måste det konkreta materialet snart överges då antalet grodor blir mycket stort. Slutligen efterfrågas den generella formeln för aktiviteten.

Om andra sidan används i direkt anslutning till första sidan behövs knappast någon introduktion. Däremot finns det mycket som kan följas upp. Om du sett att eleverna formulerat "antalet hopp" på olika sätt är det ett utmärkt tillfälle att påvisa styrkan i algebra. Ifrågasätt varför uttrycken för  $n$  grodor ser olika ut i tabellen.

Antal grodor i varje familj	Antal hopp tills alla bytt plats			
1	3	$1 \cdot 3$	$2^2 - 1$	3
2	8	$2 \cdot 4$	$3^2 - 1$	$3 + 5$
3	15	$3 \cdot 5$	$4^2 - 1$	$3 + 5 + 7$
4	24	$4 \cdot 6$	$5^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + 9$
...	...	...	...	...
50	2600	$50 \cdot 52$	$51^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + \dots + (2 \cdot 50 + 1) = 2600$
100	10200	$100 \cdot 102$	$101^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + \dots + 201 = 10200$
$n$		$n(n+2)$	$(n+1)^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1)$

Förenkla tillsammans de olika uttrycken:

$$n(n+2) = n^2 + 2n$$

$$(n+1)^2 - 1 = (n^2 + 2n + 1) - 1 = n^2 + 2n$$

$$3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) = \frac{(3 + (2n+1)) \cdot n}{2} = \frac{(2n+4) \cdot n}{2} = (n+2) \cdot n = n^2 + 2n$$

Det sistnämnda uttrycket baseras på summan av en talföljd där genomsnittet tas av summan av första och sista termen multiplicerat med antal termer.

Ett exempel:  $1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 + 10$  ska summeras. Första termen är 1 och sista termen 10, dvs summan är 11.  $2 + 9 = 11$ ,  $3 + 8 = 11$  etc. Sammanlagt finns fem summor vilket medför  $5 \cdot 11 = 55$ . I en längre serie kan första och sista talet summeras och sedan multipliceras med antalet termer (detsamma som sista termen) och sedan divideras med två eftersom varje tal då använts två gånger.

## Erfarenheter

Det är knappast någon elev som direkt och strukturerat fyller i tabellerna steg för steg. Istället måste de prova, räkna, få lov att göra fel, göra om, prova nya idéer etc under en längre tid.

## Ursprung

Aktiviteten har långa anor och förekommer runt om i världen. Ibland är det stengetter som ska hoppa över varandra då de möts på en smal bergsstig och i Australien är det naturligtvis kängurur som hoppar över varandra. Idén med grodor, och delar av innehållet i aktiviteten, kommer från norska NSMO.

## Att läsa

Stephens, M. (2007). Generalisering av numeriska utsagor (s 35–48) i *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*. NCM, Göteborgs universitet.



# Tillverka en grodhoppbräda

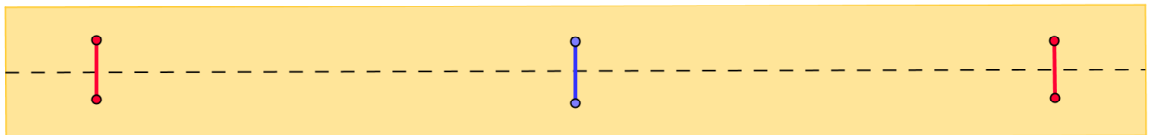
## Material

Till en grodhoppbräda behövs följande förbrukningsmaterial och verktyg:  
8 träkulor med diameter ca 24 mm, 9 träpluggar 6 mm, trälist 33 mm x 15 mm, borr 6 mm och 7/8 mm, hobbyfärg och penslar, spik med litet huvud, tunn vattenfast tuschpenna, linjal, vinkelhake, såg, bormaskin, sandpapper, trälim och blyertspenna.

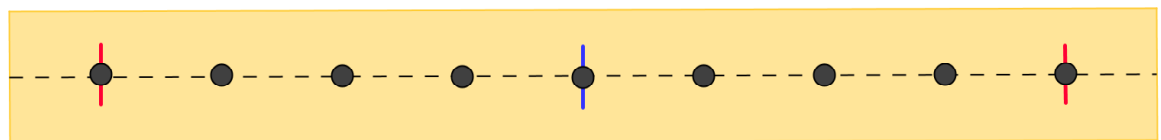
## Gör så här

### Spelbräda:

- Du behöver en trälist 30 cm lång. Använd linjal och vinkelhake när du mäter och markerar var du ska såga.
- Märk ut var du ska borra hålen för träpluggarna. Markera mittlinjen på trälisten på både längden och bredden. Se det blå på teckningen. Markera svagt med blyertspenna.



- Se det röda på teckningen. Från den ena änden av trälisten sätter du ett märke 2 cm från kanten. Märket ska korsa mittlinjen. Gör på samma sätt från den andra änden av trälisten.
- Finn mitten mellan röd och blå markering (eller halvera sträckan mellan röd och blå markering). Märkena ska korsa mittlinjen.
- Halvera linjerna igen så att du till slut har 9 korta linjer.
- Borra hål noggrant i skärningspunkten mellan mittlinjen och de korta markeringarna. Ställ in borren så att djupet på hålet är hälften av trälistens tjocklek, här 7,5 mm.
- Putsa trälisten med sandpapper.
- Limma en träplugg i varje hål och spelbrädet är klart.



### Grodorna:

- Ifall hålen i träkulorna är för små för att passa på träpluggarna behöver du borra upp lite större hål. Använd ett borr med tjockleken 7 eller 8 mm.
- Måla fyra kulor i en färg och välj en kontrastfärg till de andra fyra. Låt dem torka.
- Använd huvudet på en spik, doppa i färg och "pricka" ögon.
- Teckna klart ett grodansikte med tunn, vattenfast tusch.



Använd runda markörer med en diameter på ca 2 cm. Fyra i en färg och fyra i en annan.


# Grodhopp

## Material

En grodhoppbräda, papper och penna



## Två grodfamiljer

En röd och en grön grodfamilj möts på den smala stigen till dammen. De vill komma förbi varandra och kan göra det på följande sätt:

- De röda grodorna kan bara hoppa åt höger och de gröna grodorna kan bara hoppa åt vänster. Ingen får hoppa tillbaka.
- Varje groda kan hoppa till en ledig plats precis bredvid sig *eller* hoppa över en groda från den andra familjen.
- Det får bara rum en groda på varje plats.
- Uppgiften är löst när de båda familjerna helt bytt plats.

## Sök efter mönster

- Sätt upp tre röda och tre gröna grodor med en tom plats i mitten.
- Låt familjerna byta plats enligt reglerna ovan.
- När du är färdig, gör det en gång till! Den här gången ska du räkna alla hoppen. Anteckna.
- Prova nu att bara sätta upp en groda från varje familj med en tom pinne i mitten. Hur många hopp behövs? Anteckna.
- Prova sedan med två grodor från varje familj. Hur många hopp? Anteckna.
- Gör en tabell där du skriver in antal grodor i den ena kolumnen och antal hopp i den andra.
- Ser du något samband?
- Gissa hur många hopp det blir om det är fyra grodor från varje familj som ska byta plats. Anteckna och prova sedan om det stämmer.

## Väldigt många grodhopp

Eftersom vädret blivit så fint är det plötsligt massor med grodor som vill ta sig till dammen för att bada och sedan hoppa upp till skuggan under träden.

### Material

Fortsätt använda din tabell. Om du vill ha fler grodor än vad som finns på grodbrädan kan du använda tex markörer eller multilinkkuber.

### Sök efter mönster

- Gissa hur många hopp som behövs när det är först 50 och sedan 100 grodor i varje familj som ska byta plats.
- Kan du på något sätt räkna ut hur många hopp som behövs? Hur?
- Kan du med ord skriva en eller ett par meningar som beskriver hur många hopp som behövs för ett visst antal grodor?
- Försök att på egen hand eller tillsammans med en kompis skriva en regel eller formel för hur du kan räkna ut hur många hopp som behövs, oavsett hur många grodor det är.

