

Resultatrik matematik

Hur kan en mobil laborativ matematikverkstad
vara ett verktyg för lärare vid undervisning?

Jannike Netterdag och Eva Rönström

Institutionen för barn- och ungdomsvetenskap

Examensarbete 15hp

Barn- och ungdomsvetenskap III med examensarbete 30 hp

Lärarprogrammet (210–330 hp)

Höstterminen 2009

Examinator: Ingrid Olsson

English title: A mobile math workshop, a tool for teachers in education?



Stockholms
universitet

Resultatrik matematik

Hur kan en mobil laborativ matematikverkstad vara ett verktyg för lärare vid undervisning?

Jannike Netterdag och Eva Rönström

Sammanfattning

Vårt syfte med uppsatsen är att med hjälp av kvalitativa intervjuer undersöka vilka didaktiska krav som är lämpliga att ställa på en mobil laborativ matematikverkstad och hur den kan påverka elevers matematikinläring. Vi har ställt oss tre frågor: På vilket sätt kan en mobil matematikverkstad påverka elevernas matematikinläring? Hur kan matematikundervisning göras resultatrik med hjälp av laborativ matematik? Inom vilka områden finns det ett behov av att höja elevernas matematikkunskaper?

Genom intervjuer med åtta matematiklärare som deltog i ett seminarium för matematikutvecklare har vi samlat in vårt empiriska underlag. Med hjälp av intervjuerna ville vi ta reda på matematiklärarnas åsikter om hur matematikundervisning kan göras resultatrik med hjälp av laborativ matematik samt fånga upp deras exempel på framgångsrika lektioner. Vi ville också veta vad lärarna ansåg om elevernas matematikkunskaper.

I diskussionen ställer vi resultatet av intervjuerna mot tidigare forskning och det teoretiska perspektivet. I vår undersökning fann vi att en mobil laborativ matematikverkstad kan vara ett användbart verktyg för lärare vid matematikundervisning. Den mobila funktionen kan vara en lösning på praktiska problem som till exempel lokalbrist. Arbete med laborativ matematik tycks kunna ha en positiv effekt på elevers matematikinläring. Med hjälp av laborativt material kan matematiska begrepp tydliggöras och konkretiseras. Det laborativa materialet har dock ingen konkretiserande effekt i sig självt utan ställer höga krav på att läraren kan tydliggöra sambandet mellan den konkreta och den abstrakta representationsformen. Risken med laborativ matematik är annars att eleverna hålls sysselsatta utan att inläring sker.

Lärarens ämneskompetens i matematik tillsammans med en mobil laborativ matematikverkstad skulle kunna vara ett verktyg för att hjälpa elever förbättra sina matematikkunskaper och därmed också de svenska elevernas resultat i internationella undersökningar. Hur lärare använder sig av det laborativa materialet är avgörande för om matematikundervisningen blir resultatrik.

Nyckelord

Mobil matematikverkstad, laborativ matematik, matematikundervisning, matematikinläring

Författarnas förord

Vi vill börja med att rikta ett stort tack till alla som bidragit till att denna studie har kunnat genomföras.

Först och främst vill vi tacka vår uppdragsgivare för hennes inspiration och stöd. Utan hennes drivkraft skulle denna studie inte ha blivit till. Vi vill också tacka de matematiklärare som avsatt sin tid för att bli intervjuade och på så sätt bidragit med sina tankar och idéer kring laborativ matematik. Vidare vill vi framföra ett stort tack till vår kurslärare Suzanne Kriström och vår handledare Elisabeth Nygren som varit ett stort stöd för oss och gett många goda råd på vägen. Sist men inte minst vill vi tacka våra underbara familjer för deras tålamod och engagemang under arbetets gång.

Vi har valt att dela upp huvudansvaret för den tidigare forskningens olika delområden. Eva har haft huvudansvaret för kapitlen om matematikinlärning och elevers matematikkunskaper och Jannike har i det förstnämnda kapitlet skrivit om problemlösning och van Hiele-nivåer. Jannike har haft huvudansvaret för kapitlet om laborativ matematik. Resterande delar av studien har varit ett givande samarbete mellan oss båda.

1. Inledning	1
1.1 Syfte och frågeställningar.....	2
1.2 Avgränsningar	2
1.3 Disposition	2
2. Bakgrund och tidigare forskning.....	3
2.1 Matematikinläring	3
2.1.1 Förståelse	3
2.1.2 Språk	4
2.1.3 Aktivitet och motivation	5
2.1.4 Undervisningens ramar	7
2.2 Elevers matematikkunskaper	10
2.3 Laborativ matematik.....	11
2.3.1 Från konkretisering till abstraktion	11
2.3.2 Matematikverkstad.....	15
3 Teoretiskt perspektiv	17
3.1 Sociokulturellt perspektiv	17
4. Metod	20
4.1 Metodval och urval	20
4.2 Urval	21
4.3 Genomförande	22
4.4 Trovärdighet.....	22
4.5 Etiska aspekter	23
5. Resultat	24
5.1 Matematikverkstäders påverkan på elevers inläring	24
5.1.1 För- och nackdelar med matematikverkstäder	24
5.1.2 Elevers matematikinläring	25
5.2 Elevernas matematikkunskaper.....	27
5.3 Matematikundervisning med hjälp av laborativ matematik.....	29
6. Diskussion	31
6.1 Metoddiskussion.....	31
6.2 Resultatdiskussion.....	32
6.2.1 Matematikverkstäders påverkan på elevers inläring	32
6.2.2 Elevernas matematikkunskaper	35

6.2.3 Matematikundervisning med hjälp av laborativ matematik.....	37
6.3 Slutsatser och framtida användning.....	40
6.3.1 Slutsatser	40
6.3.2 Bidrag till läraryrket	41
6.3.3 Vidare forskning.....	41
7. Reflektioner	42
Referenser	43
Bilaga 1 Enkät.....	46
Bilaga 2 Intervjuguide.....	49

1. Inledning

Inför vårt examensarbete blev vi tillfrågade om vi ville skriva ett praxisnära examensarbete. En lärare som arbetar som matematikutvecklare i en kommun hade observerat att matematikverkstäder i många skolor inte användes i tillräckligt stor utsträckning. Hon ville undersöka om det går att skapa mobila (flyttbara) matematikverkstäder som är lättillgängliga verktyg för lärare i deras strävan efter att hjälpa elever till en resultatrik matematikinläring. Med resultatrik menar vi här att målet med undervisningen uppnås. Kan en mobil matematikverkstad bidra till att utveckla matematikundervisningen i grundskolan? Vår uppdragsgivare ville också veta om det finns forskning som bekräftar att laborativ matematik leder till matematikinläring. Vi tackade med glädje ja till samarbetet och vårt uppdrag i projektet är nu att försöka beskriva en sådan mobil matematikverkstad utifrån en vetenskaplig grund.

En matematikverkstad är enligt författarna till boken *Matematikverkstad* ”en plats för lustfyllt lärande” (Rystedt & Trygg 2009, s 4). Rystedt och Trygg menar att aktiviteterna i verkstaden ska leda till fördjupade matematikkunskaper och ökat intresse för matematik. Laborativ material används, enligt författarna, i matematikundervisning bland annat för att konkretisera och utveckla matematiska begrepp, för att åskådliggöra räkning eller för att eleverna ska upptäcka mönster och samband. Ett varierande arbetssätt, där det laborativa är ett av flera, ger möjligheter för fler elever att nå målen i matematik än vid enskilt arbete i en lärobok (Rystedt & Trygg 2009).

I den internationella jämförelsen av elevers matematikkunskaper TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) har svenska elever vid mätningar 1995, 2003 och 2007 presterat under genomsnittet i EU/OECD-länderna (Skolverket 2008c). De svenska eleverna hade bristande kunskaper i bland annat taluppfattning, aritmetik, algebra och geometri och var också sämre än genomsnittet när det gällde att använda fakta och begrepp i matematik (Skolverket 2008c). Många ansträngningar har gjorts genom åren för att förbättra elevernas matematikkunskaper men man har ännu inte lyckats vända den negativa trenden (Löwing 2004). Detta leder oss in på frågor om hur matematikundervisning bör se ut för att leda till inläring och hur matematikinläring egentligen går till. Skulle en laborativ matematikverkstad kunna bidra till att förbättra elevers matematikkunskaper? Vilka områden i matematiken borde den i så fall fokuseras på?

1.1 Syfte och frågeställningar

Vårt syfte med uppsatsen är att med hjälp av kvalitativa intervjuer undersöka vilka didaktiska krav som är lämpliga att ställa på en mobil laborativ matematikverkstad och hur den kan påverka elevers matematikinläring.

I följande frågeställningar avser vi att undersöka de intervjuade matematiklärarnas uppfattningar:

- På vilket sätt kan en mobil matematikverkstad påverka elevernas matematikinläring?
- Hur kan matematikundervisning göras resultatrik med hjälp av laborativ matematik?
- Inom vilka områden som omfattas av kursplanen i matematik finns det ett behov av att höja elevernas kunskaper?

1.2 Avgränsningar

I vårt uppdrag ligger att försöka beskriva en mobil laborativ matematikverkstad utifrån en vetenskaplig grund. Vår uppdragsgivare kommer att använda underlaget för att utforma den mobila verkstaden. Vi kommer därför inte i detalj att gå in på vilket material eller vilka övningar en sådan matematikverkstad ska innehålla och inte heller utförligt hur den rent praktiskt kan utformas.

1.3 Disposition

Vi börjar vår uppsats med att i inledningen introducera läsaren till ämnet matematikverkstad. Efter detta följer syfte och frågeställningar. I kapitel 2 redogör vi för tidigare forskning när det gäller matematikinläring, elevers matematikkunskaper och laborativ matematik. Denna del är omfattande eftersom en del av vårt uppdrag är att i litteraturen undersöka om mobila matematikverkstäder kan vara till hjälp för matematikinläring och undervisning. I kapitel 3 beskriver vi sociokulturell teori som är den teoretiska utgångspunkt vi har valt för detta arbete. Därefter följer en metoddel där vi beskriver hur vi gått till väga vid insamling och analys av material samt hur vi har beaktat de etiska aspekterna. Texten avslutas med resultat, diskussion och reflektioner.

2. Bakgrund och tidigare forskning

I detta kapitel redogörs först för vad som tidigare har skrivits om vad som gör matematikinläring resultatrik. Där tas upp vilka faktorer som påverkar inläringen, vilket är avgörande för hur en mobil matematikverkstad inverkar på matematikundervisningen. För att kunna avgöra vilka områden en matematikverkstad bör innehålla tas sedan upp vilka kunskaper eleverna har enligt olika källor och vilka de saknar. Därefter beskrivs vad laborativt material och laborativ matematik innebär och kapitlet avslutas med en översikt över det som skrivits om matematikverkstäder.

2.1 Matematikinläring

Hur matematikinläring sker har studerats i över hundra år av bland annat psykologer, matematiker och inläringsteoretiker (Orton & Frobisher 2004). Många olika teorier har förts fram. Numera är forskarna enligt Orton och Frobisher (2004) överens om att den traditionella undervisningen, som vanligtvis består av att läraren hållit en gemensam genomgång på tavlan följt av att eleverna enskilt har memorerat talfakta och tränat grundläggande matematiska färdigheter och procedurer, inte räcker till för att ge alla elever goda matematikkunskaper. De traditionella metoderna kan enligt Orton och Frobisher vara användbara men behöver kompletteras med andra metoder för att främja maximal inläring.

2.1.1 Förståelse

På senare år har man i undervisningen fokuserat på att skapa förståelse för matematiska begrepp i stället för enbart memorering av procedurer och baskunskaper (Orton & Frobisher 1996/2004).

Julia Anghileri (2000) beskriver hur matematisk förståelse innehåller en progression som inleds med konkreta upplevelser, går via abstrakta/mentala metoder för att slutligen nå symbolisk representation.

Beginning with the manipulation of real objects, sorting and rearranging different collections, children are introduced to patterns that will be identified with number words. The number '3' for example, can be represented as a collection of three buttons, or as three toys or three steps, but '3' itself is an abstraction from each of these situations. Talking about their experiences will help children establish the significance of number words that relate to the visual patterns that they consistently meet and provide the foundations for mental imagery (Anghileri 2000, s. 8).

Innan barnen kan räkna med abstrakta tal lär de sig att använda sina fingrar eller andra föremål som kan representera de verkliga objekten. Det är dock enligt Anghileri viktigt att eleverna inte blir beroende av det konkreta materialet för att kunna räkna. Målet är istället att de ska utveckla mentala bilder som associeras med materialet och fungerar i tänkta situationer. Anghileri menar

att arbete med mönster är en god hjälp vid skapandet av mentala bilder eftersom mönstren kan visa på samband mellan olika visuella bilder och därmed hjälper eleverna att se de samband som finns mellan tal.

Görel Sterner och Ingvar Lundberg (2002) talar också om att föreställning av objekt och skapande av inre föreställningar är ett viktigt steg i matematikinläringen. De menar att lärare bör planera sin undervisning så att eleverna lär sig skapa inre bilder och representationer av tal och händelser anknutna till matematik. Detta hjälper dem att utveckla formellt tänkande om matematik.

Dina och Pierre van Hiele har formulerat en teori om utvecklingen av elevers tänkande i geometri. Hedrén (1992) beskriver i artikeln *Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometriundervisningen* forskning, som främst bedrivits av van Hiele, kring elevers tänkande inom geometri.

Van Hiele-nivåerna beskrivs med fem olika nivåer som successivt har en ökande abstraktion när det gäller elevernas förståelse/tänkande inom geometri. Diana och Pierre van Hiele menar att det finns en progression i de olika nivåerna som leder till abstraktion. De fem nivåerna, i stigande ordning, är *igenkänning*, *analys*, *abstraktion*, *deduktion* och *stringens*. Van Hiele menar vidare att alla elever börjar på den lägsta nivån för att sedan gå vidare. Det är inte nödvändigt att nå de slutliga nivåerna. Dock är det en förutsättning att eleven har tillägnat sig strategierna på en nivå för att kunna gå till nästa. Vad de olika nivåerna innebär i geometriundervisning beskrivs av van Hiele (Hedrén 1992) och listas här i förkortad version:

Nivå 1. *Igenkännande* (visualisering). Eleven lär sig vissa termer och känner igen en geometrisk figur som helhet ...

Nivå 2. *Analys*. Eleven kan analysera egenskaper hos en figur empiriskt ...

Nivå 3. *Abstraktion*. Eleven kan logiskt ordna figurer, till exempel alla kvadrater är rektanglar, men alla rektanglar är inte kvadrater ...

Nivå 4. *Deduktion*. Eleven förstår betydelsen av deduktion och den roll axiom, satser och bevis spelar i geometrin ...

Nivå 5. *Stringens*. Eleven förstår vikten av precision, när man arbetar med geometrins grunder som till exempel Hilberts axiomsystem för geometrin ... (Hedrén 1992, s. 28).

Van Hieles forskning har, enligt Hedrén, påvisat att undervisning i geometri börjar på en alltför teoretisk nivå vilket då innebär att eleverna har missat grundnivåerna (Hedrén 1992).

2.1.2 Språk

Språket har en central roll vid matematikinläring (Sterner & Lundberg 2002; Orton & Frobisher 2004; Malmer 2002). Matematiken kretsar till stor del kring siffror men bygger enligt Sterner och Lundberg på ”språk i form av text, instruktioner och symboler” (2002, s. 15). Sterner och Lundberg betonar särskilt vikten av att både tala och skriva i samband med matematik ”för att kunna organisera sina tankar och lära”. De fortsätter: ”Genom att sätta ord på tankar och idéer lyfts de upp och blir synliga för reflektion och eftertanke och på så sätt kan en djupare förståelse nås” (Sterner & Lundberg 2002, s. 25). De säger vidare: ”Genom att kommunicera med sitt eget talade språk, använda sina egna uttrycksformer, rita bilder och handskas

med verkliga objekt, skaffar sig barnen erfarenheter som sedan kan utvecklas till formella kunskaper och förståelse” (Sternér & Lundberg 2002, s. 25).

Man får dock inte överskatta kommunikationen. Inger Wistedt (1996) menar att det inte räcker med att ge eleverna tillfälle att tala matematik. Eleverna behöver också hjälp av läraren med att tydliggöra sina tankar.

Språket tycks vara av speciellt stor betydelse för begreppsbyggande i matematik (Sternér & Lundberg 2002; Orton & Frobisher 1996/2004). Att noga introducera nya begrepp och idéer är enligt Orton och Frobisher (1996/2004) mycket viktigt för elevernas inläring. Betydelsen av begreppen måste diskuteras och eleverna måste få möjlighet att säga, skriva och använda dem i rätt kontext. Därefter måste de dessutom regelbundet användas av eleverna i rätt sammanhang för att de ska internaliseras i elevernas tankar.

Även Sternér och Lundberg påtalar vikten av att läraren lyfter fram och synliggör viktiga begrepp eftersom inte alla elever upptäcker dem själva (Sternér & Lundberg 2002).

Madeleine Löwing (2004) har undersökt kommunikationen mellan lärare och elever under matematiklektioner. Hon menar att det är av yttersta vikt att lärarna använder sig av ett matematiskt korrekt språk och undviker tvetydigt vardagsspråk. Om eleverna inte lär sig det matematiska språket stöter de på problem när de använder läroböcker eftersom de då har svårt att förstå det matematiskt korrekta språk som används där. Detta kan leda till att eleverna missförstår instruktionerna i läroboken. Vid arbetet med vardagsnära matematiska problem måste läraren enligt Löwing också hjälpa eleverna att förädla och förändra vardagsspråket till ett mer matematiskt förankrat språk så att det inte bara gäller det aktuella problemet utan även går att använda vid arbete med andra problem i framtiden.

Läsförståelse är också av stor betydelse för matematikinläringen. Ebbe Möllehed (2001) har visat att när elever i årskurs 4-9 löser matematiska problem felaktigt är en av de största orsakerna att de inte har förstått textinnehållet i problemen. Eleverna bör därför enligt Sternér och Lundberg (2002) undervisas i den språkliga aspekten av matematiken. Övning av läsförståelse i samband med matematik, reflektion över matematiktexternas innehåll och att skriva om matematik ur ett metakognitivt perspektiv är några aktiviteter som kan främja matematikinläringen.

2.1.3 Aktivitet och motivation

Gudrun Malmer (2002) anser att aktiva elever är en förutsättning för inläring. Hon argumenterar: ”Att själv aktivt ta del i handlingar bidrar till en annan dimension av tänkandet och därmed av förståelsen. Ett sådant arbetssätt banar väg för produktion i stället för att blott och bart stanna vid reproduktion” (Malmer 2002, s. 29). En rad olika arbetsformer kan användas för att aktivera eleverna. *Problemlösning* och *matematisk modellering* är två exempel som beskrivs här nedan.

2.1.3.1 Vad är problemlösning?

Ann Ahlberg (1992) har i sin forskning studerat elevers problemlösning utifrån ett antal givna problem. Med *problem* avser Ahlberg att det inte finns någon given matematisk modell som skall användas vid lösningen av uppgiften.

Frank Lester (1996) hävdar att om ett problemlösningsprogram skall vara framgångsrikt måste det ha lämpligt innehåll, undervisningsstrategier och riktlinjer för genomförande.

Lester (1996) menar att om undervisningen skall leda till förbättrade prestationer inom problemlösning bör den innehålla återkommande tillfällen för att lösa olika slags problem, systematisk strategiundervisning och utveckling av tankeprocesser och färdigheter. Lester anser att tyngdpunkten i undervisningen bör ligga på processproblem, vilket han definierar som problem där lösningen inte fås endast genom beräkningar. Lester ser att det stimulerar en utveckling av generella strategier för förståelse, planering och genomförande av problemlösning. Lester menar att ett av skälen till att elever har svårt med problemlösning beror på brister i undervisningen gällande problemlösningsstrategier. Eleverna får många gånger endast undervisning i *en* strategi, nämligen den att välja ett antal operationer och sedan genomföra beräkningarna. Utvecklingen av dessa strategier delar Lester in i två faser. Den ena fasen utgör inläring av en särskild strategi och dess innebörd. Denna praktiseras sedan på problemet. Den andra fasen avser att ge eleverna insikt om när strategin skall användas. I denna fas är det inte givet vilken strategi man skall använda. Eleven själv får försöka hitta den eller de strategier som kan tillämpas på problemet.

Lester har identifierat åtta tankeprocesser som innebär aktiviteter för att utveckla speciellt tänkande och färdigheter:

1. Förstå/formulera frågan i problemet/situationen.
2. Förstå villkoren och variablerna i problemet.
3. Välja/finna data som behövs för att lösa problem.
4. Formulera delproblem och välja lämpliga Lösningsstrategier.
5. Använda Lösningsstrategi korrekt och nå delmål.
6. Ge svar i termer av de data som ges i problemet.
7. Värdera rimligheten i svaret.
8. Göra lämpliga generaliseringar (Lester 1996, s. 89).

Lester menar att väldigt få elever blir framgångsrika problemlösare utan lärares hjälp och att den mest utmanande uppgiften för en lärare är vilken typ av handledning som skall ges och när den skall ges. Lester anser att läraren måste spela en aktiv roll genom att observera, fråga och, om nödvändigt, ge idéer. Hans princip bygger på helklassdiskussioner om problemet följt av arbete individuellt eller i grupp. Arbetet avslutas med ytterligare en diskussion kring problemet i helklass.

Slutligen ser Lester det viktiga i att man som lärare, förutom kunskapen om vad och hur man skall undervisa, även funderar igenom hur man hanterar frågor kring den tid som ägnas åt problemlösning, olika sätt att gruppera elever vid undervisning, anpassning av undervisning för hög- och lågpresterande elever, utvärdering av prestationer samt hur man skapar en positiv inställning i klassrummet.

Kerstin Hagland, Rolf Hedrén och Eva Taflin (2005) menar att problemlösning bidrar positivt till matematikinläringen på många sätt. Exempel på detta är ökad motivation och lust att lära sig matematik, möjligheter att bygga upp och vidga sina kunskaper i matematik, övning i att

välja bland och tillämpa sina redan uppbyggda kunskaper, utvecklad tankeförmåga, ökad begreppsförståelse, färdighetsträning och träning i symboliskt språk. Under samtal får eleverna också nya och fördjupade kunskaper när egna och andras lösningsförslag diskuteras.

Morten Blomhøj (2004) argumenterar på ett liknande sätt för matematikinläring med hjälp av matematisk modellering (*mathematic modelling*). Blomhøj definierar en matematisk modell som ”*a relation between some mathematical objects and relations on the one hand and on the other hand a situation or a phenomenon of a non-mathematical nature*” (2004, s. 146). Om eleverna skapar modeller för matematik som ligger nära deras verklighet, till exempel hur mycket vatten det går åt till morgonduschen eller vilken genomsnittshastighet bussen körde med på vägen till skolan, kan modelleringen överbrygga gapet mellan elevernas upplevelser i vardagslivet och matematiken. Arbetssättet leder enligt Blomhøj till att eleverna är aktiva och motiverade till att lära sig matematik. Det ger också eleverna underlag för deras begreppsinläring och matematiska verktyg för att förstå och beskriva verkligheten. Blomhøj tänker sig att matematisk modellering kan ha en central roll i matematikundervisningen och att elever redan i 11-årsåldern kan börja arbeta med matematiska modeller utan att behöva vara medvetna om det.

2.1.4 Undervisningens ramar

Många olika faktorer påverkar resultatet av matematikundervisningen. Löwing (2004) delar upp dessa faktorer i *fasta* och *rörliga ramar*. Till de fasta ramarna hör till exempel styrdokument och rådande kunskapssyn. Dessa kan inte påverkas av läraren. De rörliga ramarna kan läraren själv styra över. Dit hör exempelvis ämnesinnehåll, läromedel, elevgruppering, arbetsform och arbetssätt. Denna indelning är också lämplig i denna uppsats för att undersöka vad som leder till resultat i matematikundervisningen.

2.1.4.1 Fasta ramar

Läroplanen Lpo 94 (Skolverket 2006) och *kursplanen i matematik* (Skolverket 2009) styr planering av matematikundervisningen. Vad säger då dessa styrinstrument om hur undervisningen ska organiseras och vad som ska uppnås med arbetet? När det gäller arbetsformer föreskriver läroplanen att ”en varierad och balanserad sammansättning av innehåll och arbetsformer” skall användas för att främja elevernas harmoniska utveckling (Skolverket 2006, s. 6). Vidare talas om vikten av att ”de intellektuella såväl som de praktiska, sinnliga och estetiska aspekterna” uppmärksammas i skolarbetet (Skolverket 2006, s. 6). Läroplanen är skriven utifrån ett konstruktivistiskt synsätt (Skolverket 2003) som innebär att elevernas tankar och kunskaper formas av både individuella processer och interaktion med andra (Ernest1998). Detta kan anas i att eleverna också skall ges möjligheter att ”pröva, utforska, tillägna sig och gestalta olika kunskaper och erfarenheter” (Skolverket 2006, s. 7). När det gäller mål att uppnå i grundskolan gällande matematik nämner läroplanen två mål. Eleverna skall efter genomgången grundskola behärska grundläggande matematiskt tänkande och kunna använda det i vardagslivet samt känna till och förstå grundläggande begrepp (Skolverket 2006).

I kursplanen för matematik formuleras i följande citat det övergripande målet med matematikundervisningen: ”Utbildningen i matematik skall ge eleven möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på olika problem” (Skolverket 2008a, s. 26).

Kursplanen betonar särskilt vikten av att matematiken är meningsfull och vardagsnära för eleverna. I Skolverkets kommenterade version av kursplanen i matematik (Skolverket 2009) kan läsas:

Uttryck som återkommer i mål att uppnå för årskurs tre är *elevnära, vanliga* och *vardagligt*. Det innebär att undervisningen ska utgå från barnens språk, vardag och begreppsvärld för att sedan berikas med matematiska begrepp, symboler och strategier. I matematiska samtal kan eleven utveckla ett matematiskt språk och förståelse för matematiska begrepp. För att utveckla ett alltmer abstrakt tänkande kan konkretiserande material och bilder användas parallellt med matematiska symboler och begrepp (s 12).

I kursplanen står även: ”Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleven -utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer” (Skolverket 2008a, s. 26).

Problemlösning har en central roll i kursplanen (Skolverket 2008a). En balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematiska begrepp, metoder och uttrycksformer skall eftersträvas. Ett av strävansmålen är också att eleverna ska utveckla ”sin förmåga att formulera, gestalta och lösa problem med hjälp av matematik, samt tolka, jämföra och värdera lösningar i förhållande till den ursprungliga problemsituationen” (Skolverket 2008a, s. 26).

Utifrån kursplanen har Gudrun Malmer tankar om hur undervisningen ska utformas (2002). Hon menar att:

- utrymme för reflekterande samtal måste skapas,
- arbetsklimatet måste präglas av hänsyn och respekt så att eleverna vågar fråga och inte generas av ”felaktiga” svar,
- inlärnin g endast sker om eleven själv är aktiv. Eleverna skall därför tränas till eget ansvar av läraren som kan liknas vid en studievägledare,
- ökat utrymme måste ges åt laborativt och undersökande arbetssätt.

Elevers förkunskaper och *lärares yrkeskunskaper* är rörliga i ett längre perspektiv men fasta under en given lektion (Löwing 2004). Att lärare känner till sina elevers förkunskaper är en förutsättning för framgångsrik planering av undervisningen.

Forskning sammanfattad av Per-Olof Bentley (2003) visar att lärares yrkeskunskaper, som innefattar ämneskunskaper, pedagogiska kunskaper och lärarerfarenhet, är en av de faktorer som mest påverkar elevernas prestationer. Højning av lärares ämneskunskaper förbättrar elevernas insatser (Bentley 2003).

2.1.4.2 Rörliga ramar

Undervisningens organisation är en rörlig ram. Joakim Samuelsson (2009) har undersökt hur undervisningsmetoden påverkar matematikinlärnin gen. Han studerade hur olika metoder påverkade elevers utveckling och attityd till aritmetik. De tre olika metoder som användes var *traditionell undervisning*, där läraren höll gemensam genomgång på tavlan och eleverna sedan räknade i boken, *enskilt arbete*, som innebar att eleverna räknade i sina böcker och endast kommunicerade enskilt med läraren, samt *problemlösning*, då eleverna löste problem i grupp

och sedan diskuterade i klassen. Resultatet av undersökningen visade att räkneförmågan inte påverkades av de olika metoderna. De elever som undervisades med hjälp av problemlösning och traditionell undervisning fick däremot en mer utvecklad taluppfattning än de som arbetat enskilt. Taluppfattningen har, enligt Samuelsson, en central betydelse för elevernas fortsatta matematikinläring. De olika undervisningsmetoderna gav även skillnader i elevernas attityder. Eleverna som arbetat med problemlösning utvecklade större intresse och inre motivation för matematiken än de två andra grupperna. Problemlösningsgruppen och den traditionella gruppen utvecklade också en större tilltro till sin egen förmåga än de som arbetat enskilt. Samuelsson drar slutsatsen att lärare bör arbeta mer med problemlösning för att elevernas intresse och tilltro till sin egen förmåga ska utvecklas, något som positivt påverkar resultatet av elevernas inläring i matematik (Samuelsson 2009).

Även Bentley (2003) har undersökt hur olika undervisningsformer påverkar inläringen. Han redogör i *Mathematics Teachers and Their Teaching* för den aktuella kunskapen på området. Bentleys egen forskning visar att nära hälften (48,8 procent) av ett stort antal svenska lärare som undervisade i matematik i grundskolans senare år undervisade med hjälp av helklassinstruktion. Detta innebär att eleverna undervisas i en stor grupp genom att läraren först ger alla elever samma uppgift och eleverna därefter arbetar enskilt med uppgiften. Bentley har jämfört annan forskning rörande elevers resultat i olika undervisningsformer och kommit fram till att gruppering inom klasserna kombinerat med inläring genom samarbete ger en positiv effekt på inläringen gentemot helklassinstruktion. Även i klasser med hög studietakt och "elitklasser", där innehållet anpassas till elevernas förkunskaper och färdigheter, är elevernas framsteg mätbart större än vid helklassinstruktion. Inget stöd finns däremot, enligt Bentley, i forskningen för att åldersblandade och nivågrupperade klasser skulle ge en positiv effekt gentemot helklassinstruktion.

När det gäller klasstorlekens inverkan på inläringen kan det vara svårt att urskilja denna faktor från andra faktorer som påverkar elevers prestationer (Bentley 2003). Undersökningar gjorda i ämnet har nått motstridiga resultat. Det tycks dock som om vissa aspekter av undervisningen förbättras i mindre klasser. Dessa är bland andra att individualisering, bedömning av elever och följande av styrdokument förbättras. Läraren kan öka sin undervisningstid och minska den tid de lägger ner på sociala uppgifter. Moralen och relationerna i klassen förbättras också (Bentley 2003).

Monica Johansson (2009) har undersökt *läromedlens* roll i undervisningen. Hon menar att läroboken har en mycket stark ställning i matematikundervisningen idag, på gott och ont. Den är ett viktigt verktyg som ger både möjligheter och begränsningar. Läroboken används på olika sätt i matematikundervisningen beroende på vilket innehåll och pedagogiskt upplägg den har. Den kan underlätta för läraren och ge struktur som kan hjälpa eleverna vid inläringen men den kan också vara begränsande om lärare helt förlitar sig på den. Johansson påpekar dock att ett objekt som en bok inte i sig kan styra undervisningen utan att det är lärare som väljer att låta innehållet i den styra. Lärare måste, enligt Johansson, vara medvetna om begränsningarna och inte låta läroboken bestämma hur läroplaner och andra styrmedel ska tolkas.

Löwing (2004) menar att de läroböcker många lärare använder ofta fungerar som en "överordnad organisatör" och bestämmer innehållet i lektionerna. Det kan leda till att målen med lektionerna blir att eleverna ska arbeta ett visst antal sidor i boken i stället för att uppnå lärandemål och förståelse.

2.2 Elevers matematikkunskaper

Som tidigare nämnts har svenska elever vid internationella jämförelser av elevers matematikkunskaper presterat under genomsnittet i EU/OECD-länderna (Skolverket 2008c). De senaste mätningarna i TIMSS gjordes 2007. I årskurs 4 hade de svenska eleverna då ett signifikant lägre medelvärde än EU/OECD-genomsnittet när det gäller taluppfattning och aritmetik samt geometri. I statistik nådde de ungefär samma nivå som det genomsnittliga EU/OECD-resultatet (Skolverket 2008c).

I årskurs 8 var de svenska elevernas resultat i aritmetik och taluppfattning högre än EU/OECD-genomsnittet, liksom i statistik och sannolikhet. Däremot presterade de sämre än genomsnittet i algebra och geometri.

I en uppföljande rapport analyserades 10 000 av de svenska elevernas lösningar i TIMSS 2007 (Skolverket 2008b; Bentley 2009). Analysen visade att de fel som eleverna gjort inte var slumpmässiga eller enkla räknefel. Det tycks vara så att eleverna kunde olika beräkningsstrategier men inte visste när de skulle användas. Elevernas begreppsuppfattningar påverkade också resultatet. Eleverna kunde ha flera parallella uppfattningar om ett begrepp men ingen av dem var tillräckligt utvecklade för att kunna användas vid lösning av uppgifterna. Att elevernas geometriska kunskap ofta är procedurinriktad, det vill säga att eleverna utför handlingar efter ett visst mönster, tycks ha varit ett annat problem som påverkat resultatet (Bentley 2009). Man kom i analysen fram till att elevers taluppfattning och beräkningsprocedurer inte hade utvecklats tillräckligt. Studiens resultat visade också att få av eleverna i årskurs 4 hade fått undervisning om tal i bråkform trots att det är ett av kursplanens uppnåendemål för årskurs 5. Många elever i år åtta hade otillräckliga kunskaper om likhetstecknet funktion vilket gjorde det svårt för dem att lösa ekvationer (Skolverket 2008b).

Efter analysen av elevernas lösningar kom man fram till en trolig anledning till bristerna i de svenska elevernas matematikkunskaper:

Den huvudsakliga sammantagna anledningen till elevresultaten är, att eleverna i alltför många klasser är utelämnade till sig själva och till läroboken. Härigenom får de inte möjlighet att bearbeta sina kunskaper för att få nödvändiga bekräftelser. Om en och samma elev har både korrekta och inkorrekta procedurer samt både korrekta och inkorrekta uppfattningar av begrepp, så måste de korrekta bekräftas så att de inkorrekta så småningom kan försvinna. Om inte detta sker, befäster eleven också de inkorrekta procedurerna och uppfattningarna om begrepp (Skolverket 2008b, s. 141).

2.3 Laborativ matematik

2.3.1 Från konkretisering till abstraktion

Laborativ matematik är ett sätt att åskådliggöra sambandet mellan det konkreta och det abstrakta inom matematiken. Följande står att läsa i Nationalencyklopedin (NE): ”laborativ undervisning (av lat. *labo'ro* 'arbeta'), metoder för undervisning och inläring med stöd av experiment och försök, vanligen i naturvetenskapliga ämnen” (Nationalencyklopedin 2009-10-09).

”Matematiken är *abstrakt*: den har frigjort sig från det konkreta ursprunget hos problemen, vilket är en förutsättning för att den skall kunna vara *generell*, dvs. tillämpbar i en mångfald situationer” (Nationalencyklopedin 2009-10-09).

Löwing (2006) menar att vägen till abstraktion går genom konkretisering. För att eleven ska kunna abstrahera måste eleven få vetskap om *vad* som skall abstraheras. Att ge exempel via metaforer eller för eleven kända vardagssituationer eller via material blir en konkretisering. ”Arbete med laborativa material utan åtföljande abstraktion handlar inte om konkretisering, utan är enbart en manipulation” (Löwing 2006, s. 115).

Löwing fortsätter genom att påpeka att matematiken ger formler och beskrivningar vilket ligger i ämnets karaktär. Dessa skall kunna användas vid tänkta och hypotetiska tillfällen och inte bara i konkreta situationer. Hon menar att det är av största vikt att konkretiseringen inte stannar i en manipulation av material. Eleven måste själv vara aktiv och reflektera över vad den gör. ”Målet är att konkretisering skall leda till abstraktion och förståelse av den matematik som konkretiserats” (Löwing 2006, s. 116).

Löwing påpekar också att laborationer kan fylla flera olika syften för eleverna då de ges möjlighet att reflektera över sin egen insats i den laborativa matematiken genom diskussion, undersökning samt iakttagande. Läraren ger eleverna möjlighet att ta egna initiativ.

Douglas Clements och Sue McMillen (1996) inleder artikeln *Rethinking Concrete Manipulatives* med att påpeka att en sak som man inte kan ta för givet, är att om en elev sluter sina ögon och skapar en inre bild av koncept baserade på laborativ inläring så ser denna elev samma ”bild” som sin lärare. Att man ser en koppling mellan det laborativa materialet och ett matematiskt koncept är inte alls självklart. Clements och McMillen ställer sig frågande till om man hade kunnat se denna koppling endast med hjälp av det laborativa materialet, utan att ha någon sorts vetskap om det bakomliggande konceptet. Detta leder fram till konstaterandet att laborativt material har en viktig plats i undervisningen, men att materialet i sig inte bär någon matematisk idé.

Clements och McMillen beskriver två olika typer av konkret kunskaper som här sammanfattas:

- *sensorisk-konkret* kunskap, eleven använder sig av verkligt material för att förstå ett koncept eller en idé, använder sig till exempel av 6 kottar för att förstå en räkneoperation som $3+3$.
- *integrerad - konkret* kunskap, kunskap som är en kombination av många separata koncept och idéer. Ett barn kan till exempel använda sig av sin tidigare konkreta kunskap om att 75 öre och 75 öre är 1,50 kr när det ska räkna ut $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ och då förstå att det blir $1\frac{1}{2}$.

Tänkandet här har sin styrka i att det kombinerar dessa separata koncept och idéer till en struktur av kunskap.

Clements och McMillen anser att en idé varken är konkret eller icke-konkret. Matematik kan inte paketeras i laborativt material eftersom matematiska idéer, som till exempel tal, inte finns "omkring oss". De hänvisar till att Piaget visat att tal är tankekonstruktioner. Begreppet "Fyrhet" är inte mer "existentiellt" i fyra block än vad det är "existentiellt" i en bild av fyra block. Matematiska idéer blir integrerat-konkreta av hur "meningsfulla" (kopplade till andra idéer och situationer) de är, och inte av hur de eventuellt själva besitter en "fysisk" egenskap av verklighet.

John Holt (1982) menar att barn som redan har en god taluppfattning kan utföra vissa operationer både med och utan laborativt material, medan barn som saknar uppfattningen om tal överhuvudtaget inte blir hjälpta av detta material. Dessa barn uppfattar, enligt Holt, laborativt material lika abstrakt och bortkopplat från verkligheten som talen själva. Laborativt material har förstås sin plats i matematikundervisningen. I vissa fall är det extra viktigt. Men det är inte ensamt tillräckligt, utan måste användas aktivt för att engagera barns tankeutveckling, med lärarledd hjälp.

Madeleine Löwing och Wiggo Kilborn (2002) menar att en viktig aspekt av konkretisering tappas bort om man likställer laborativt material med "konkret material". Materialet i sig äger ingen konkretiserande egenskap. Däremot är användningssättet av materialet avgörande. Genom att använda det på sådant sätt att det underlättar den språkliga förståelsen av, till exempel, en tankeform, så använder man materialet i ett konkretiserande syfte, men det är ändå inte materialet som är konkret. Om man lyckas med en konkretisering eller ej är alltså beroende av hur materialet används.

Löwing och Kilborn (2002) påpekar vidare att det är viktigt att knyta samman det konkreta arbetssättet och språket med de/det abstrakta begrepp man försöker förklara. Om denna koppling saknas finns det en risk för att konkretiseringen leder till förvirring. Ett exempel som ges är undervisning där det laborativa arbetet sällan stämmer överens med det språk eller den metod man senare använder sig av, utan material. Deras forskning försöker förklara att det måste finnas ett samband mellan det informella språk och de metoder en lärare använder och det formella språk och de metoder som beskriver samma operation (Löwing och Kilborn 2002).

Gunnar Nilsson (2005) menar att det är viktigt att man har grepp om elevens bakgrundskunskap, för att effektivt kunna utforma laborationer. Vikten av detta argument belyses av Ausubel:

If I had to reduce all educational psychology to just one principle; I would say this: The most important factor influencing is what the learner already knows. Ascertain this and teach him accordingly (Ausubel, 1968, s. vi).

Nilsson (2005) ger tre olika riktlinjer för användning av material som kan användas inom laborativ matematik: användningen av material från verkliga livet, särskilt framställt undervisningsmaterial och lekar/spel. Vissa frågor väcks om sådant material kommer att gynna undervisningen och om användandet av materialet verkligen kan omsättas till andra situationer. Laborativt material har inte någon automatisk god eller dålig effekt. Det vill säga, det kan både fungera som ett värdefullt verktyg och som ett hinder.

Att det laborativa materialet kan vara både ett stöd och ett hinder för eleverna visar också forskning gjord av Nicole M. McNeil, David H. Uttal, Linda Jarvin, och Robert J. Sternberg (2009). De beskriver i artikeln *Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems* hur användning av verklighetstroga sedlar och mynt påverkade elevers lösning av matematiska problem som handlade om pengar. De elever som använde sig av detta material gjorde fler fel i sina beräkningar än de som använde ett enklare material eller inget alls. Författarna menar att resultatet antyder att konkreta föremål som är designade för att anknyta till elevernas verklighetskunskap kan distrahera dem i lösningen av matematiska uppgifter. Om det visuella uttrycket hos föremålen är starkt (till exempel om de har inskriptioner eller symboler) kan detta dra uppmärksamheten från matematiken, likaså om eleverna associerar materialet till leksakspengar och därmed till lek. McNeil med flera drar slutsatsen att ett föremåls ytliga egenskaper spelar roll när det används i undervisning. Föremålen kan ha både för- och nackdelar genom att de förändrar elevernas uppmärksamhet, vilket kan ha olika användningsområden beroende på undervisningens syfte, till exempel om målet är informell förståelse eller inläring av algebra. För att eleverna ska ha nytta av konkreta föremål vid arbete med algebra måste de enligt McNeil med flera kunna bortse från föremålens fysiska aspekter och i stället se hur den abstrakta matematiken representeras med hjälp av dem. Det är då lämpligast att använda enkelt material utan exempelvis inskriptioner och symboler. Material med starkt visuellt uttryck kan stärka elevernas informella förståelse vid informella diskussioner och lärares instruktioner. Vid undervisning om matematiska begrepp kan det till exempel vara ett stöd för eleverna eftersom de kan aktivera elevernas verklighetsnära kunskaper och hjälpa dem att tänka genom kontextuellt relevanta tolkningar. Om eleverna arbetar med problemlösning kan det även vara en fördel att eleverna gör fel så att felen kan identifieras och diskuteras i informella diskussioner.

McNeil med flera (2009) menar dock att det finns anledning till försiktighet vid användning av verklighetstroget konkret material. Det kan främja den informella kunskapen och därmed vidga klyftan mellan informell och formell kunskap. En av lärarens främsta uppgifter är enligt författarna att hjälpa eleverna att koppla sina informella matematikkunskaper med de motsvarande formella symboliska representationerna. De få studier som gjorts om detta tyder enligt McNeil med flera på att visuellt starkt konkret material kan hindra eleverna från att göra denna koppling. Vid matematisk modellering i verklighetsnära kontexter kan dock lärare, enligt författarna, tydliggöra kopplingen mellan de konkreta föremålen och det de representerar.

Håkan Hult (2000) påpekar att laborativt arbete oftast används utan att sättas i ett pedagogiskt sammanhang. Meningen med den laborativa aktiviteten är att den skall ge en grund för konkretisering, som i sin tur möjliggör en abstrahering.

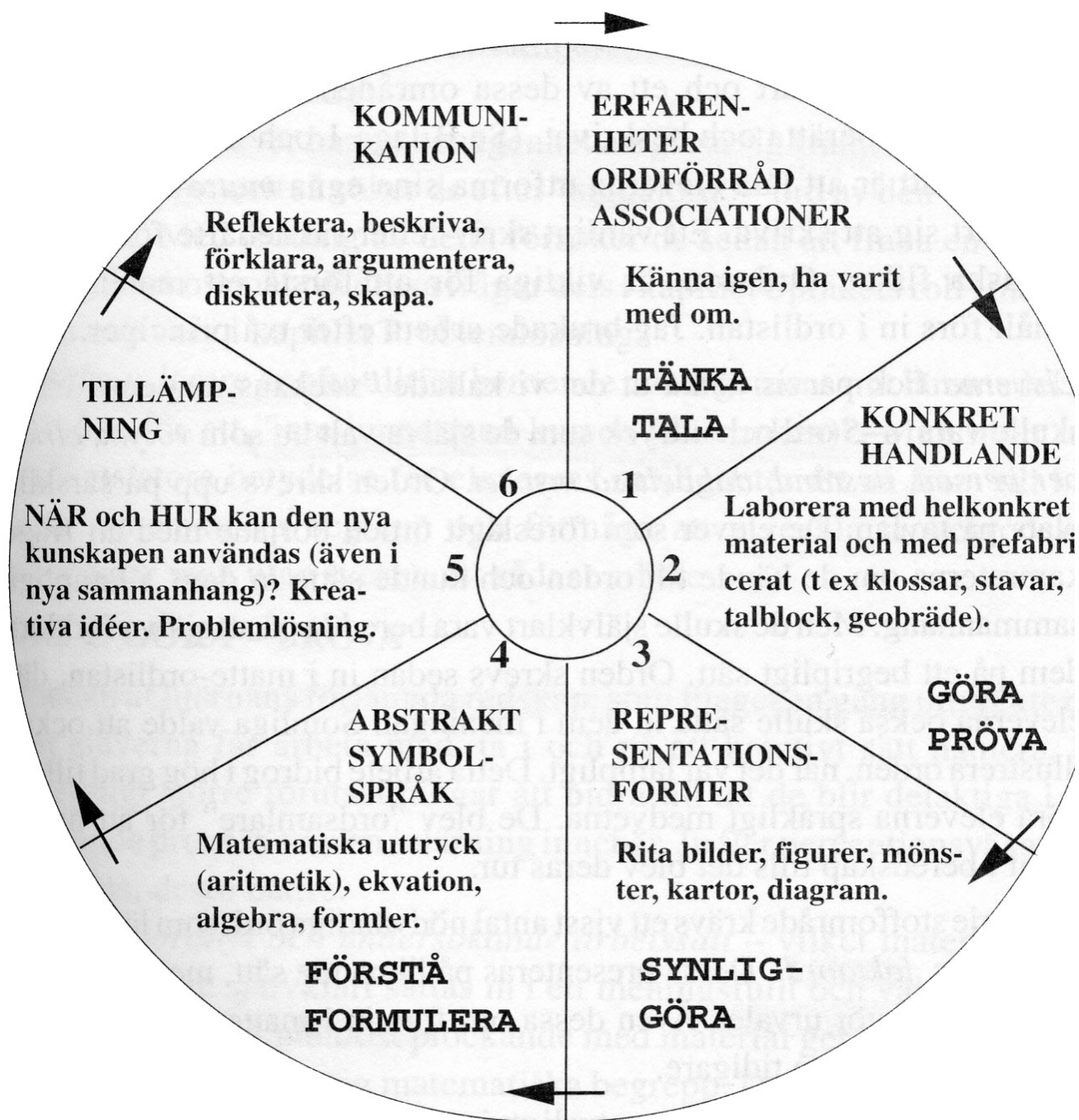
När det gäller laborativ matematik i geometri kommer Nilsson (2005) fram till att detta har en möjlighet att ge eleverna intresse, förståelse och insikt inom detta område, men att det även ställer krav på läraren och dennes kompetens inom matematik.

Nilsson (2005) får stöd för sina slutsatser i en studie av Löwing (2004) som visar att laborationer i geometriundervisning inte är helt problemfria. Vid observation av geometrilaborationer iakttog hon hur lärarna inte synliggjorde relationen till de matematiska begrepp de skulle konkretisera. De hade inte heller ett korrekt matematiskt språk som de kunde använda för att tydliggöra sambandet mellan den konkreta och den abstrakta representationsformen. Resultatet blev att eleverna hölls aktiverade men inte lärde sig de

matematiska begrepp som behandlades. Löwing menar därför att planeringen av laborationer är mycket viktig för undervisningens resultat.

Malmer (2002) anser att ett ökat utrymme måste ges åt laborativt och undersökande arbetssätt i skolan. ”Med ett väl genomtänkt och strukturerat laborativt arbete skapar eleverna ett 'inre bildarkiv' som ger dem stöd i sitt logiska tänkande och som hjälper dem att finna vad vi kallar generaliserbara lösningsmetoder” (Malmer 2002, s. 33). Malmer beskriver i nedanstående figur hur arbetet med konkretisering och abstraktion kan läggas upp utifrån olika inlärningsnivåer.

251658240



Figur 1. Olika inlärningsnivåer i matematik (efter Malmer 2002, s. 31).

Möllehed (2005) argumenterar för att laborativt material bör finnas tillgängligt för eleverna under hela skoltiden. Hans forskning visar att många elever i årskurs 9 gör samma fel vid problemlösning som är vanliga i årskurs 4. Möllehed menar att experimentella inslag med laborativt material i undervisningen är viktiga även efter årskurs 7, då de sällan finns på skolor, eftersom eleverna handgripligen måste se vad som händer och inse sambanden mellan till exempel delarna i en helhet.

2.3.1.1 Laborativ matematik i ett socialt samspel

Traditionellt har matematik setts ur ett platoniskt perspektiv; matematiska objekt har en självständig existens oberoende av vår kunskap om dem (Nationalencyklopedin 2009-10-21). Denna uppfattning har numera fått lämna plats för betraktelsen att matematik är en social konstruktion (Säljö 2000). Clements och McMillan (1996) framhåller vikten av att det laborativa materialet i sig inte bär någon matematisk idé. Löwing (2006) intar också förhållningssättet att det inte är materialet i sig som är det primära, utan att det är ett hjälpmedel för att finna den matematiska abstraktionen. Denna abstraktion behöver inte på något sätt vara allmänt entydig, utan eleven själv konstruerar denna abstraktion som är individuell meningsbärande utifrån den matematiska idén. Detta faller väl samman med det sociokulturella synsättet. Dysthe (2003) påpekar, som nämnts i kapitel 3 att motivation och engagemang är avgörande för lärande i det sociokulturella perspektivet. Vid arbete med laborativ matematik kan eleven både kommunicera med andra elever och vara fysiskt aktiva vilket är viktigt för inläringen enligt Dysthe.

2.3.2 Matematikverkstad

Rystedt och Trygg (2005) beskriver en matematikverkstad som: "En plats för lustfyllt lärande" (Rystedt & Trygg 2005, s. 4). Denna plats skall fungera som ett hjälpmedel för att bland annat locka fram de centrala delarna som behövs för att stimulera en god matematikundervisning; nyfikenhet, fantasi, kreativitet och för att ge positiva upplevelser och erfarenheter av matematik. Den skall fungera som en plats som ger möjlighet att utöva laborativ matematik. En viktig punkt som Rystedt och Trygg nämner är att den är till för alla elever – både de som behöver extra utmaningar som de som behöver stöd.

Den optimala verkstaden skall vidare, enligt Rystedt och Trygg, ha en inspirerande inredd lokal med laborativt material som ständigt utvecklas av lärare och elever. Beroende på förutsättningar kan dessa lokaler se ut på olika sätt: En "matematikskrub" i källaren, en del av ett klassrum, och så vidare. Rystedt och Trygg poängterar att det är bättre med någon form av verkstad, än ingen alls.

Rystedt och Trygg beskriver fortsättningsvis vikten av att inte betrakta denna verkstad som en plats med "kul grejer". Då kommer man inte att utnyttja verkstadens potential fullt ut. Rystedt och Trygg menar att både lärare och elever måste vara medvetna om att det alltid är matematiken som skall stå i fokus, vilket gäller för alla typer av matematikundervisning.

Rystedt och Trygg delar in laborativt material i två grupper:

- *vardagliga föremål*, vilka finns som objekt i vardagen, arbetslivet och naturen,
- *pedagogiskt material*, speciellt utvecklat för matematikundervisning.

Här understryks dock att indelningen inte är helt entydig. Till exempel kan ett pedagogiskt material fungera som ett vardagligt föremål, i någon mening. Det som avgör vilken grupp ett material tillhör är hur och i vilket syfte som materialet används. Det finns inte heller någon klar indelning av bra eller dåligt laborativt material. Visst material anses bättre då det kan fylla flera funktioner, vidareutvecklas och kompletteras. Rystedt och Trygg ger exempel på byggbara kuber som ett sådant material. Andra egenskaper som bra material kan besitta är tilltalande former, sköna att ta i, glada färger, etc. Detta kan inspirera till spontanitet – eleverna undersöker och provar material – kanske helt utan tanke på matematik, vilket ger läraren en möjlighet att ställa frågor som gör att eleven medveten om det matematiska innehållet.

2.3.2.1 Mobil matematikverkstad

Ordet mobil kan definieras som ”flyttbar, rörlig” (Nationalencyklopedin 10-01-02). Vad som skiljer en mobil matematikverkstad från en vanlig är att den är just flyttbar. Vi har inte kunnat hitta något skrivet om den mobila dimensionen av en matematikverkstad, däremot några få exempel på hur en mobil verkstad kan se ut.

Rakel Stuguland och Susanne Söderström (2009) beskriver hur de i sin förskola använder en matteväska, en väska fylld med matematiska aktiviteter. Denna innehåller böcker, spel, recept och problemlösningkort. Väskan kan lånas hem och är tänkt att uppmuntra till lustfyllt lärande genom att barn och föräldrar tillsammans upptäcker glädjen och mångfalden i matematikens värld. Stuguland och Söderström anser att det är bra att begränsa antalet föremål i väskan och i stället byta ut dem ofta.

På Skolverkets hemsida (<http://www.skolverket.se/sb/d/2131/a/18125>, åtkomst 100102) finns exempel på att matematiklådor med material som eleverna sätter ihop själva används vid arbete i matematikboken.

En annan form för en mobil matematikverkstad kan vara en brickvagn lastad med laborativt material som man har på Porsnässkolan

(URL:http://74.125.77.132/search?q=cache:6wx_XPZf7Y8J:fc.edu.pitea.se/skolor/porsnaswebb/kvalitet/KR/S0069F212.-1/KVALITETSREDOVISNING%2520%252006-07.doc%3FTemplates%3Dwhite+mobil+%2Bmatematikverkstad&cd=1&hl=sv&ct=clnk&client=safari, åtkomst 10-01-02).

3 Teoretiskt perspektiv

En mobil matematikverkstad bör vara konstruerad så att användning av den leder till att styrdokumentens mål och intentioner uppnås. I kursplanens beskrivning av matematikämnets karaktär och uppbyggnad speglas dess kunskapssyn bland annat i följande citat: ”Matematik är en levande mänsklig konstruktion som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition” (Skolverket 2008a, s. 26). Detta stämmer överens med ett sociokulturellt perspektiv på inläring.

3.1 Sociokulturellt perspektiv

I ett sociokulturellt perspektiv ser man lärande som en del av all mänsklig aktivitet. Genom samspel med andra blir individen delaktig i kunskaper och färdigheter (Säljö 2000). Roger Säljö (2000) beskriver det sociokulturella perspektivets grundläggande tankar: ”Tänkande, kommunikation och fysiska handlingar är situerade i kontexter och att förstå kopplingen mellan sammanhang och individuella handlingar är därför något av kärnpunkten i ett sociokulturellt perspektiv” (Säljö 2000 s. 130).

Säljö menar vidare att ett sociokulturellt perspektiv utgår från att lärande är en del av all mänsklig aktivitet. I alla situationer, till exempel samtal, händelser och handlingar, har individer eller grupper möjlighet att hämta något som de kan använda i framtida situationer. Lärande sker på både individuell och kollektiv nivå. På en individuell nivå lär vi oss i samspel med andra som visar hur omvärlden fungerar och skall förstås. Detta innebär enligt Säljö att ”vårt tänkande och våra föreställningsvärldar är framvuxna ur, och därmed färgade av, vår kultur och dess intellektuella och fysiska redskap” (Säljö 2000, s. 82).

I ett sociokulturellt perspektiv är kommunikation centralt:

Det är genom kommunikation som individen blir delaktig i kunskaper och färdigheter. Det är genom att höra vad andra talar om och hur de föreställer sig världen, som barnet blir medvetet om vad som är intressant och värdefullt att urskilja ur den mängd iakttagelser som man skulle kunna göra i varje situation (Säljö 2000, s. 37).

Olga Dysthe (2003) beskriver sex centrala aspekter på den sociokulturella synen på lärande:

1. *Lärande är situerat*, det vill säga finns i specifika fysiska och sociala kontexter.
2. *Lärande är i grunden socialt*. Kunskaper och färdigheter kommer från föreställningar och tillvägagångssätt som har byggts upp i ett samhälle under historiens gång och blir tillgängliga för individer genom interaktion med andra människor.
3. *Lärande är distribuerat*. Kunskaper är fördelade mellan människor i en grupp. De behärskar olika områden som kan fogas samman till en helhetsbild.
4. *Lärande är medierat*. De intellektuella och praktiska resurser människan har tillgång till har utvecklats under lång tid. I interaktion och kommunikation mellan människor

överförs tidigare generationers insikter och erfarenheter och vi kan dra nytta av dessa ”redskap”.

5. *Språket är grundläggande i läroprocesserna.* Språket är grundförutsättningen för lärande och tänkande. Genom kommunikation med andra får vi del av kunskaper och färdigheter redan från tidigaste barndomen.
6. *Lärande är deltagande i en praxisgemenskap.* Dysthe hänvisar till Lave och Wenger (1991) som hävdar att inläring primärt sker genom deltagande i praxisgemenskap. Vi lär genom att delta och agera i sociala situationer.

Dysthe påpekar att kommunikativa processer är förutsättningar för människans lärande och utveckling men att även fysiska aktiviteter är viktiga. I många verksamheter förekommer både kommunikation och fysisk aktivitet. Dysthe beskriver:

De många lekar och spel barn lär sig består av både fysiska element och regler, och behärskan av båda sker ofta genom en kombination av språklig och praktisk interaktion. En väsentlig aspekt av sociokulturell inläringsteori är att de här två sidorna hos lärandet betraktas som mycket nära förbundna (Dysthe 2003, s. 48).

Dysthe beskriver hur motivation och engagemang är avgörande för lärande i det sociokulturella perspektivet. För att uppnå detta måste barn och ungdomar uppleva att de olika platser där de verkar hänger samman. Skolan måste skapa en god läromiljö och elevernas aktiva deltagande är också betydelsefullt. Dysthe uttrycker sig på följande sätt:

Det gäller att skapa interaktionsformer och miljöer där individen känner sig accepterad och som på ett positivt sätt kan forma den lärandes identitet, bl.a. genom att eleven känner sig uppskattad både som någon som *kan* något och som *kan betyda något* för andra. Redan att delta i och bli uppskattad i en grupp ger motivation för fortsatt lärande. Det sociokulturella perspektivet visar tydligt att viljan att lära beror på upplevelsen av meningsfullhet, vilket i sin tur beror på om kunskap och lärande betraktas som viktiga i de grupper man ingår i. Både hemmiljön och klassen påverkar motivation. Därmed blir det avgörande att skapa en klasskultur där lärande värdesätts av alla, inte bara läraren (Dysthe 2003, s. 38f).

Lärandet är enligt Säljö (2000) en process som tar tid. Avståndet mellan att till exempel kunna förstå ett resonemang och kunna prestera det på egen hand kan ofta vara långt. Vägen till behärskning av komplexa intellektuella och fysiska redskap kan ses som en stegvis process där individen går igenom att antal faser:

- a. I den första fasen saknar man förtrogenhet med redskapet och dess funktion i en speciell praktik.
- b. Därefter kommer en fas då man kan använda redskapet under handledning av en mer kompetent person.
- c. Successivt ökar den lärandes autonomi och förmåga att hantera redskapet på egen hand. Man kan också avgöra när det skall användas. Stödet kan nu minskas eller vara mer indirekt.
- d. Den lärande behärskar nu redskapet eller färdigheten på egen hand. Han/hon vet när och hur det skall användas (Säljö 2000, s. 124).

Den sociokulturella teorin bygger till stor del på den ryske psykologen Lev Vygotskijs tankar om lärande (Dysthe 2003). Vygotskij kom genom undersökningar fram till att barns kunskapsutveckling sker steg för steg genom samarbete och imitation (Vygotskij 1934/1999). Vid samarbete kan barnet lösa svårare intellektuella uppgifter än det klarar på egen hand. Barnet kan dock inte klara av vad som helst under samarbetet utan bara till en gräns som är individuell för varje barn. Uppgifter som är tänkta för en utvecklingsnivå precis ovanför deras egen är lättast att lösa, och uppgifterna blir svårare ju längre ifrån den egna utvecklingsnivån de ligger. Den utvecklingsnivå barnet kan nå genom samarbete men inte kan nå individuellt kallar Vygotskij för barnets närmaste utvecklingszon.

Språkinläringen och inläringen i skolan bygger i väldigt stor utsträckning på imitation. I skolan lär sig ju inte barnet sådant som det redan kan göra på egen hand, utan sådant som det inte kan, men som det har möjlighet att lära sig i samarbete med läraren och under dennes handledning. Det grundläggande för inläringen är just det att barnet lär sig något nytt. Därför är också den närmaste utvecklingszonen, som bestämmer detta område av möjliga övergångar som barnet kan göra, det viktigaste momentet mellan inläring och utveckling (Vygotskij 1934/1999 s. 333).

Vygotskij menade att inläringen alltid börjar i det som håller på att mogna, inte i det redan mognade. Han uttryckte detta i följande citat: ”Bara den inläring som springer före utvecklingen och drar den med sig är bra” (Vygotskij 1934/1999 s. 333).

Ivar Bråten och Anne Cathrine Thurmann-Moe (1998) tar Vygotskijs närmaste utvecklingszon som utgångspunkt för pedagogisk praxis. De menar att undervisningen bör präglas av dialog mellan lärare och elev. Språket är viktigt i läroprocessen, både som redskap för överföring av strategier och som hjälp för att etablera och lagra internaliserad kunskap. Enligt Vygotskij stimulerar samspelet med en mer kompetent person, till exempel en kamrat, inläringen. Undervisningen bör därför, enligt Bråten och Thurmann-Moe, uppmuntra samarbete och samspel mellan eleverna. Barnets närmaste utvecklingszon kan också användas som redskap för att individualisera undervisningen och anpassa den till varje barns närmaste utvecklingszon genom nivåanpassning och olika former av kunskapsförmedling.

4. Metod

4.1 Metodval och urval

Vi har i detta arbete främst använt kvalitativa forskningsmetoder eftersom vi ville undersöka det didaktiska innehållet i matematikundervisning, det vill säga aktiviteter som endast kan analyseras på nominalskaletnivå och inte är möjliga att kvantifiera (Allwood & Eriksson 1999).

Vi har valt att utföra undersökningen med hjälp av en enkät och intervjuer. Enkätens syfte var att skapa kontakt med lärare som arbetar som matematikutvecklare och som kunde tänka sig att bidra med sin matematikdidaktiska kunskap i vårt praxisnära arbete. Enkäten består av inledande bakgrundsfrågor av sluten karaktär samt öppna frågor om ämnesinnehåll i matematikundervisning. Matematikutvecklarna fick också frågan om vilket material de ansåg ska ingå i en mobil matematikverkstad. Denna fråga gav dock inte tillräckligt med information för att vi skulle kunna använda oss av materialet i vår undersökning. Kanske berodde det på att frågans öppna karaktär gjorde den svår att besvara. Öppna frågor leder enligt Alan Bryman (2002) till att människor drar sig för att besvara dem.

Syftet med en kvalitativ forskningsintervju är, enligt Kvale och Brinkmann (2009), att förstå hur intervjupersonen upplever vardagsvärlden ur sitt perspektiv. Vi ville att matematiklärarna skulle berätta vilka undervisningsmetoder de ansåg leder till resultatrik matematikinläring samt ge exempel på framgångsrika lektioner. Det var lärarnas upplevelser av matematikundervisning och vad som gör den resultatrik som vi var intresserade av att undersöka. Ett passande förhållningssätt i undersökningen var därför det *fenomenologiska*, som enligt Kvale och Brinkmann har varit dominerande inom den kvalitativa forskningen. Fenomenologin betonar betydelsen av att ”förstå sociala fenomen utifrån aktörernas egna perspektiv och beskriva världen som den upplevs av dem enligt antagandet att den relevanta verkligheten är vad människor uppfattar att den är” (Kvale & Brinkmann 2009, s. 42). Med ett fenomenologiskt förhållningssätt undersöker man därför, enligt samma författare, intervjupersonernas *livsvärld*, det vill säga hans/hennes levda vardagsvärld som hon/han uppfattar den. Intervjuaren försöker tolka meningen hos viktiga teman i intervjupersonens livsvärld och få nyanserade och innehållsrika beskrivningar av dess olika aspekter. Intervjuaren bör vara nyfiken och lyhörd för vad som sägs och förutsättningslöst försöka få en så fullständig bild som möjligt av de teman som är viktiga i intervjupersonens livsvärld. Ett kritiskt förhållningssätt till sina egna antaganden och hypoteser är därför av största vikt för intervjuaren.

I en kvalitativ forskningsintervju finns bestämda teman men den har inte en förutbestämd form med standardiserade frågor. Den är heller inte helt ostrukturerad. Detta passar in på Brymans (2002) beskrivning av en semistrukturerad intervju. Vi valde denna intervjuform och hade en intervjuguide indelad i två teman (se bilaga 2) med frågor som vi ville få besvarade under intervjuens gång. De två temana innehöll tillsammans fyra huvudområden. Vi höll oss i stort sätt till ordningen i intervjuguiden men ställde följdfrågor i anknytning till det intervjupersonerna svarade för att få mer utförliga beskrivningar av deras livsvärld. Intervjupersonerna fick svara helt fritt på frågorna.

Vi är båda blivande matematiklärare i grundskolans tidigare år och våra erfarenheter från skolans värld har gjort att vi har fått en viss förståelse för hur lärare arbetar och tänker. Som intervjuare bör man, enligt Kvale och Brinkmann (2009), ha goda kunskaper om ämnet för intervjun så att man kan föra ett samtal om det och veta vilka frågor som är viktiga att utveckla. Vid konstruktionen av intervjufrågorna kunde vi utnyttja vår förförståelse om lärares yrkeskunskaper för att få svar på det vi ville undersöka. Det var ändå viktigt att inte låta denna förförståelse styra intervjuerna utan vara öppna för andra tolkningar än våra egna. Vi bemödade oss om att inte ställa ledande frågor. Kanske har vi inte helt lyckats undvika detta. Kvale och Brinkmann menar dock att problemet med ledande frågor i kvalitativa intervjuer har överdrivits. De anser att ledande frågor kan ställas oftare i syftet att pröva tillförlitligheten i svaren och för att verifiera intervjuarens tolkningar.

Vårt kapitel om tidigare forskning och litteratur i ämnet är omfattande då det är av stor vikt för undersökningen att beskriva den komplexa frågan om hur matematikinläring sker och hur laborativt material kan användas i undervisningen. Vid sökning efter relevant forskning och litteratur har vi använt följande sökord: matematikverkstad, laborativ matematik, konkretisering och abstraktion, matematikinläring, mathematics education and learning, concrete objects +mathematics och begreppsförståelse. De databaser där vi har haft störst framgång vid vårt sökande har varit Libris och CSA – Multiple Database Search.

4.2 Urval

Vid en träff vid Stockholms universitet för matematikutvecklare presenterade vi oss och vårt praxisnära examensarbete. Vi delade sedan ut ett trettiotal enkäter (se bil. 1). Enkätens syfte var, som sagts ovan, att skapa kontakt med lärare som arbetar som matematikutvecklare och som kunde tänka sig att bidra med sin matematikdidaktiska kunskap i vårt praxisnära arbete. Tanken var att intervjua matematikutvecklare eftersom de genom sin yrkesutövning bör ha anledning att tänka igenom vad som gör matematikundervisning resultatrik. Enkäten fungerade som förberedelse inför intervjuerna med matematikutvecklarna genom att ge dem möjlighet att tänka igenom vilka lektioner de hållit som varit resultatrika.

Bryman (2002) karaktäriserar denna urvalsmetod som här använts som ett *bekvämlighetsurval*. Vi fick, som tidigare nämnts, möjlighet att möta en stor grupp matematikutvecklare och ville inte missa tillfället att göra urvalet ur denna specifika grupp. Utifrån svaren i enkäten valde vi sedan ut åtta lärare för intervju. Detta urval gjorde vi med utgångspunkt från vilken årskurs lärarna arbetade i för att få en jämn fördelning över grundskolans år 1-9. Bland de lärare som arbetade i samma årskurser valde vi de som befann sig inom en timmas resavstånd men vi försökte också få en god geografisk spridning. Vi valde att även ta med en lärare som arbetar i gymnasieskolan i undersökningen för att få en bild av hur elevernas matematikkunskaper kan se ut när de lämnar grundskolan och om laborativ matematik kan ha en plats även i gymnasieskolan.

4.3 Genomförande

Vi genomförde intervjuer med åtta matematiklärare. De intervjuade, som här har fingerade namn, var:

Erika, Iris, Henrietta och Etel som arbetar som lärare i grundskolans tidigare år.

Helena och Felicia som arbetar som lärare i grundskolans senare år.

Catrin som är utbildad gymnasielärare men arbetar i grundskolans senare år.

Bodil som arbetar som lärare i gymnasieskolan.

Intervjuernas ljud spelades in med hjälp av dator. Vi deltog båda i samtliga intervjuer. En av oss intervjuade medan den andra kontrollerade att alla frågor tagits upp. För att intervjuerna skulle skildras så rättvisande som möjligt använde vi oss av de utskriftskonventioner för transkribering som beskrivs av Steinar Kvale och Svend Brinkmann (2009). Dessa innebär att vissa symboler används för att visa till exempel pauser och betoningar i intervjupersonernas talspråk i transkriptionen. För att göra citaten mer läsarvänliga skrev vi sedan om dem till ett mer formellt skriftspråk där upprepningar, pauser och annat som försvårade förståelsen för läsaren togs bort. Vi lade då stor vikt vid att den ursprungliga betydelsen inte skulle förändras. Transkriberingen delade vi upp mellan oss och vi läste igenom varandras transkriberingar. På så vis tror vi oss ha tolkat intervjuerna på ett likvärdigt sätt.

Vid intervjuerna hade vi fyra olika huvudområden: matematikverkstad, resultatrika lektioner, elevernas kunskaper och vilka faktorer som påverkar matematikinläringen. För varje område förde vi samman intervjupersonernas svar i ett gemensamt dokument. De naturliga meningsenheterna, det vill säga vad varje intervjuperson sagt i en viss fråga, skrevs i vänster spalt och i höger spalt sammanfattades det centrala temat i en eller ett par meningar. Denna metod kallas av Kvale & Brinkmann (2009) för meningskoncentrering. För att strukturera intervjupersonernas omfattande svar gick vi sedan vidare och kategoriserade dem där detta var möjligt. Kategorisering av intervjusvar kan enligt Kvale och Brinkmann vara en hjälp vid analys av stora textmassor genom att ge en överblick och underlätta jämförelser. Vi sökte likheter i de teman intervjupersonerna tog upp och förde samman besläktade svar i övergripande kategorier. Ett resultat av detta kan ses i figur 2.

Analysen av matematikutvecklarnas tankar om vad som skapar en resultatrik matematikinläring återkopplade vi sedan till styrdokument, forskning och teori.

4.4 Trovärdighet

Vi har valt att reflektera kring vår undersökning utifrån de alternativa kriterier för bedömning av kvalitativ forskning som Bryman (2002) beskriver. Arbetets trovärdighet kan enligt dessa bedömas genom dess tillförlitlighet, överförbarhet, pålitlighet samt möjligheten att styrka och konfirmera.

4.4.1 Tillförlitlighet

Att forskningen utförts i enlighet med de regler som finns är en del av bedömningen av dess tillförlitlighet. Vi har i vår undersökning följt Vetenskapsrådets forskningsetiska principer (se kapitel 4.5). En annan del av tillförlitligheten är att rapportera resultaten till intervjupersonerna så att de kan bekräfta att forskaren uppfattat deras utsagor rätt. Då vi inte gjort detta finns här en brist i uppsatsens tillförlitlighet.

4.4.2 Överförbarhet

Bryman lyfter fram Guba och Lincolns (1985) beskrivning av överförbarhet. Denna innebär att forskare bör skriva en fyllig redogörelse av den kultur de skildrar så att läsaren själv kan bedöma om resultaten är överförbara till en annan miljö. Vi har i vår uppsats försökt återge intervjuerna så utförligt som utrymmet tillåtit för att tydliggöra hur intervjupersonerna uppfattat sin verklighet.

4.4.3 Pålitlighet

För att läsaren ska kunna bedöma kvaliteten på undersökningen och om slutsatserna är berättigade har vi försökt att noga beskriva hur vi gått till väga under alla delar av undersökningen.

4.4.4 Möjlighet att styrka och konfirmera

Eftersom det inte går att få någon fullständig objektivitet i samhällelig forskning försöker forskaren i stället säkerställa att han eller hon handlat i god tro (Bryman 2002). Vi har under vårt arbete ansträngt oss för att inte medvetet låta våra personliga värderingar påverka intervjuer eller slutsatser. Vi har också försökt undvika att ställa ledande frågor under intervjuerna utan i stället låta intervjupersonerna berätta fritt. Det är sedan upp till läsaren att bedöma om resultaten går att styrka.

4.5 Etiska aspekter

Vi har i vårt arbete följt de forskningsetiska principer som utformats av Vetenskapsrådet (2002). Intervjuerna inleds, i enlighet med *informationskravet*, med information om intervjuernas och uppsatsens syfte.

Intervjupersonerna informerades om att intervjuens längd var cirka 30 minuter och att de hade möjlighet att avbryta intervjuerna och samarbetet när som helst. Intervjupersonerna tillfrågades om de tillät ljudinspelning av intervjuerna. Eftersom urvalsgruppen utgjordes av vuxna behövdes inget samtyckesbrev från målsman. Vi anser oss därmed ha uppfyllt *samtyckeskravet*.

Vi döljer också intervjupersonernas identitet genom fingerade namn för att försäkra dem anonymitet. Ljudupptagningar och utskrifter kommer att förvaras säkert, och ljudfilerna raderas efter arbetets slutförande. Därmed har *konfidentialitetskravet* uppfyllts.

Intervjupersonerna kommer även att informeras om att delar av arbetet eventuellt kommer att användas för framtida publicering, dock inte i kommersiellt syfte. Detta är i enlighet med *nyttjandekravet*.

5. Resultat

Syftet med denna undersökning är att med hjälp av kvalitativa intervjuer undersöka vilka didaktiska krav som är lämpliga att ställa på en mobil laborativ matematikverkstad och hur den kan påverka elevers matematikinläring. Genom att intervjua åtta lärare har vi undersökt hur en mobil matematikverkstad kan vara ett verktyg för lärare i matematikundervisningen. Redovisningen av resultatet från intervjuerna är indelat efter våra frågeställningar och lärarnas utsagor illustreras med citat från intervjuerna.

5.1 Matematikverkstäders påverkan på elevers inläring

5.1.1 För- och nackdelar med matematikverkstäder

Under intervjuerna frågade vi intervjupersonerna vilka för- och nackdelar de kunde se med arbete i matematikverkstäder. Fördelarna var enligt Erika och Helena att allt material finns samlat på ett ställe i verkstaden så att rummet kan genomsyras av matematik och inspirera lärare och elever till ett lustfyllt lärande. Matematikverkstäderna erbjuder eleverna att arbeta konkret med laborativt material som synliggör matematiken, vilket Felicia och Erika menade är en fördel vid matematikinläringen. Synliggörandet medför också enligt Felicia att matematiken blir verklighetsförankrad och förståelseinriktad. Sedan måste det laborativa materialet släppas och matematiken abstraheras. Felicia uttryckte sig på följande sätt:

...det är oerhört viktigt att veta varför gör vi det här. På vilka grunder står vi, vilka mål i kursplanen strävar vi mot? Och också för den senare delen, vilken matematik ska vi nu abstrahera med hjälp av det konkreta materialet? Därför att målet är ju inte med laborativt material att ha det resten av livet utan målet med all laborativ verksamhet är ju att komma ifrån det laborativa materialet. Då måste man förlita sig på matematikens natur som är abstrakt och den skrivs med symboler. Det är dit vi måste komma.

För läraren kan matematikverkstaden enligt Etel, Henrietta och Felicia vara ett bra verktyg som underlättar undervisningen om de övningar som finns i många verkstäder är tydligt är kopplade till styrdokumentet.

Nackdelarna med matematikverkstäder är enligt Erika och Helena att många skolor inte kan inreda en speciell matematikverkstad eftersom de saknar lokaler eller måste dela lokal med någon annan verksamhet. Matematikverkstäderna kan också vara tidskrävande att underhålla och uppdatera menar Etel, Erika och Iris. Matematikverkstäder rymmer enligt Felicia dessutom ofta inte en hel klass. Helena ansåg att:

Nackdelen är att det blir praktiska svårigheter med att man måste boka den, man måste förflytta sig till ett annat ställe och jag tror att det lätt blir en happening. Det blir inte ett spontant besök på samma sätt. Om man har tillgång till materialet på ett enklare sätt tror jag att det blir mer spontant också.

Även Felicia och Erika menade att en stor nackdel kan vara att besöket i matematikverkstaden lätt blir en "happening", det vill säga en rolig händelse som inte leder till inlärnin g eftersom varken lärare eller elever vet vilka mål som ska uppnås med besöket. Erika nämnde att

...det blir att göra aktivitet men att man glö mmer bort varför. Det handlar jättemycket om att den som undervisar verkligen är jättekla r med syftet. Det blir lätt att det glö ms bort, att nu ska vi gå till ett speciellt rum och ha lite rolig matte.

Verkstaden innehåller mycket material och övningar, men det som enligt Felicia ofta saknas är information om syfte, mål och vilken matematik som ska abstraheras med det konkreta materialet.

En annan nackdel är enligt Bodil att eleverna kan uppleva att arbete i matematikverkstaden är negativt och inte ser fördelarna med det. I de äldre åldrarna kan det upplevas som en belastning som ger extraarbete eftersom det ofta ligger efter lektionstid. För elever som har uppnått en hög abstraktionsnivå tillför inte det laborativa materialet enligt Catrin något vid deras inlärnin g. De kan redan använda sig av matematiska symboler som ett språk för att förstå och har inget behov av konkretisering.

Erika ansåg att det inte behövs ett speciellt rum till matematikverkstad utan att materialet borde finnas i alla klassrum.

Under intervjun blev det tydligt att alla lärare inte lägger samma innehåll i begreppet matematikverkstad. I de lägre åldrarna tycks en matematikverkstad användas som en naturlig del i matematikundervisningen. Man ser det som en positiv resurs. De två lärarna som var utbildade gymnasielärare uppfattade i stället en matematikverkstad som en frivillig verksamhet efter skoltid dit elever kunde komma och få stödundervisning om de hade behov av detta.

5.1.2 Elevers matematikinlärnin g

Som en del i undersökningen enligt vårt uppdrag om på vilket sätt en mobil matematikverkstad kan påverka elevernas matematikinlärnin g, frågade vi intervjupersonerna vilka faktorer de trodde påverkar matematikinlärnin g. De nämnde då ett stort antal faktorer. En central faktor är lärarens kompetens som fyller en mycket viktig funktion när det gäller att skapa framgångsrik inlärnin g. Erika menade att läraren måste undervisa eftersom eleverna inte kommer till abstraktioner i matematik själva. Detta går inte att läsa sig till. En nyckel till framgång är enligt Catrin planeringen av lektionerna. Hon ansåg att lärare också måste vara väldigt tydliga med att förmedla planering, mål och motivation till eleverna. Henrietta och Felicia påtalade vikten av att planeringen är genomtänkt så att läraren har ett tydligt mål med lektionen och kan dra nytta av elevernas frågor under lektionen.

Vid planeringen är det viktigt att hitta rätt nivå på undervisningen, både när det gäller kunskapsinnehållet och hur läraren förklarar det. Iris ansåg att en av orsakerna till att lektioner inte leder till inlärnin g är att läraren har startat på fel nivå. Den kan vara för lätt eller för svår vilket gör att lärandet inte blir lustfyllt. Det lustfyllda i undervisningen menade hon är en förutsättning för inlärnin g. Läraren måste också enligt Erika hitta olika förklaringar eftersom varje elev har olika förutsättningar att förstå.

Lust, motivation och engagemang var något som nämndes av flera lärare. Iris nämnde till exempel att inlärnin gen underlättas om läraren lyckas lägga sig på rätt nivå så att eleverna känner lust och själva engagerar sig och vill tänka.

Bodil och Felicia påtalade vikten av att eleverna får en tilltro till sig själva när det gäller matematik. Felicia resonerade om detta:

Hela tiden skapa tilltro till deras egen förmåga så att de inte tappar sugen. Det spelar ingen roll hur mycket man själv vill. Man måste ju också ha eleverna med sig. Det är de som också måste vara till 100 procent öppna för allt. Är de inte det kan du prata hur mycket du vill utan att de lyssnar.

Att eleverna förstår att de kan ha nytta av något i framtiden, till exempel ekvationer, är enligt Bodil och Erika en viktig del av motivationen. Eleverna blir också mer motiverade när innehållet i lektionerna anknyter till deras verklighet genom vardagsnära exempel. Felicia berättar att hon tror:

... att man måste kittla deras vardag. Jag tror inte att man ska prata när man undervisar om ränta om när man köper hus och lånar på bank utan mina elever får köpa moppe. I deras värld är det moppen som är stor. Vissa vill köpa häst och det kostar ... Jag tror man måste börja i hästen eller i deras iPod eller vad det nu är och spinna vidare på det.

När man arbetar på detta sätt utmanar man enligt Felicia matematikens användningsområde så att eleverna förstår nyttan av matematik. Även Bodil talar om hur betydelsefullt det är att knyta matematiken till elevernas vardag och intresse.

En annan viktig faktor är att prata matematik och sätta ord på begrepp. Många av lärarna menar att diskussion är en viktig del av matematikundervisningen. Helena berättar:

Att få tid att diskutera och reflektera. Och gärna tid att reflektera över andras lösningar ... Om den ena gruppen har kommit fram till ett sätt och så har den andra gruppen kommit fram till ett annat sätt, att de liksom lär sig av varandra.

Felicia är inne på samma spår men menar också att diskussionen är viktig för att läraren ska kunna se hur eleverna tänker och om deras tankesätt är effektiva. Hon kan då anpassa sin undervisning och utmana elevernas felaktiga tankesätt.

Även Iris understryker betydelsen av att prata matematik tillsammans eftersom det ger eleverna möjlighet att höra begrepp och andra elevers tankar. Att förmedla det man lärt sig till sina klasskamrater ökar också den egna förståelsen för matematiken enligt Etel. När man förklarar för någon fastnar kunskapen bättre enligt Bodil.

Eleverna behöver också tid för att tänka själva, menar Felicia och Iris. Iris förklarar: "... det är jätteviktigt att både få ha egen tid och att få ha gemensam tid med kamraterna. Att man också ska få sitta och fundera själv och tänka och hinna fördjupa sig i det, i sin egen tanke".

Arbetsättet spelar enligt flera av intervjupersonerna också stor roll. Ett varierande arbetsätt är viktigt tycker Helena som anser att en bidragande orsak till att hennes lektion blev framgångsrik var att eleverna både fick vara fysiskt aktiva och diskutera.

Laborativt arbete tycks också vara en faktor som underlättar matematikinläring. Erika menar att man behöver jobba laborativt för att tydliggöra matematiken och konkretisera den för eleverna. För vissa elever behöver man förklara och konkretisera på flera olika sätt medan andra elever kan gå direkt till det abstrakta i matematiken. Hon menar därför att det är viktigt att inte bara följa ett läromedel utan att variera arbetsättet genom det laborativa arbetsättet. Även på

gymnasiet behöver man enligt Bodil arbeta mer konkret. Hon använder sig till exempel av ett laborativt material för att visualisera arbetet med rationella tal.

Henrietta anser att trygghet är en avgörande faktor för inläringen: ”det absolut viktigaste att det är en grupp som fungerar tillsammans så att alla vågar och att man stöttar varandra att alla barnen är trygga i sin grupp. Och att de är trygga med oss vuxna”.

Catrin menar att det är viktigt att det är ordning och reda i klassrummen. Lugna lektioner är viktigt för inläringen. Hon anser även att föräldrasamverkan är viktig och är nog med att kontakta hemmen och att informera om elevernas studieresultat.

5.2 Elevernas matematikkunskaper

För att ta reda på inom vilka områden elevernas matematikkunskaper kan förbättras med hjälp av en laborativ matematikverkstad, frågade vi om elevernas goda och mindre goda kunskaper. Vi frågade också vad intervjupersonerna ansåg att de svenska elevernas förhållandevis dåliga resultat vid de internationella mätningarna (*TIMSS*) beror på.

De områden där lärarna upplevde att eleverna hade bra kunskaper när de tog emot dem varierade för olika åldersgrupper. Erika ansåg att eleverna ofta har goda kunskaper i geometri eftersom det är konkret och går lätt att arbeta laborativt med.

Iris nämnde taluppfattning, vardagsräkning och ramsräkning som områden där eleverna har goda kunskaper: Etel nämnde begreppet *bredvid* som något eleverna kan. Hon menade att kunskaperna är olika stora beroende på vilka lärare de tidigare haft.

Henrietta nämnde inget specifikt område där eleverna hade goda kunskaper utan påtalade elevernas lust att räkna och lära som något positivt.

I gymnasiet har eleverna enligt Bodil ganska goda kunskaper i procent och i enklare geometri, speciellt vinklar.

De övriga lärarna i de senare åldrarna svarade kortfattat på frågan om vilka goda kunskaper eleverna hade. Här följer deras svar.

Felicia: ” Inga. Faktiskt.”

Catrin: ” ... en del enheter.”

Helena: ” Tyst räkning är de bra på.”

Intervjupersonerna hade i allmänhet svårt att säga inom vilka områden eleverna hade goda kunskaper. Generellt hade de lättare att säga vad eleverna inte kunde när de mötte dem första gången.

Erika menade, till skillnad från Iris ovan, att eleverna ofta brister i taluppfattning och talkänsla:

...har man inte fått med sig någon taluppfattning eller talkänslan så stöter man ju på problem längre fram så det är ju det som man pratar om att man har den här mentala tallinjen. Har man ingen känsla för att tre kommer efter två, att man kan se det framför sig så. Jag tror att det är mycket där som man får backa och gå tillbaks när de säger att det är svårt.

Iris, Henrietta och Etel ansåg att eleverna saknar förståelse av begrepp som till exempel mitt emot, bredvid, bakom, hälften/dubbelt, fler och färre. Iris uttryckte det som följer:

Det tas för givet att man vet vissa begrepp som man nog inte vet. Färre, fler och ja sådär. Det bara pratas i förbifarten. Så uppfattar jag det i alla fall att många elever- när man börjar bena i var det brister så kan det vara där.

I de äldre åldrarna ansåg Catrin att aritmetik är ett område där eleverna har bristande kunskaper. Felicia nämnde begreppsförståelse:

De är inte helt säkra på vad ett tal i decimalform är. Är 3 ett tal i decimalform? Är 3,0 ett tal i decimalform? Är det samma sak? Vad är ett tal i bråkform? Är det samma sak som en division? Helt obegripligt.

Felicia menade också att eleverna lärt sig algoritmer utan förståelse för hur de fungerar vilket leder till att de ibland löser dem rätt och ibland fel.

Helena tyckte också att eleverna brister i "det här man kallar talfakta". Att prata och redovisa skriftligt hur de går till väga är en annan färdighet eleverna saknar. Bodil ansåg att de när de kommer till gymnasiet har bristande kunskaper i negativa tal och bråk, speciellt att dividera bråk.

Vad beror då dessa bristande kunskaper på enligt intervjupersonerna? Erika och Henrietta pekade återigen på lärarens kompetens. Erika menade också att det har betydelse att Sverige hade mindre lektionstid matematik i timplanen än andra länder som deltog i TIMSS. Helena sade: "Jag tror att svenska elever har fått sämre resultat på grund av för läroboksstyrd undervisning i skolan och att lärarna har tagit ett steg tillbaka från att aktivt undervisa".

Etel och Felicia ansåg också att läroböckerna spelar roll. Etel hade slutat att använda matematikböcker eftersom hon upplevde att eleverna vid arbete i läroboken arbetar snabbt utan att förstå. Felicia trodde att enskilt räknande i "fylleri-böcker" leder till att eleverna skapar missuppfattningar.

... när man sitter och räknar själv i en bok så kan man räkna väldigt mycket fel och man använder logik som inte alltid är användbar i alla sammanhang, utan viss logik kan användas alldeles utmärkt i vissa sammanhang men så byts sammanhanget lite grann och då kan man inte använda den metoden. Får man inte undervisning om det, och kan se det, då är det väldigt lätt att skapa missuppfattningar.

Etel menade att läraren i stora barngrupper kan ha svårt att se varje elev och dess kunskaper. Vissa elever låtsas kunna och det kan vara svårt för läraren att upptäcka detta i stora barngrupper.

Iris menade att den svaga länken ligger i abstraktionen av matematiken. "Vi kanske här har brustit i att ta det konkreta till det abstrakta." Hon trodde att lärare ofta använder konkretiserande berättelser för att eleverna ska minnas. Detta blir sedan ett problem när eleverna går vidare till nästa lärare som inte använder samma ord att hänga upp begreppen på. Iris uppgav också att en av orsakerna till elevernas bristande matematikkunskaper är att lärarna kanske inte har ett matematiskt korrekt språk utan till exempel säger plus istället för addition.

Bodil menade att problemet ligger i elevernas bristande läsförståelse, kanske i kombination med bekvämlighet. Eleverna orkar inte läsa instruktioner utan vill att läraren direkt berättar för dem vad de ska göra.

Catrin undrade om det inte har att göra med användningen av miniräknare sker på fel sätt. Eleverna tar till den för att lösa problem men får ingen då ingen förståelse för de matematiska operationerna.

5.3 Matematikundervisning med hjälp av laborativ matematik

En av våra frågeställningar är hur matematikundervisning kan göras resultatrik med hjälp av laborativ matematik. Vi bad intervjupersonerna att berätta om en lektion som de hållit som de ansåg hade lett till inläring. Grundskolans lärare beskrev alla en sådan lektion medan de två gymnasielärarna inte gav något konkret exempel.

Iris beskrev en lektion i årskurs 2 som behandlade klockan. Eleverna fick i par gestalta ett klockslag på en rund matta. Det ena barnet var timvisare och det andra minutvisare. Resten av gruppen skulle gissa vilket klockslaget var. Till hjälp hade eleverna en väggklocka med lappar som markerade var femte minut där klockslagen var skrivna med ord, till exempel ”tio över”. Lektionen tog upp begreppen hel och halv timme samt lång och kort. Eleverna hittade också på egna klockslag, vilket ledde till diskussioner: ”Vissa måste så klart lägga sig sju över [skrattar] så då fick vi ta lite rimlighetstänk. Hur många minuter över tror ni det kan vara?”.

Erikas lektion introducerade ekvationer i årskurs 2. Hon använde sig då av ekvationsspelet. Eleverna fick svara på frågan vad ett likhetstecken är, rita och skriva förklaringar med olika exempel. Läraren introducerade sedan ekvationsspelet på overheadprojektor genom att visa olika bön-askproblem. Eleverna blundade och läraren gömde bönor i askar enligt följande regler: Lika många bönor ska gömmas i varje ask. Lika många bönor placeras på vardera sidan om en garntråd som symboliserar likhetstecknet. Både synliga och gömda bönor ska räknas med. Eleverna spelade sedan ekvationsspelet två och två och gav varandra uppgifter att lösa.

Henrietta arbetade med utematematik, geometri i snö. Eleverna fick uppgifter som de skulle utföra, som till exempel måla en cirkel med omkretsen fem meter. Till sin hjälp hade de vattenfärg och ett rep som var en meter långt.

Även Etel arbetade med utematematik. Ett barn fick ett kort med ett matematiskt begrepp, till exempel dubbelt, och hämtade något i skogen för att visa begreppet för andra barn som skulle gissa vilket begreppet var. Inga ord fick användas utan barnen visade begreppet med hjälp av naturmaterial och charader.

Felicia arbetade med mönster och samband i årskurs 9. Eleverna fick spela ett spel där varje elev fick 13 ”pluppar” (centikuber) och skulle ta en, två eller tre pluppar var. Den som tog den sista hade förlorat. Man skulle anteckna vem som vann och spelet pågick tills alla hade förstått att den som börjar förlorar. Eleverna fick sedan pröva med ett annat antal pluppar och diskutera vad som då händer. De hittade då ett talmönster. Man diskuterade sedan om det går att vinna även med ett stort antal pluppar. Utifrån detta kunde man sedan skapa uttryck och rita grafer. De mål i kursplanen som uppnåddes med lektionen var att ge eleverna tilltro till sin egen förmåga, att upptäcka mönster och samband och att skapa talföljder.

Även Helena arbetade med mönster och samband. Hon använde sig i årskurs 5 av ett rikt matematiskt problem som heter *Skaka hand*. Ett rikt matematiskt problem är enligt Hagland med flera (2005) ”ett problem som bär på möjligheter till en givande diskussion av matematiska

begrepp och procedurer” (Hagland m.fl. 2005, s. 28). Eleverna skakade hand med varandra och skulle sedan själva komma på hur de enkelt kunde dokumentera handskakningarna med hjälp av ett system och se ett mönster. Elevernas förslag ritades på tavlan och diskuterades. Helena visade sedan att det fanns en generell formel för detta och ett matematiskt språk. Tanken var att lektionen skulle ge förståelse för att man kunde ha någon form av symboler i stället för att rita eller fotografera människor. Målen i kursplanen som Helena strävade efter att uppnå var kunskap om grundläggande algebraiska begrepp, uttrycksformer och ekvationer, att utveckla intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och använda matematik i olika situationer.

Catrin berättade att hennes elever i grundskolans senare år gick ut och gjorde statistiska undersökningar som de sedan redovisade. Hur detta gick till framgår inte av hennes beskrivning. Hon beskrev också att hon låtit eleverna tillverka geometriska figurer för att de skulle nå bättre resultat i geometri, men att detta inte gav bättre resultat än när hon visualiserade figurena genom att rita dem på tavlan. Detta berodde, enligt Catrin, troligen på att eleverna, som gick i en klass med matematikprofil, hade uppnått en hög abstraktionsnivå och inte behövde arbeta laborativt för att nå förståelse.

Bodil berättade om hur hon i gymnasiet, med hjälp av ett konkret material i form av bråk i genomskinlig plast, arbetat med att byta tecken i ekvationer. Hon berättade också om hur hon undervisat i räta linjens ekvation genom att visualisera och introducera katten Delta. Det går dock inte att utifrån hennes berättelse sluta sig till hur lektionen genomfördes. De två lärare som var utbildade gymnasielärare beskrev alltså inte någon lektion tillräckligt utförligt för att vi ska kunna ta med dem i vår analys. Dessa två lärare använde sig i stor utsträckning av läromedel och byggde sina lektioner utifrån det.

6. Diskussion

6.1 Metoddiskussion

Valet att främst arbeta med semistrukturerade intervjuer berodde på att vi ville att intervjupersonerna skulle berätta om sina erfarenheter och upplevelser av arbete med laborativ matematik och resultatrik undervisning. Intervjupersonerna verkade tycka att ämnet var intressant och berättade engagerat om sina erfarenheter. Våra frågor gav i stort sätt svar på det vi ville undersöka, men med facit i hand skulle vi kanske ha ställt mer ingående frågor om matematikverkstäder och laborativ matematik.

När det gäller urvalet intervjuade vi åtta lärare som deltog i ett seminarium för matematikutvecklare. De medverkade i detta forum i sin roll av matematikutvecklare eller matematikansvariga på sin skola. Dessa lärare har troligen ett intresse utöver det vanliga när det gäller att utveckla matematikundervisningen. Av de cirka 30 lärare vid seminariet svarade 14, genom enkäten, att de kunde tänka sig att bli intervjuade. Vi valde sedan ut åtta av dessa. Hur resultatet skulle ha blivit med fler, eller andra, intervjupersoner ur samma urvalsgrupp kan vi inte veta.

Två av de åtta intervjupersonerna (de utbildade gymnasielärarna) kunde inte heller bidra med en beskrivning av en lektion som de ansåg hade lett till resultatrik inläring. Just i lektionsbeskrivningarna har vi därför ett mindre material att utgå ifrån vid analysen, vilket givetvis är en brist.

Vi presenterade vårt ämne under seminariet för matematikutvecklare, vilket ledde till att alla de intervjuade hade en god förståelse i ämnet. Om detta påverkade intervjupersonernas svar i någon riktning är svårt att avgöra. Vi har dock bemödat oss om att inte ställa ledande frågor eller på annat sätt påverka intervjupersonernas svar.

Av de personer som besvarade enkäten arbetar majoriteten på skolor belägna i socioekonomiskt välbärgade områden. Det tycks som om det funnits ett gott arbetsklimat i dessa skolor, och lärarna har kunnat ägna sig helhjärtat åt undervisningen. Detta tror vi kan ha påverkat deras svar, då det inte fanns störande faktorer, som till exempel sociala problem, som hindrade dem från att fokusera på matematikundervisningen. I skolor med många olika nationaliteter kan fokus ligga mer på till exempel språket i stället för matematikutveckling, och där kan svaren förväntas bli annorlunda. Spännvidden i svaren kan därför ha blivit mindre än vad den skulle ha blivit om vi slumpvis hade valt intervjupersoner.

Att ha intervjuer som enda empirisk källa kan förstås ha sina nackdelar. Nu har vi lärarnas uppgifter som enda perspektiv. Vi vet inte hur eleverna upplevde de beskrivna lektionerna och inte heller om de verkligen ledde till framgångsrik inläring som lärarna trodde. Observationer av lektionerna och intervjuer med eleverna skulle kanske ha gett en annan bild. Vi vände oss till en specifik målgrupp. Resultatet skulle sannolikt inte blivit detsamma om vi vänt oss till lärarkåren generellt. För att nå ett liknande resultat bör undersökningen genomföras bland lärare med ett speciellt matematikintresse. Vi anser ändå att trovärdigheten i vår uppsats är någorlunda

god. Resultatet kan vara av intresse eftersom de intervjuade lärarna har som arbetsuppgift att förbättra matematikundervisningen i sin skola eller i sin kommun. De har troligen reflekterat över vad som behöver förändras eller förbättras i matematikundervisningen med utgångspunkt i de svenska elevernas bristande matematikkunskaper. Åsikterna som framkommit i intervjuerna stämmer väl överens med den forskning vi funnit i ämnet. Resultatet bör därför vara intressant för många lärare.

6.2 Resultatdiskussion

I vår diskussion nedan har vi valt att utgå från våra tre frågeställningar. Under varje frågeställning reflekterar vi över intervjupersonernas svar.

6.2.1 Matematikverkstäders påverkan på elevers inlärnin

Begreppet *matematikverkstad* tolkas som vi sett ovan av intervjupersonerna på olika sätt; Som en positiv resurs i den dagliga matematikundervisningen eller som frivillig stödundervisning efter skoltid. I detta arbete ansluter vi oss till den första tolkningen men skillnaden i tolkning understryker vikten av att, som Orton och Frobisher (2004) betonar, tydliggöra och definiera matematiska begrepp för eleverna.

Det tycks, om man studerar intervjupersonernas svar, finnas både för- och nackdelar med arbete i matematikverkstäder. En av de största fördelarna verkar vara att matematikverkstadens exponering av laborativa material kan bidra till elevernas inlärnin genom att inspirera till lustfylld inlärnin. Detta stämmer överens med Rystedt och Tryggs definition av en matematikverkstad som ”en plats för lustfyllt lärande”.

Vi tolkar resultatet av intervjuerna som att laborativ matematik kan ha en positiv effekt på matematikinlärnin. Med stöd av den kan eleverna ges möjligheter att konkretisera och synliggöra matematiken, vilket leder till matematisk förståelse. Det hjälper också lärare och elever att åskådliggöra sambandet mellan det konkreta och det abstrakta inom matematiken. Målet med konkretisering är också enligt Löwing (2006) att den ska leda till abstraktion och förståelse av den matematik som konkretiserats. Malmer (2002) menar att laborativt arbete ger eleverna ett ”inre bildarkiv” som kan hjälpa dem att hitta generaliserbara lösningsmetoder och stärka deras logiska tänkande.

En nackdel med besök i matematikverkstäder kan enligt några av intervjupersonerna vara att det lätt blir en happening som inte leder till inlärnin. De får stöd i sin uppfattning av Rystedt och Trygg (2005), som menar att det vid arbete i verkstaden måste vara klart för eleverna att det alltid är matematiken som ska stå i fokus. Hult (2000) visar också på att laborativt arbete ofta används utan att kopplas till inlärnin. Som Nilsson (2005), Löwing (2006) och Clements och McMillen (1996) påpekar har det laborativa materialet i sig ingen konkretiserande egenskap utan användningssättet avgör om inlärnin sker. Löwing och Kilborn (2002) uppger att det är viktigt att knyta samman det konkreta arbetssättet och språket med de abstrakta begrepp man försöker förklara med hjälp av det laborativa materialet. Det är alltså viktigt att användningen av konkret material inte stannar vid manipulation utan leder till abstraktion (Löwing 2006).

I de äldre åldrarna och gymnasiet har laborativ matematik inte en lika självklar plats enligt våra intervjupersoner. Bodil berättade att eleverna i gymnasiet upplevde det som extraarbete och inte såg fördelarna med det. Här tror vi dock att användning av laborativ matematik som en

integrerad del av matematikundervisningen skulle kunna ge eleverna en mer positiv bild och bidra till inläringen. Motivation är som vi sett en viktig faktor vid inläring och att eleverna känner lust att lära är ju ett av läroplanens strävansmål (Skolverket 2006). I ett sociokulturellt perspektiv är motivation och engagemang också avgörande för lärandet (Dysthe 2003). Eleverna måste, enligt Dysthe, uppleva att de platser där de verkar hänger samman. Om matematikverkstaden upplevs som en börda som inte har något med den ordinarie matematikundervisningen att göra kan detta inverka negativt på lärandet.

Alla elever har dock inte nytta av laborativ matematik i sin inläring. Som Catrin påpekade har de elever som redan nått en hög abstraktionsnivå i matematik inget behov av laborativt material. Precis som Felicia ansåg och Löwing (2006) skriver är ju meningen med konkretiseringen med hjälp av det laborativa materialet att abstraktion ska nås. När detta är avklarat bör det laborativa materialet släppas. Felicia och Catrin får här stöd av Anghileri (2000) som påpekar att det är viktigt att eleverna inte blir beroende av det konkreta materialet för att kunna räkna.

En matematikverkstad bör utformas så att användning av den leder till *resultatrik inläring*. Därför undersökte vi vad lärarna ansåg påverkar elevernas inläring. Vi tyckte oss se sex olika kategorier av faktorer i de svar vi fick av intervjupersonerna.

En första kategori berör *arbetssätt*. Ett varierande arbetssätt som blandar fysiska och reflekterande aktiviteter bidrar, enligt Helena, till inläring. I detta får hon stöd av läroplanen i matematik som föreskriver ”en varierad och balanserad sammansättning av innehåll och arbetsformer” (Skolverket 2006, s. 6). Ett laborativt arbetssätt kan underlätta matematikinläringen genom att tydliggöra matematiken (Malmer 2002; Anghileri 2000). Man kan på så sätt hjälpa eleverna genom att visualisera, konkretisera och till slut abstrahera matematiken (Löwing 2006). En del elever behöver konkretisering av matematiken för att förstå och då är det enligt Erika viktigt att inte bara använda sig av en lärobok utan att också arbeta med laborativt material. Monica Johansson (2009) understryker också att lärare måste vara medvetna om läroböckers roll i undervisningen så att de inte begränsar inlärningsmöjligheterna för eleverna. Ur ett sociokulturellt perspektiv är ensidig användning av läroböcker också begränsande. Om eleverna lämnas till egen räkning i en matematikbok får de inte möjlighet att få stöd av läraren under processen som det innebär att behärska komplexa intellektuella redskap, något som Säljö (2000), menar är viktigt. Att gå från att inte kunna något, via att förstå ett resonemang, till att kunna prestera på egen hand kan ta lång tid och under denna process behöver eleverna handledning av läraren.

En andra kategori av faktorer handlar om *planering av undervisningen*. Intervjupersonernas svar visar att en lärare bör ha en genomtänkt plan med tydliga mål, såväl för sig själv och sina elever som för föräldrar. Catrin lade till exempel stor vikt vid att elever och föräldrar kände till målen för matematikundervisningen. Löwing (2004) understryker vikten av att läraren planerar undervisningen noga. Flera av intervjupersonerna påtalade även betydelsen av att anpassa undervisningen till varje elevs förutsättningar och kunskapsnivåer. Undervisning i till exempel geometri börjar ofta på en alltför teoretisk nivå och eleverna missar därför de grundläggande kunskaperna (Hedén 1992). Det kan då vara till hjälp för läraren att vara insatt i elevens närmaste utvecklingszon, som enligt Vygotskij (1934/1999) är det område som inläringen bör inriktas på för att vara som effektivast. Den närmaste utvecklingszonen kan, enligt Bråten och Thurmann-Moe (1998) vara ett redskap för läraren att individanpassa undervisningen genom nivåanpassning och olika former av kunskapsförmedling.

Lärarens kompetens är en tredje kategori av faktorer. Läraren måste ha goda ämneskunskaper och kunna förmedla dessa till eleverna. I detta ingår att undervisa eleverna på ett sådant sätt så att abstraktion av matematiken möjliggörs. Bentley (2003) visar på forskning som konstaterat att om lärares ämneskunskaper höjs förbättras också elevernas prestationer i skolan. Det krävs också att läraren besitter goda matematikdidaktiska kunskaper.

Den fjärde kategorin av faktorer är *motivation*. Om eleverna känner lust att lära sig matematik och förstår hur de kan använda sig av den i sin vardag blir de enligt intervjupersonerna mer motiverade att lära sig matematik. Kursplanen i matematik betonar också vikten av att matematiken är meningsfull och vardagsnära för eleverna samt att eleverna känner tilltro till sitt tänkande och sin förmåga att lära sig matematik (Skolverket 2008a). Dysthe (2003) menar att det sociokulturella perspektivet tydligt visar att ”viljan att lära beror på känslan av meningsfullhet” (s. 38f). Två olika sätt att göra det matematiska innehållet i lektionerna meningsfullt och motiverande för eleverna är att använda sig av problemlösning och matematisk modellering i undervisningen (Lester 1996; Hagland, Hedrén & Taflin 2005; Blomhøj 2004).

Den femte kategorin är *språk*. Intervjupersonerna menade, i likhet med många forskare, att språket är en mycket viktig faktor för matematikinläringen (Sterner & Lundberg 2002; Orton & Frobisher 2004; Malmer 2002). Att sätta ord på matematiken gör att idéer och tankar synliggörs och blir utgångspunkt för reflektion och eftertanke. En djupare matematisk förståelse kan då nås (Sterner & Lundberg 2002). Det är också betydelsefullt för inläringen att noga introducera nya matematiska begrepp, diskutera dem och använda dem regelbundet för att de ska internaliseras i elevernas tankar (Orton och Frobisher 1996/2004). Ett sätt att göra det är, som två intervjupersoner förespråkar, att eleverna förklarar begreppen för varandra. Löwing (2004) anser också i likhet med Henrietta att läraren bör använda ett korrekt matematiskt språk för att eleverna ska förstå matematiskt språk när de möter det i till exempel läroböcker. Ur ett sociokulturellt perspektiv är språket grundläggande i läroprocesserna (Dysthe 2003). Säljö (2000) anser att det är genom kommunikation med andra individer som eleverna får del av kunskaper och färdigheter. När de hör andra tala blir de medvetna om vad som är viktigt i den enorma mängd av information som omger dem. Språket har också, enligt Bråten och Thurmann-Moe (1998) en viktig funktion som redskap för överföring av strategier samt etablering och lagring av internaliserad kunskap.

Den sista kategorin handlar om *elevernas arbetsmiljö*. Att eleverna känner sig trygga med varandra och i klassrummet är enligt två av intervjupersonerna en förutsättning för att de ska kunna tillgodogöra sig undervisningen. Där får de stöd av Malmer (2002) som understryker vikten av att arbetsklimatet präglas av respekt och hänsyn så att alla elever vågar komma till tals. Även Dysthe (2003) menar att skolan måste skapa en god läromiljö där eleverna känner sig accepterade och uppskattade. Eleverna måste känna att de kan något och att de betyder något för andra. Att delta i och uppskattas av en grupp ger enligt Dysthe motivation till lärande.



Figur 2. Kategorier av faktorer som påverkar inläring.

6.2.2 Elevernas matematikkunskaper

En mobil laborativ matematikverkstad skulle kunna rikta sitt innehåll mot områden där eleverna har bristande matematikkunskaper. Därför var det intressant att undersöka inom vilka områden det kan finnas ett behov av att förbättra elevernas matematikkunskaper.

Det var påtagligt för oss att lärarna i alla åldrar upplevde det som att eleverna hade stora brister i sina kunskaper när de kom till dem. De tänkte länge innan de svarade på vilka goda matematikkunskaper eleverna hade och de hade svårt att ge tydliga svar. Det var betydligt enklare för dem att nämna elevernas bristande kunskaper.

I de lägre åldrarna hade lärarna något olika åsikter om vad eleverna var bra på när de träffade dem första gången. Taluppfattning, geometri, vardagsräkning och ramsräkning var några områden som nämndes. En lärare påpekade dock att kunskaperna varierar beroende på vilken pedagog eleverna haft innan. Lärarna i de senare åldrarna uppgav att eleverna hade goda kunskaper i tyst räkning, enklare geometri, procent och vissa enheter.

Taluppfattning och talkänsla var enligt Helena och Erika ett område där eleverna hade otillräckliga kunskaper. Eleverna tycks också sakna begreppsförståelse i alla åldrar. I de äldre åldrarna var aritmetik, negativa tal, division av bråk och förståelse för algoritmer områden där lärarna upplevde att eleverna hade alltför små kunskaper. Att prata matematik och redovisa sitt tillvägagångssätt i tal och skrift saknade eleverna färdighet i.

Intervjupersonernas uppfattningar om elevernas kunskaper tycks inte helt stämma överens med resultatet i TIMSS 2007 (Skolverket 2008b) utan är vid en jämförelse i vissa fall till och med motsatta. De är överens med TIMSS-resultatet när det gäller att elevernas kunskaper är otillräckliga men inte när det gäller inom vilka områden. Detta kan bero på att elevernas kunskaper mätts i TIMSS i årskurs 4 och 8 medan lärarna tillfrågats om elevernas kunskaper när de tog emot dem i årskurs 1, årskurs 6-7 eller i gymnasiet. Ett område som både TIMSS och lärarna är överens om är i alla fall elevernas utvecklade begreppsförståelse. Mycket tyder också på att taluppfattning och aritmetik är områden eleverna behöver utveckla (Skolverket 2008b).

Orsakerna till de bristande matematikkunskaperna kan, som intervjupersonerna nämner, vara lärares bristande kompetens. Att låta läromedlen styra undervisningen kan enligt Johansson (2009) vara begränsande. Löwing (2004) är kritisk till att lärare låter läromedel bestämma innehållet och leda lektionerna eftersom enskilt arbete i läroböcker lätt leder till att eleverna prioriterar att bli klara med boken i stället för att få en förståelse för det matematiska innehållet. Läraren undervisar då inte heller aktivt när de låter läromedlet styra. Eleverna behöver lärarens hjälp att tydliggöra sina tankar (Wistedt 1996), vilket de inte kan få vid tyst räkning i en lärobok. Lester (1996) påtalar också vikten av att läraren är aktiv och ställer frågor och ger idéer till eleverna. Detta är också slutsatsen som drogs efter analysen av elevsvaren i *TIMSS 2007* (Skolverket 2008b). Genom att alltför många elever är utelämnade till egen räkning i läroböcker får de inte sina felaktiga procedurer och begreppsuppfattningar ifrågasatta utan befäster dem i stället. Genom dialog med läraren och diskussioner med andra elever skulle de i stället kunna ta del av andra synsätt om hur omvärlden fungerar och skall förstås (Säljö 2000) och därmed kanske revidera sina felaktiga uppfattningar.

Ett annat problem verkar vara frånvaron av kommunikation mellan lärare i olika åldrar angående vilka konkretiserande berättelser man använt som utgångspunkt för att eleverna ska minnas begrepp. Om inte lärare använder ett gemensamt språk försvåras elevernas inläring. Läraren använder sig inte heller alltid av ett matematiskt korrekt språk. Det är viktigt att lärare inte använder vardagsspråk under matematiklektionerna (Löwing 2004). Eleverna kan då få svårigheter att förstå det matematiskt korrekta språk som används i läroböckerna. Som Bodil påpekade kan elevernas bristande kunskaper även delvis bero på dålig läsförståelse. Möllehed (2001) har visat att brister i elevernas läsförståelse är en av de största orsakerna till att elever löser matematiska problem felaktigt. Eleverna bör därför, enligt Sterner och Lundberg (2002), undervisas i den språkliga aspekten av matematiken. För att främja matematikinläringen kan läsförståelse övas i samband med matematik och texternas innehåll diskuteras.

Lärare har ett ansvar för att konkretiseringar av matematiken också förs vidare till abstraktioner för eleverna. Som Felicia påpekade kan utebliven abstraktion leda till att eleverna inte förstår. Detta stämmer överens med vad Löwing (2004) och Nilsson (2005) säger, att om kopplingen mellan konkretisering och abstraktion uteblir kan eleverna bli förvirrade. Om sambandet inte är tydligt mellan ett begrepps konkretisering och dess abstraktion blir arbete med det laborativa materialet bara manipulation och förståelse för begreppet uteblir. Hur man använder sig av det laborativa materialet är därför av stor betydelse (Nilsson 2005; Clements & McMillen 1996). Det laborativa materialet har ingen konkretiserande effekt i sig själv (Löwing & Kilborn 2002). Ett laborativt material kan vara lika abstrakt för eleverna som det tal materialet ska visa (Holt 1982). Läraren måste därför tydligt knyta samman det konkreta arbetssättet och språket med de

abstrakta begrepp man försöker förklara under laborationen (Löwing & Kilborn 2002). Hult (2000) menar, i likhet med Erika och Felicia, att laborativt arbete ofta används utan en pedagogisk tanke med övningen. Kanske kan detta vara en bidragande orsak till att förståelse av matematiska begrepp uteblir.

Catrin nämnde användning av miniräknare som en trolig orsak till elevernas bristande kunskaper. Genom felaktig användning av miniräknare kan elever gå miste om förståelse av de matematiska procedurerna. Eleverna får då inte procedurerna kopplade till inre föreställningar av objekt, vilket Sterner och Lundberg (2002) anser är ett viktigt steg i matematikinläringen.

En annan orsak till bristande kunskaper kan, enligt Etel, vara alltför stora elevgrupper i skolan. Vissa elever syns inte i den stora elevmängden och läraren kan då inte uppfatta deras kunskaper. I detta får hon stöd av den forskning som Bentley (2003) hänvisar till som visar på att mindre klasser underlättar lärarens bedömning av eleverna.

6.2.3 Matematikundervisning med hjälp av laborativ matematik

För att besvara frågeställningen *Hur kan matematikundervisning göras resultatrik med hjälp av laborativ matematik?* fick intervjupersonerna beskriva en lektion som de hållit som de ansåg hade varit resultatrik, det vill säga att eleverna hade lärt sig det som avsetts med lektionen. När vi analyserade de sex lektionerna hittade vi vissa gemensamma drag. I alla lektioner utom en användes någon form av laborativt material för att konkretisera och visualisera matematiska begrepp. Det laborativa material som användes under lektionerna var, med undantag för det pedagogiska materialet *centikuber*, vad Rystedt och Trygg (2005) kallar *vardagliga föremål* och Nilsson (2005) kallar *material från verkliga livet*. Det laborativa materialet behöver således inte vara speciellt kostsamt utan finns redan på många skolor och är lätt att komplettera. Såvitt vi förstår hade inga av de laborativa materialen ett visuellt starkt uttryck som enligt McMillen med flera (2009) skulle kunna ha distraherat eleverna och flyttat deras uppmärksamhet från den matematik de arbetade med. Materialen tycks ha blivit valda med omsorg av lärarna.

Eleverna fick under lektionerna en uppgift som visualiserade matematiska begrepp genom ett laborativt material eller en konkret upplevelse. Lektionerna som hölls i de lägre åldrarna stannade under den första lektionen vid denna konkretisering. Lärarna i de senare åren gick vidare från konkretisering till abstraktion genom att tillsammans med eleverna teckna funktioner för att beskriva sina iakttagelser. Meningen med den laborativa matematiken är enligt Hult (2000) och Löwing (2006) att den ska utgöra en utgångspunkt för att konkretisera matematiken som senare ska leda till abstraktion. Löwing beskriver att konkretisering kan vara att ge exempel som anknyter till elevernas vardagssituationer eller att ge exempel via metaforer men också att använda sig av material. Genom att göra så får också eleverna reda på vad det är som skall abstraheras. Lärarna måste, enligt Löwing (2004), synliggöra sambandet mellan den konkreta och den abstrakta representationsformen för att eleverna ska kunna abstrahera. Genom laborativ matematik får eleverna enligt Löwing möjlighet att diskutera, undersöka och iakttä. Den av Erika beskrivna lektionen om ekvationer är ett bra exempel på visualisering av matematiska begrepp genom ett laborativt material eller en konkret upplevelse. Lektionsplaneringen följer till stora delar de inlärningsnivåer i matematik som Malmer (2002) beskrivit. När det gäller lektionsplanering hade alla lärare satt upp tydliga mål för vad eleverna skulle lära sig under lektionerna.

Alla lektionerna började med ett introduktionsmoment där eleverna var aktiva. I två av lektionerna, Erikas och Felicias, var eleverna aktiva genom att skriva och rita eller spela spel och i övriga var de fysiskt aktiva. Gudrun Malmer (2002) menar att aktiva elever är en förutsättning för inläring eftersom att handla aktivt ger tänkandet en annan dimension och ökar förståelsen för matematiken. Även ur ett sociokulturellt perspektiv är aktiviteten viktig eftersom eleverna ofta lär sig genom en kombination av språklig och praktisk interaktion när de till exempel leker och spelar spel (Dysthe 2003).

I fem av lektionerna arbetade eleverna med *problemlösning*. De fick en uppgift som de sedan fick lösa med hjälp av laborativt material. Uppgifterna stämde överens med Ahlbergs (1992) definition av problem i och med att det inte fanns någon given matematisk modell som skulle användas vid lösningen av dem. Eleverna fick själva hitta en strategi för att lösa problemet, i enlighet med Lesters (1996) tankar om hur problemlösning kan ske för att utveckla elevernas problemlösningssförmåga. Att de beskrivna lektionerna innehöll problemlösning kanske inte är förvånande med tanke på att just problemlösning har en central roll i kursplanen (Skolverket 2008a). Kursplanen föreskriver att man skall eftersträva en balans mellan ”problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematiska begrepp metoder och uttrycksformer” (Skolverket 2008a, s. 28). Forskning har också visat att en undervisning där eleverna löser problem i grupp och sedan diskuterar i klassen ger dem en bättre taluppfattning, inre motivation och tilltro till deras egen förmåga än traditionell matematikundervisning (Samuelsson 2009). Hagland m.fl. (2005) menar att problemlösning utöver detta bidrar positivt till undervisningen på en mängd områden. Eleverna får bland annat möjligheter att bygga upp och vidga sina kunskaper i matematik, övning i att välja bland och tillämpa sina kunskaper, utvecklad tankeförmåga samt ökad begreppsförståelse, färdighetsträning och språklig träning.

Helena, beskrev en lektion i årskurs 5 där eleverna arbetade med ett rikt matematiskt problem. Lektionens uppläggning följer i stort sett de åtta ovan nämnda tankeprocesser Lester (1996) beskriver som utvecklande för tänkande och färdigheter. Eleverna fick, efter en konkret upplevelse av att skaka hand med alla i klassen, försöka dokumentera handskakningarna och var då tvungna att *försöka förstå frågan i problemet (1)*. De måste *förstå villkoren och variablerna i problemet (2)*, det vill säga att alla skulle skaka hand med varandra en gång. De fick sedan *välja de data (3)* som behövdes för att lösa problemet, alltså antalet elever i klassen etc. Eleverna valde sedan hur de skulle visa antalet gjorda handskakningar genom att *välja en lämplig Lösningsstrategi (4)* och nådde därmed ett delmål som var att *hitta olika korrekta strategier (5)*. De olika lösningarna skrevs på tavlan och diskuterades. Läraren var också aktiv och lade till flera lämpliga strategier. Ett *svar på problemet (6)* nåddes, och genom jämförelser av elevernas olika lösningar *värderades rimligheten i svaret (7)*. Genom att sedan visa att det finns en *generell formel (8)* för problemet, $n(n-1)/2$, hade läraren använt sig av laborativ matematik för att nå abstraktion. Eleverna arbetade med grundläggande algebraiska begrepp och skapade med hjälp av matematiska symboler egna uttryck och ekvationer. Enligt Helena uppnåddes med övningen de mål i kursplanen som strävar efter att eleven ”utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer” (Skolverket 2008b).

Lektionerna innehöll moment av samarbete mellan eleverna. När eleverna samarbetar med problemlösning i små grupper eller i par är detta en kollektiv verksamhet utifrån ett sociokulturellt perspektiv (Säljö 2000). Eleverna blir delaktiga i de kunskaper och färdigheter

som gruppen gemensamt besitter, så kallat *distribuerat lärande* (Dysthe 2003). Vid samarbete kan eleven lösa svårare problem än på egen hand eftersom kunskapsutvecklingen sker genom samarbete och imitation (Vygotskij 1934/1999). Undervisning bör därför enligt Bråten och Thurmann-Moe (1998) uppmuntra samarbete mellan eleverna. Alla lektionerna syftade till att skapa förståelse för något matematiskt område eller begrepp. Språket hade då en central roll genom att eleverna diskuterade matematiska begrepp på olika sätt. Man satte ord på den matematik man arbetade med. Att tala och skriva i samband med matematik, och därmed organisera sina tankar, är centralt för elevernas inläring och ger dem en djupare förståelse (Sternér & Lundberg 2002). De matematiska begreppen måste regelbundet diskuteras och användas i rätt kontext för att de ska förankras i elevernas tankar (Orton och Frobisher 1996/2004). Att, som i de två lektionerna för senare åldrar, presentera och diskutera olika lösningsförslag ger dem möjlighet att lära sig av varandra. Detta är viktigt i ett sociokulturellt perspektiv på lärande eftersom vi enligt detta lär oss i samspel med andra som visar hur omvärlden fungerar och skall förstås (Säljö 2000). Inger Wistedt (1996) påpekar dock att detta inte är tillräckligt för att leda till inläring. Läraren måste också enligt henne hjälpa eleverna att tydliggöra sina tankar.

Ett sociokulturellt perspektiv på lärande lyfter fram samspelet mellan elever och mellan lärare och elev (Dysthe 2003; Säljö 2000). Genom att samarbeta med mer kompetenta personer och lyssna till dem när de talar om matematik får eleverna nya kunskaper och förståelse för matematiska begrepp (Säljö 2000). Matematiska diskussioner är därför viktiga i matematikundervisningen. En mobil matematikverkstad bör innehålla övningar av sådant slag att samarbete och diskussioner av begrepp och strategier främjas. I övningar av problemlösningskaraktär kan detta tillgodoses. Ur ett sociokulturellt perspektiv finns det därmed goda möjligheter för att en mobil matematikverkstad kan främja elevernas matematikinläring och vara ett användbart verktyg för lärare i sin undervisning.

6.3 Slutsatser och framtida användning

6.3.1 Slutsatser

Syftet med denna undersökning är att med hjälp av kvalitativa intervjuer undersöka vilka didaktiska krav som är lämpliga att ställa på en mobil laborativ matematikverkstad och hur den kan påverka elevers matematikinläring. Vi ville undersöka hur en mobil matematikverkstad skulle kunna vara ett verktyg för lärare vid matematikundervisning. Vi tycker oss utifrån intervjuer och forskning kunna se att mobila matematikverkstäder, precis som andra matematikverkstäder, kan ha en positiv inverkan på elevers matematikinläring.

Intervjupersonerna var positiva till arbete med laborativ matematik. De pekade bland annat på att eleverna behöver arbeta laborativt för att tydliggöra och konkretisera matematiken på flera olika sätt. Vissa elever har inget behov av att konkretisera utan kan gå direkt till den abstrakta matematiken, men mycket pekar på att de flesta har nytta av laborativ matematik.

Laborativ matematik leder dock, som vi sett, inte automatiskt till förståelse och inläring. Lärarens kompetens spelar här en stor roll. Laborationerna måste planeras noga. Arbetet i matematikverkstaden kan lätt bli en happening som inte leder till inläring. Det laborativa materialet har ingen konkretiserande egenskap i sig. Läraren måste ha tydliga mål med laborationerna och noga välja det material som används vid respektive tillfälle. Läraren måste också aktivt handla eleverna i undervisningen, inte bara observera. Få elever blir framgångsrika problemlösare om de inte får vägledning av läraren som ställer frågor och ger idéer om det behövs. Det är då inte lotsning det är fråga om utan att utmana eleven till att tänka själv. Läraren måste också sätta ord på de begrepp som behandlas och använda ett matematiskt korrekt språk så att det blir tydligt för eleverna vilken matematik som behandlas.

Det är också viktigt att läraren planerar innehållet i undervisningen så att matematiken sedan förs vidare till abstraktion. Här tror vi att lärare kan ha brustit i att gå från konkretisering till abstraktion. Detta kan vara en av orsakerna till elevernas bristande matematikkunskaper.

Många lärare låter läroböckerna styra undervisningen, vilket kan vara en annan av orsakerna till elevers bristande matematikkunskaper. Läromedel behöver i sig inte vara negativa för undervisningen, men om det för eleverna handlar om att räkna fort, utan att söka förståelse, blir de till ett hinder för inläringen. Laborativt arbete och problemlösning kan vara två arbetsformer som kompletterar arbete i läroböcker.

Ur ett sociokulturellt perspektiv är laborativt arbete, gärna i form av problemlösning, en förutsättning för inläring. Här får eleverna möjlighet att utöka sina kunskaper i samspel med andra elever och med hjälp av läraren. Genom att kommunicera med andra och höra deras tankar blir eleverna delaktiga i kunskaper och färdigheter. Här fyller alltså matematikverkstäder ett viktigt behov i undervisningen.

Mobila matematikverkstäder, som kan användas var och när som helst, skulle kunna vara en lösning på de praktiska problem som kan finnas med permanent lokaliserade matematikverkstäder. Ingen lokal behövs om verkstaden är mobil och kan användas på valfri plats i den dagliga undervisningen. Det kan vara en fördel på många skolor med lokalbrist.

Avslutningsvis finns det mycket som talar för att mobila laborativa matematikverkstäder skulle kunna bidra till ett lustfyllt lärande i matematikundervisningen.

6.3.2 Bidrag till läraryrket

Uppsatsen kom till efter att vår uppdragsgivare sett ett praktiskt problem med outnyttjade matematikverkstäder ute i den dagliga skolverksamheten. Hon kommer att använda sig av vår uppsats vid skapandet av en mobil laborativ matematikverkstad, vilket känns meningsfullt för oss. Uppsatsen är också en del av ett underlag för ett seminarium på Matematikbiennalen 2010. Förhoppningsvis kommer den då att väcka intresse hos några lärare och sprida ringar på vattnet. Kanske kan vår uppsats inspirera och motivera fler lärare till att använda sig av laborativ matematik.

6.3.3 Vidare forskning

Under arbetet med uppsatsen har nya tankar väckts hos oss. Detta har gett upphov till ytterligare forskningsidéer. Det vore av stort intresse att undersöka hur lärare synliggör sambandet mellan den konkreta och den abstrakta representationsformen i matematikundervisningen. Mycket tyder på att vissa lärare brister i sin planering när det gäller just detta samband.

Ett annat forskningsområde skulle kunna vara att undersöka om de lektioner som lärare upplever vara resultatrika verkligen är det, med avseende på att eleverna lär sig det som avsetts med lektionen.

Vi har i vår uppsats haft ett didaktiskt perspektiv, men skulle också gärna undersöka elevernas perspektiv på laborativ matematik. Hur upplever eleverna laborativ matematik och hur uppfattar de att matematikinläringen går till? De svenska elevernas bristande matematikkunskaper ger också upphov till nya frågor. Varför har till exempel de finska eleverna bättre kunskaper? I andra länder tycks man ha fler lektionstimmar i matematik. Spelar detta någon roll för elevernas kunskaper?

7. Reflektioner

Vårt examensarbete har givit oss många nya kunskaper och insikter som vi kommer att ha nytta av i vårt kommande arbete som lärare. Det som vi framför allt kommer att ta med oss är vilken viktig och svår roll vi kommer att få när det gäller att planera undervisningen så att den leder till resultatrik inläring för eleverna. Vi har under arbetets gång sett hur oerhört viktig lärarens kompetens är. En av lärarens främsta uppgifter är att se till att eleverna får aktiv hjälp med att ordna sina tankar och att rensa ut felaktiga uppfattningar. Detta är inte möjligt om man bara använder sig av tyst räkning och lämnar eleverna åt sig själva. Ett varierat arbetssätt är därför viktigt och vi kan här se att en mobil laborativ matematikverkstad har sin plats i klassrumsundervisningen genom att ge eleverna möjlighet att tala matematik med varandra och sätta ord på viktiga begrepp. Man får inte stanna i konkretiseringen och glömma bort att målet är att eleverna ska nå abstraktion och få förståelse för det matematiska symboliska språket.

Vi har sett att laborativ matematik kan fylla en funktion genom hela grundskolan och även i gymnasiet. De flesta elever, oavsett ålder, som ska lära sig något nytt kan behöva konkretisera det nya matematiska begreppet. Det hänger dock på att läraren lyckas göra arbetet lustfyllt i alla åldrar så att det inte känns som en belastning. Att knyta matematiken till elevernas verklighet och arbeta med det som är viktigt för dem är ett sätt som vi tror motiverar eleverna till inläring. Om fler lärare använde sig av *välplanerad* laborativ matematik i sin undervisning är vi övertygade om att de svenska elevernas resultat i de internationella undersökningarna skulle förbättras avsevärt. Med en mobil matematikverkstad i närheten skulle tillgängligheten till det laborativa materialet kunna ökas för eleverna.

Referenser

- Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem: en belysning av barns lärande*. Diss. Göteborg: Univ.
- Allwood, C. M. & Erikson, M. G. (red.) (1999). *Vetenskapsteori för psykologi och andra samhällsvetenskaper*. Lund: Studentlitteratur.
- Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. New York: Continuum.
- Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: a cognitive view*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Bentley, P-O. (2003). *Mathematics teachers and their teaching: a survey study*. Diss. Göteborg: Univ., 2003.
- Bentley, P-O. (2009). TIMSS 2007– En djupanalys av svenska elevers kunskaper. I: *Nämnnaren: tidskrift för matematikundervisning*, 1, 4-8. (1974-). Göteborg: Nämnnaren
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling – A theory for practice. I: Clarke, B. (red.) *International perspectives on learning and teaching mathematics*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Univ.
- Bryman, A. (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder*. 1. uppl. Malmö: Liber ekonomi.
- Bråten, I & Thurmann-Moe, A.C. (1998). Den närmaste utvecklingszonen som utgångspunkt för pedagogisk praxis. I: I. Bråten (red.) (1998). *Vygotskij och pedagogiken*. Lund: Studentlitteratur.
- Clements, D.H. & McMillen, S. (1996). Rethinking concrete manipulatives. I: *Teaching children mathematics*, 2 (5), 270-279. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dysthe, O. (2003). Sociokulturella teoriperspektiv på kunskap och lärande. I: O. Dysthe (red.). *Dialog, samspel och lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Ernest, P. (1998). Vad är konstruktivism? I: A. Engström (red.), *Matematik och reflektion: en introduktion till konstruktivismen inom matematikdidaktiken*. Lund: Studentlitteratur.
- Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation*. Stockholm: Liber.
- Hedrén, R. (1992). Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometriundervisningen. I: G. Emanuelsson, B. Johansson, & R. Ryding, (red.), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur.

- Holt, J. C. (1982). *How children fail*. Rev. ed. New York: Delacorte Press/Seymour Lawrence.
- Hult, H. (2000). *Laborationen - myt och verklighet: en kunskapsöversikt över laborationer inom teknisk och naturvetenskaplig utbildning*. Linköping: Centrum för universitetspedagogik, Univ.
- Johansson, M. (2009). Om läroböcker och matematikundervisning. I: G. Brandell (red.). *Matematikdidaktiska frågor: resultat från en forskarskola*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.
- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. 2. uppl. Lund: Studentlitteratur.
- Lester, F. K., (1996). Problemlösningens natur. I: R. Ahlström (red.), *Matematik - ett kommunikationsämne*. 1. uppl. Mölndal: Institutionen för ämnesdidaktik, Univ.
- Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning: en studie av kommunikationen lärare - elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. Diss. Göteborg : Univ., 2004.
- Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemman: hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik: för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla: nödvändig för elever med inlärningssvårigheter*. 2. uppl. Lund: Studentlitteratur.
- McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L. & Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. I: *Learning and instruction*, 19(2), 171-184.
- Möllehed, E. (2001). *Problemlösning i matematik: en studie av påverkansfaktorer i årskurserna 4-9*. Diss. Lund: Univ., 2001.
- NE.se [Elektronisk resurs] . (2000-). Malmö: Nationalencyklopedin.
- Nilsson, G. (2005). *Att äga π : praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer*. Diss. Göteborg : Göteborgs universitet, 2005.
- Orton, A. & Frobisher, L. J. (2004). *Insights into teaching mathematics*. Denna uppl. 2005. London: Continuum.
- Rystedt, E. & Trygg, L. (2005). *Matematikverkstad: en handledning för att bygga, använda och utveckla matematikverkstäder*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.
- Samuelsson, J. (2009). Metoden påverkar elevens matematiska beredskap. I: *Nämnamnaren: tidskrift för matematikundervisning*, 1, 9-11. (1974-). Göteborg: Nämnamnaren.

- Skolverket (2003). *Lusten att lära: med fokus på matematik: nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002*. Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=1148> [åtkomst 2009-10-16]
- Skolverket (2006). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet Lpo 94*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2008a). *Grundskolan: kursplaner och betygskriterier : förordning (SKOLFS 2000:135) om kursplaner för grundskolan : Skolverkets föreskrifter (2000:141) om betygskriterier för grundskolans ämnen. 2., rev. uppl. (2008)*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2008b). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007: en djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2126> [åtkomst 2009-12-27]
- Skolverket (2008c). *TIMSS 2007: svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2127> [åtkomst 2009-10-08]
- Skolverket (2009). *Kursplan med kommentarer till mål som eleverna lägst ska ha uppnått i slutet av det tredje skolåret i ämnena matematik, svenska och svenska som andraspråk*. URL: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2142> [åtkomst 2009-10-16]
- Sterner, G. & Lundberg, I. (2002). *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet
- Stuguland, R., & Söderström, S. (2009). Matteväskan– ett sätt att arbeta med föräldrasamverkan. I: *Nämnamnaren: tidskrift för matematikundervisning*, 4, 3-7. (1974-). Göteborg: Nämnamnaren.
- Säljö, R.(2000). *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.
- Vetenskapsrådet (2002) *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. (2002)*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Wistedt, I. (1996). Matematiska samtal. I: R. Ahlström (red.). *Matematik - ett kommunikationsämne*. Mölndal: Institutionen för ämnesdidaktik, Univ.
- Vygotskij, L. S. (1934/1999). *Tänkande och språk*. Göteborg: Daidalos.

Bilaga 1 Enkät

Hej!

Vi, Jannike Netterdag och Eva Rönström, läser vår sista termin på lärarprogrammet vid Stockholms universitet och är nu mitt uppe i vårt examensarbete. Vi ska i samarbete med matematikutvecklaren NN utveckla en mobil laborativ matematikverkstad. För att möjliggöra det behöver vi din hjälp att besvara frågorna i bifogad enkät.

Deltagandet är naturligtvis frivilligt och anonymt och ni har rätt att avbryta er medverkan när ni vill.

Delar av arbetet kommer eventuellt att användas för framtida publicering.

Har ni frågor kring vårt arbete går det bra att kontakta oss eller någon utav våra lärare Suzanne Kriström, kursansvarig eller Elisabeth Nygren, handledare på Stockholms universitet.

Tack på förhand!

Jannike och Eva

Jannike Netterdag
e-post: jane7001@mbox.su.se
Mobil: 0708-75 50 20

Eva Rönström
e-post: evro2989@student.su.se
Mobil: 073-684 30 82

ENKÄT till matematikutvecklare

Kvinna ☐ Man ☐

Födelseår _____

Vilken inriktning har du på din utbildning?

GrT ☐ GrS ☐ Gy ☐

Annan: _____

Hur många år har du arbetat som lärare? _____

Hur många år har du undervisat i matematik? _____

Tänk på en matematiklektion du hållit som var extra resultatrik när det gäller elevernas inläring!

Vilket matematiskt område/begrepp behandlade lektionen?

Vilket material använde du under lektionen?

Vilken årskurs deltog i lektionen? _____

Hur många elever deltog i lektionen? _____

V.g. vänd

Vilket material skulle du vilja se i en mobil matematikverkstad?

Vi hoppas få kontakt med dig för en kortare intervju.

Namn: _____

E-post: _____

Telefon: _____

Dina kontaktuppgifter behandlas konfidentiellt och kommer inte att kunna relateras till ditt svar.

Tack för din medverkan!

Jannike Netterdag och Eva Rönström

Intervjuguide

Information till intervjupersonen före intervjun

Intervjuerna kommer att inledas med information om uppsatsens syfte. Intervjupersonerna kommer också att bli informerade om att intervjuens längd är ca 30 min och att de har möjlighet att avbryta intervjuerna och samarbetet när som helst. Intervjupersonerna kommer att tillfrågas om de tillåter inspelning av intervjuerna. Vi informerar om att inspelningen förvaras på ett säkert ställe och förstörs efter ett år. Vi kommer också att dölja intervjupersonernas identitet så att det inte går att koppla ihop dem med deras svar. Intervjupersonerna kommer även att informeras om att delar av arbetet eventuellt kommer att användas för framtida publicering.

Generell bakgrundsinformation

- Vilket år är du född?

Specifik bakgrundsinformation

- Vilken utbildning har du?
- När tog du din examen?
- Vad arbetar du med nu?
- Hur länge har du gjort det?
 - Till matematikutvecklare: Hur stor del av din tjänst arbetar du med matematikutveckling?
 - Hur blev du matematikutvecklare?

Intervjutema 1

- Kan du berätta kort om dina erfarenheter av arbete i matematikverkstäder?

Vilka fördelar och nackdelar finns?

Tänk på en matematiklektion du hållit som var extra resultatrik när det gäller elevernas inläring! ! Med resultatrik menar vi att eleverna har lärt sig det du avsåg med lektionen.

- Beskriv lektionen!
 - Vilket matematiskt område/begrepp behandlade lektionen?
 - Vilket material användes under lektionen?
 - Vilken årskurs?
 - Hur många elever deltog i lektionen?
 - Hur lång var lektionen?
 - I vilken miljö hölls lektionen?
 - Hur många gånger har du hållit en lektion efter samma planering?
 - Blev resultatet alltid lika?
- Vad gjorde lektionen framgångsrik när det gäller elevernas inläring?
 - Hur vet du det?
- Vilka mål i styrdokumentet uppnåddes under lektionen?
- Vilken matematik abstraherades under lektionen?
- Nämn några faktorer som är viktiga för elevernas inläring.
- Vilka lektioner är mindre framgångsrika och vad beror det på tror du?

Intervjutema 2

- Inom vilka områden har eleverna i allmänhet bra matematikkunskaper?
- Inom vilka områden har eleverna i allmänhet bristande matematikkunskaper?
- Varför tror du att svenska elever har fått så jämförelsevis dåliga resultat i internationella undersökningar (TIMSS)?

Stockholms universitet
106 91 Stockholm
Telefon: 08-16 20 00
www.su.se



Stockholms
universitet