Algebraiskt tänkande redan på lågstadiet

NCM 211111

Helena Eriksson hei@du.se

helena.eriksson2@borlange.se

Vem är jag som pratar

BORLÄNGE

HÖGSKOLAN DALARNA

2008 – Hur kan vi undervisa så vi får fler elever med oss i undervisningen?

2011 – Specialpedagog SU, - magisteruppsats med empiri från en learning study
2015 – Licentiand - licentiatuppsats med empiri från en learning study
2021 – Doktorand - Avhandling med empiri från ett treårigt design studie projekt som bygger på ett nätverk av learning studies

2021 – Hur kan undervisning designas så elever blir aktiva (agenter) i undervisningen?

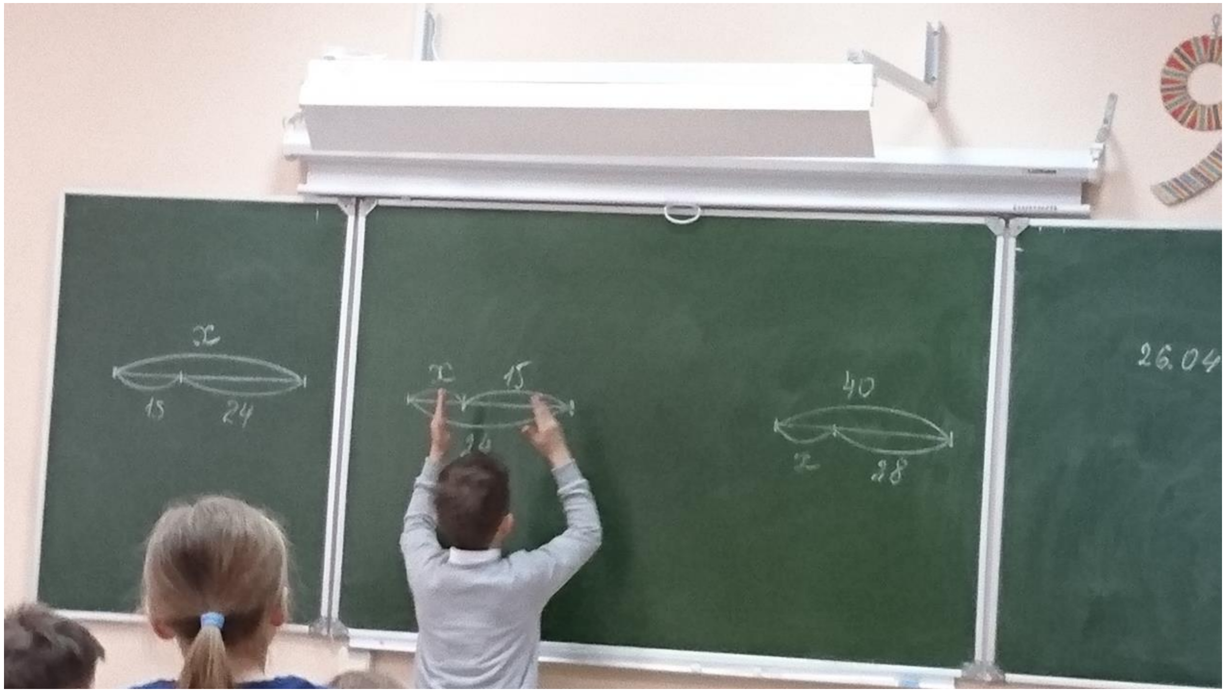
[Att utveckla algebraiskt tänkande genom lärandeverksamhet : En undervisningsutvecklande studie i flerspråkiga klasser i grundskolans tidigaste årskurs (diva-portal.org)]

Varför just detta arbete

- **Våra erfarenheter som undervisande lärare**
- Svårt att samtala med eleverna i matematik
- Svårt för eleverna att arbeta självständigt eftersom det material som vi erbjuder är så språkligt komplicerat

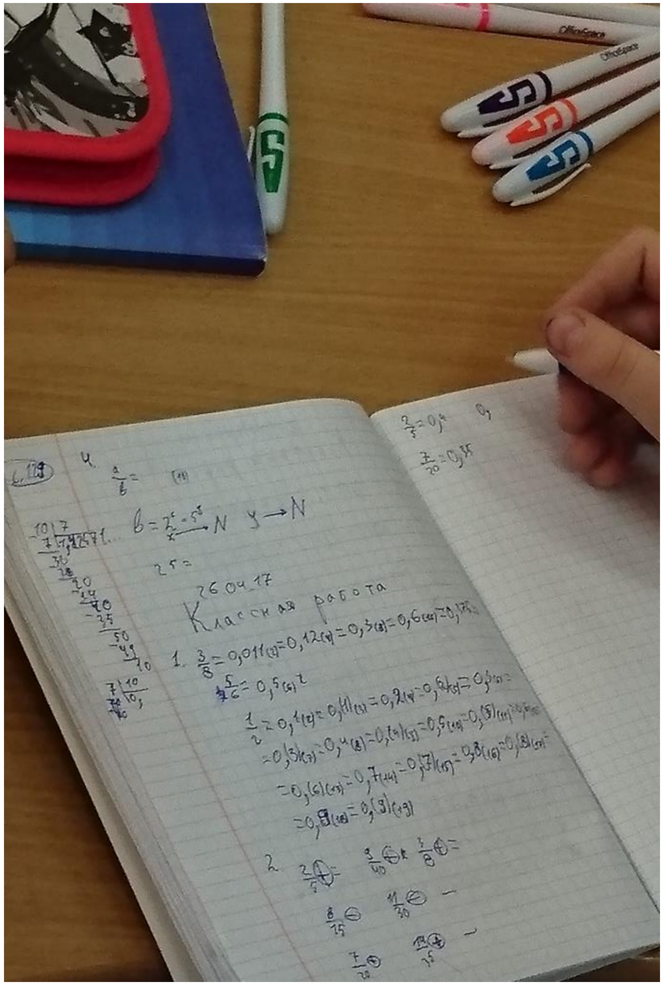
- **Litteratur**
- Matematikundervisning i flerspråkiga klassrum (Norén, 2015; Barwell, mfl 2016; Adler, 2001)
- Matematiska resonemang är svåra att utveckla (Planas & Valero, 2016; Radford & Barwell, 2016, Skolforskningsinstitutet, 2017)
- Arbete med algebra kan utmana sociomatematiska normer i undervisningen (Kilhamn & Säljö, 2019)

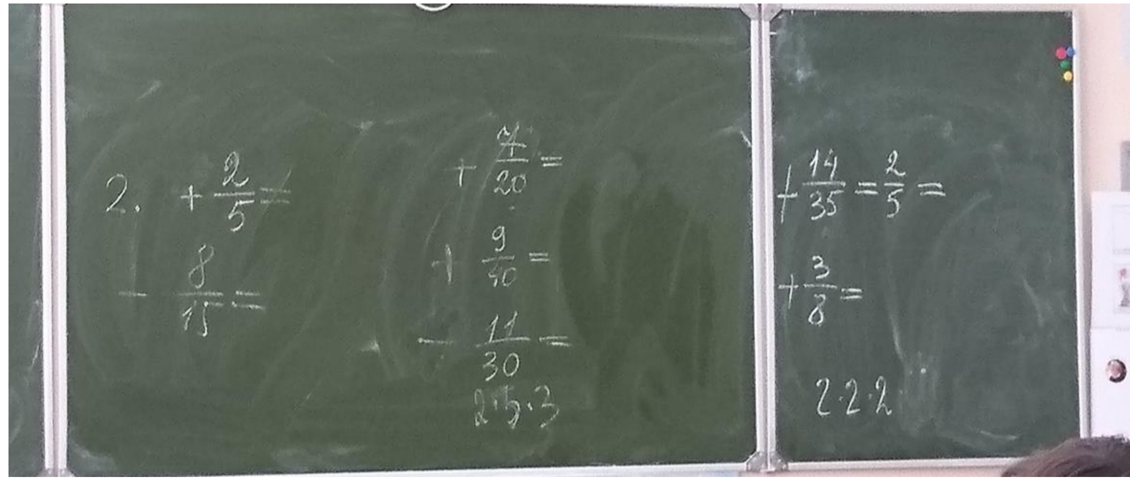
Besök på Schoola 91 – årskurs 1

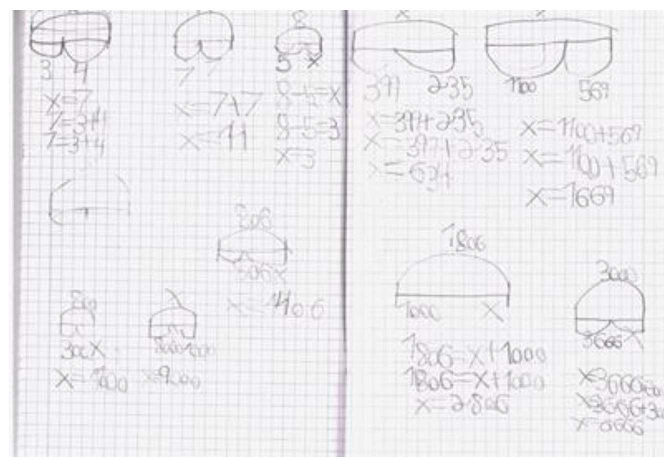


BORLÄNGE

HÖGSKOLAN DALARNA



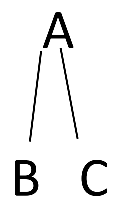


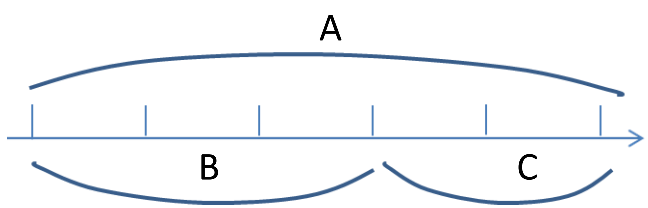


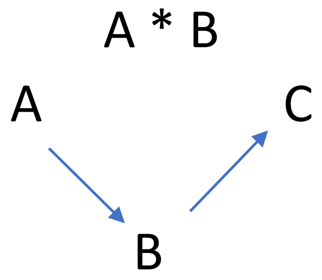
Matematikdidaktisk grundtanke

- Symboler för att utveckla taluppfattning
- Taluppfattning utgår från att jämföra olika kvantiteter.
- Modeller för strukturer

$$A = B + C$$
$$B = A - C$$
$$C = A - B$$







Lärandeverksamhet

- Lärandeuppgiften (som antas fånga objektet för lärandeverksamheten) bearbetas kollektivt för att urskilja vad som krävs för att lösa uppgiften: Vari består problemet? Vad krävs för att uppgiften ska kunna lösas? Vilka svårigheter behöver överkommas? Vilka redskap kan vi pröva?
- Utgående från den analysen skapas en modell som antas kunna lösa problemet. Modellen noteras symboliskt eller grafiskt.
- Genom att använda och utveckla modellen kan eleverna utforska objektets egenskaper i något som kan ses som dess principiella form. Läraren kan i detta arbete föra in nya och kanske motstridiga/ provocerande fakta. I detta arbete måste eleverna kunna förklara hur de själva tänker att problemet kan lösas men också förklara hur de uppfattar andras modeller/förklaringar.
- När eleverna enats om en generell modell kan de försöka att lösa det konkreta problem läraren gett dem. De kan även försöka att konstruera andra uppgifter.
- När eleverna ser att modellen fungerar kan de utvärdera det de åstadkommit och reflektera över i vilken utsträckning tidigare kunskaper använts och vad som kan ses som nya kunskaper.
- Slutligen behöver eleverna kollektivt reflektera över om och i vilken utsträckning uppgifterna har lösts i relation till målet med uppgiften.

Inger Eriksson, 2017

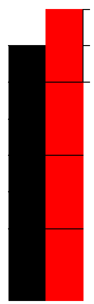
Lärandeverksamhet

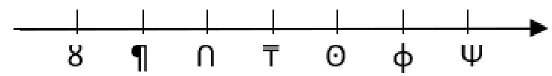
BORLÄNGE HÖGSKOLAN DALARNA

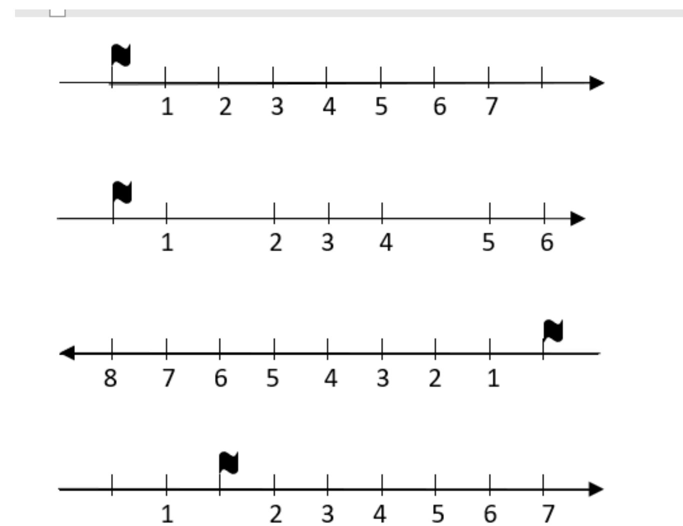
- **Lärandeuppgiften (som antas fånga objektet för lärandeverksamheten) bearbetas kollektivt för att urskilja vad som krävs för att lösa uppgiften: Vari består problemet? Vad krävs för att uppgiften ska kunna lösas? Vilka svårigheter behöver överkommas? Vilka redskap kan vi pröva?**
- Utgående från den analysen skapas en modell som antas kunna lösa problemet. Modellen noteras symboliskt eller grafiskt.
- Genom att använda och utveckla modellen kan eleverna utforska objektets egenskaper i något som kan ses som dess principiella form. Läraren kan i detta arbete föra in nya och kanske motstridiga/ provocerande fakta. I detta arbete måste eleverna kunna förklara hur de själva tänker att problemet kan lösas men också förklara hur de uppfattar andras modeller/förklaringar.
- När eleverna enats om en generell modell kan de försöka att lösa det konkreta problem läraren gett dem. De kan även försöka att konstruera andra uppgifter.
- När eleverna ser att modellen fungerar kan de utvärdera det de åstadkommit och reflektera över i vilken utsträckning tidigare kunskaper använts och vad som kan ses som nya kunskaper.
- Slutligen behöver eleverna kollektivt reflektera över om och i vilken utsträckning uppgifterna har lösts i relation till målet med uppgiften.

Inger Eriksson, 2017

Vari består problemet?







Lärandeverksamhet

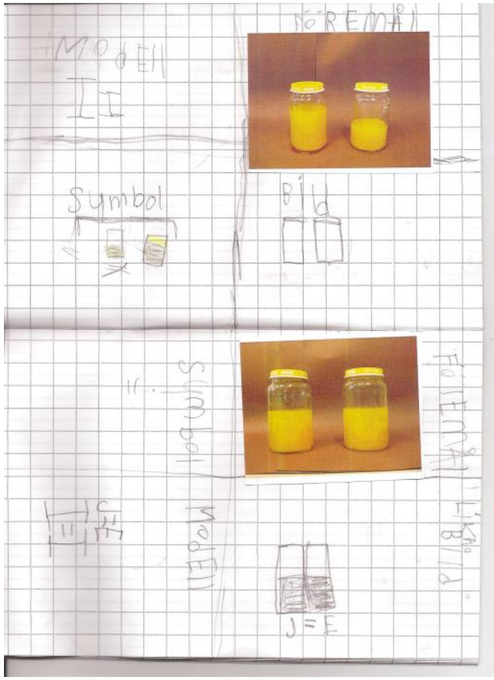
- Lärandeuppgiften (som antas fånga objektet för lärandeverksamheten) bearbetas kollektivt för att urskilja vad som krävs för att lösa uppgiften: Vari består problemet? Vad krävs för att uppgiften ska kunna lösas? Vilka svårigheter behöver överkommas? Vilka redskap kan vi pröva?
- **Utgående från den analysen skapas en modell som antas kunna lösa problemet. Modellen noteras symboliskt eller grafiskt.**
- Genom att använda och utveckla modellen kan eleverna utforska objektets egenskaper i något som kan ses som dess principiella form. Läraren kan i detta arbete föra in nya och kanske motstridiga/ provocerande fakta. I detta arbete måste eleverna kunna förklara hur de själva tänker att problemet kan lösas men också förklara hur de uppfattar andras modeller/förklaringar.
- När eleverna enats om en generell modell kan de försöka att lösa det konkreta problem läraren gett dem. De kan även försöka att konstruera andra uppgifter.
- När eleverna ser att modellen fungerar kan de utvärdera det de åstadkommit och reflektera över i vilken utsträckning tidigare kunskaper använts och vad som kan ses som nya kunskaper.
- Slutligen behöver eleverna kollektivt reflektera över om och i vilken utsträckning uppgifterna har lösts i relation till målet med uppgiften.

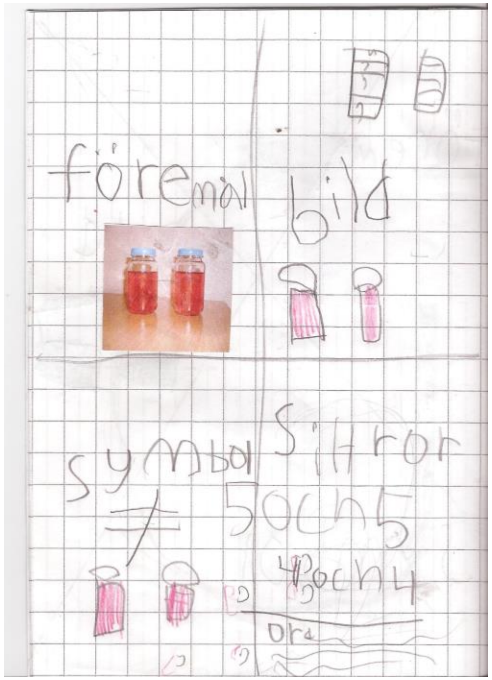
Inger Eriksson, 2017

Modellarbete

Ett av de första mötena med modellarbetet

Vi inleder med likheter och olikheter





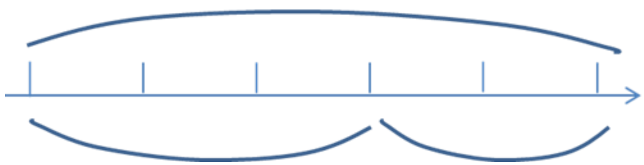
Lärandeverksamhet

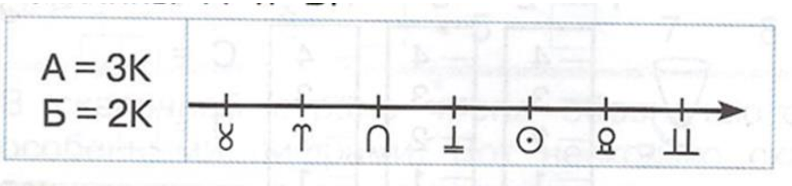
BORLÄNGE HÖGSKOLAN DALARNA

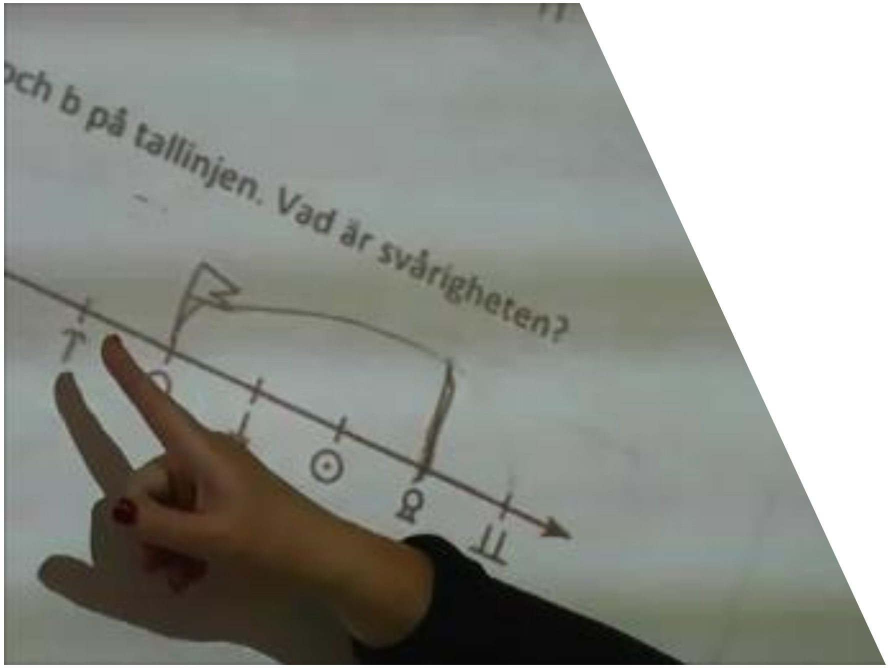
- Lärandeuppgiften (som antas fånga objektet för lärandeverksamheten) bearbetas kollektivt för att urskilja vad som krävs för att lösa uppgiften: Vari består problemet? Vad krävs för att uppgiften ska kunna lösas? Vilka svårigheter behöver överkommas? Vilka redskap kan vi pröva?
- Utgående från den analysen skapas en modell som antas kunna lösa problemet. Modellen noteras symboliskt eller grafiskt.
- **Genom att använda och utveckla modellen kan eleverna utforska objektets egenskaper i något som kan ses som dess principiella form. Läraren kan i detta arbete föra in nya och kanske motstridiga/ provocerande fakta. I detta arbete måste eleverna kunna förklara hur de själva tänker att problemet kan lösas men också förklara hur de uppfattar andras modeller/förklaringar.**
- När eleverna enats om en generell modell kan de försöka att lösa det konkreta problem läraren gett dem. De kan även försöka att konstruera andra uppgifter.
- När eleverna ser att modellen fungerar kan de utvärdera det de åstadkommit och reflektera över i vilken utsträckning tidigare kunskaper använts och vad som kan ses som nya kunskaper.
- Slutligen behöver eleverna kollektivt reflektera över om och i vilken utsträckning uppgifterna har lösts i relation till målet med uppgiften.

Inger Eriksson, 2017

Modellerna bearbetas





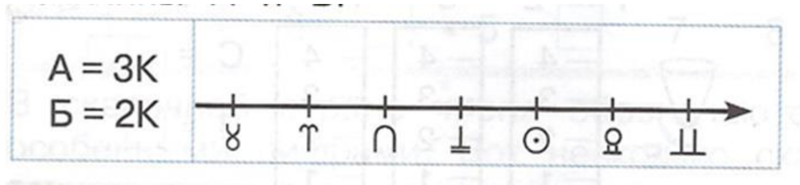


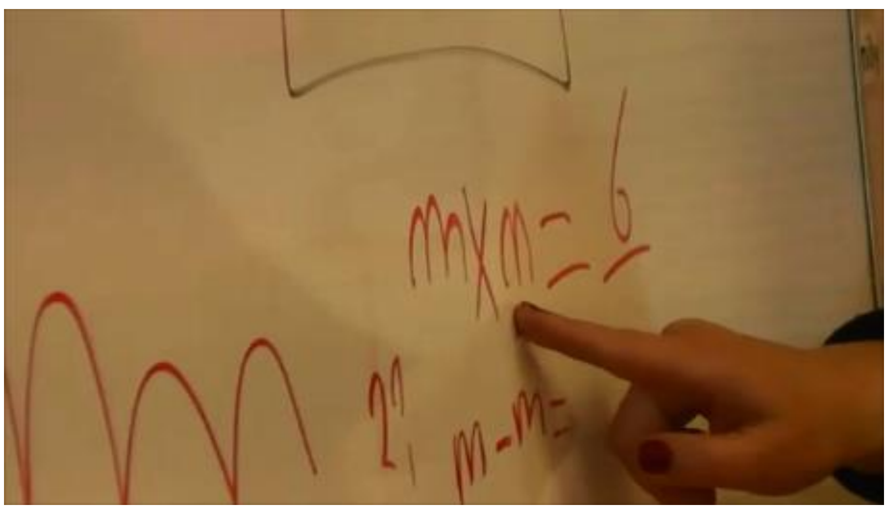
Lärandeverksamhet

- Lärandeuppgiften (som antas fånga objektet för lärandeverksamheten) bearbetas kollektivt för att urskilja vad som krävs för att lösa uppgiften: Vari består problemet? Vad krävs för att uppgiften ska kunna lösas? Vilka svårigheter behöver överkommas? Vilka redskap kan vi pröva?
- Utgående från den analysen skapas en modell som antas kunna lösa problemet. Modellen noteras symboliskt eller grafiskt.
- Genom att använda och utveckla modellen kan eleverna utforska objektets egenskaper i något som kan ses som dess principiella form. Läraren kan i detta arbete föra in nya och kanske motstridiga/ provocerande fakta. I detta arbete måste eleverna kunna förklara hur de själva tänker att problemet kan lösas men också förklara hur de uppfattar andras modeller/förklaringar.
- **När eleverna enats om en generell modell kan de försöka att lösa det konkreta problem läraren gett dem. De kan även försöka att konstruera andra uppgifter.**
- När eleverna ser att modellen fungerar kan de utvärdera det de åstadkommit och reflektera över i vilken utsträckning tidigare kunskaper använts och vad som kan ses som nya kunskaper.
- Slutligen behöver eleverna kollektivt reflektera över om och i vilken utsträckning uppgifterna har lösts i relation till målet med uppgiften.

Inger Eriksson, 2017

Enas om en modell





Lärandeverksamhet

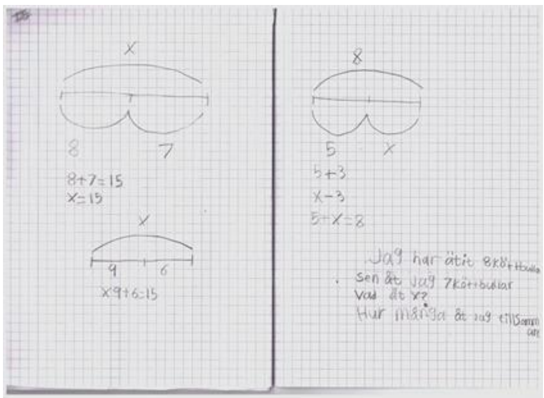
- Lärandeuppgiften (som antas fånga objektet för lärandeverksamheten) bearbetas kollektivt för att urskilja vad som krävs för att lösa uppgiften: Vari består problemet? Vad krävs för att uppgiften ska kunna lösas? Vilka svårigheter behöver överkommas? Vilka redskap kan vi pröva?
- Utgående från den analysen skapas en modell som antas kunna lösa problemet. Modellen noteras symboliskt eller grafiskt.
- Genom att använda och utveckla modellen kan eleverna utforska objektets egenskaper i något som kan ses som dess principiella form. Läraren kan i detta arbete föra in nya och kanske motstridiga/ provocerande fakta. I detta arbete måste eleverna kunna förklara hur de själva tänker att problemet kan lösas men också förklara hur de uppfattar andras modeller/förklaringar.
- När eleverna enats om en generell modell kan de försöka att lösa det konkreta problem läraren gett dem. De kan även försöka att konstruera andra uppgifter.
- **När eleverna ser att modellen fungerar kan de utvärdera det de åstadkommit och reflektera över i vilken utsträckning tidigare kunskaper använts och vad som kan ses som nya kunskaper.**
- Slutligen behöver eleverna kollektivt reflektera över om och i vilken utsträckning uppgifterna har lösts i relation till målet med uppgiften.

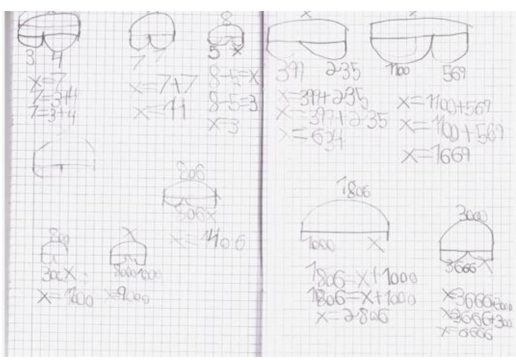
Inger Eriksson, 2017

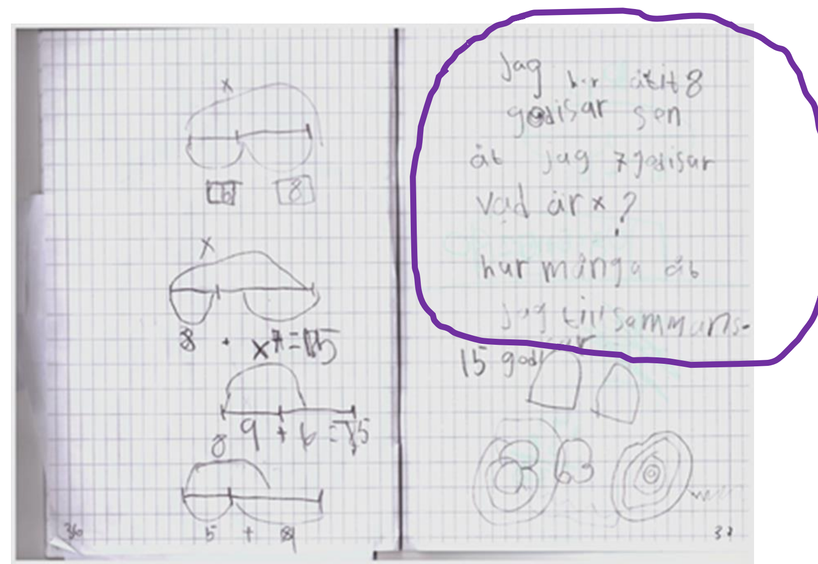
Reflektera över vad som är nytt
Göra nya uppgifter

BORLÄNGE

HÖGSKOLAN DALARNA







Lärandeverksamhet

BORLÄNGE HÖGSKOLAN DALARNA

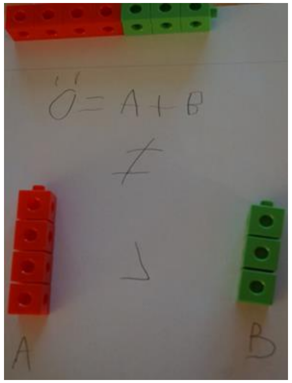
- Lärandeuppgiften (som antas fånga objektet för lärandeverksamheten) bearbetas kollektivt för att urskilja vad som krävs för att lösa uppgiften: Vari består problemet? Vad krävs för att uppgiften ska kunna lösas? Vilka svårigheter behöver överkommas? Vilka redskap kan vi pröva?
- Utgående från den analysen skapas en modell som antas kunna lösa problemet. Modellen noteras symboliskt eller grafiskt.
- Genom att använda och utveckla modellen kan eleverna utforska objektets egenskaper i något som kan ses som dess principiella form. Läraren kan i detta arbete föra in nya och kanske motstridiga/ provocerande fakta. I detta arbete måste eleverna kunna förklara hur de själva tänker att problemet kan lösas men också förklara hur de uppfattar andras modeller/förklaringar.
- När eleverna enats om en generell modell kan de försöka att lösa det konkreta problem läraren gett dem. De kan även försöka att konstruera andra uppgifter.
- När eleverna ser att modellen fungerar kan de utvärdera det de åstadkommit och reflektera över i vilken utsträckning
- **Slutligen behöver eleverna kollektivt reflektera över om och i vilken utsträckning uppgifterna har lösts i relation till målet med uppgiften.**

Inger Eriksson, 2017

Reflektera över lösningen

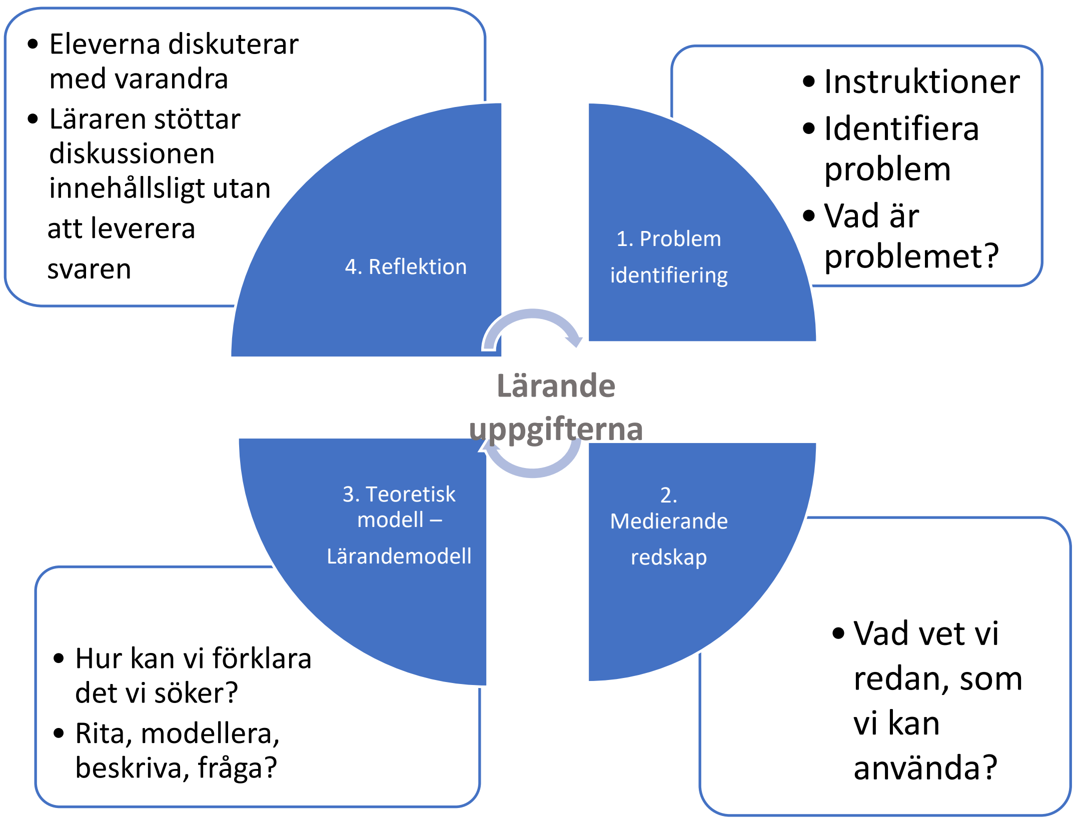
- Kan vi göra något mer med våra högar?
- Vi kan sätta ihop dem och då bildas Ö
  - Vad händer om vi flyttar en kloss från en hög till den andra?
  - A+1 kan inte heta A. Den kan vi kalla W.
  - B-1 kan inte heta B. Den kan vi kalla F.
  - Men tillsammans är det ju lika. Den som var Ö.
  - Då är F < W.

$$(A+1) + (B-1) = Ö$$



Lärandeverksamhet

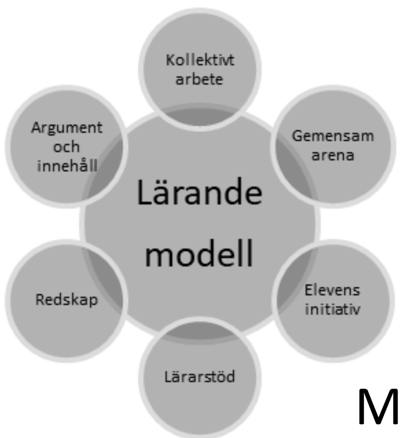
BORLÄNGE HÖGSKOLAN DALARNA



Helena Eriksson, Blge

Mina forskningsbidrag

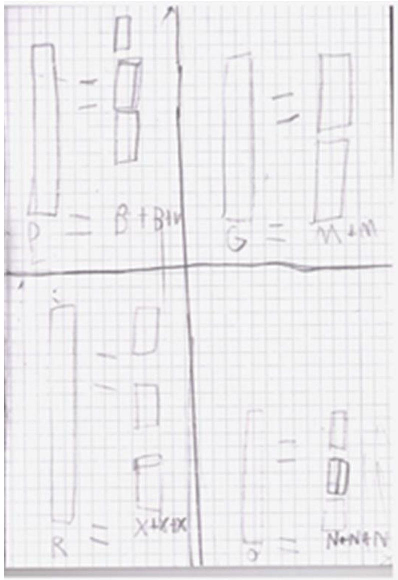
- Arbete med lärandemodeller

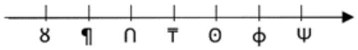


- Algebraiskt tänkande

Matematiska resonemang

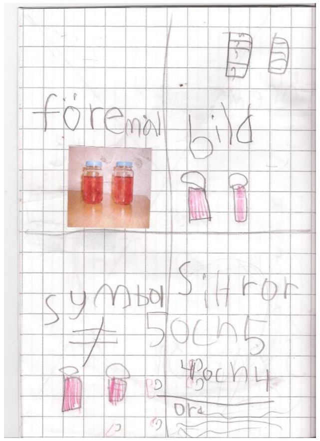
Arbete med lärandemodeller

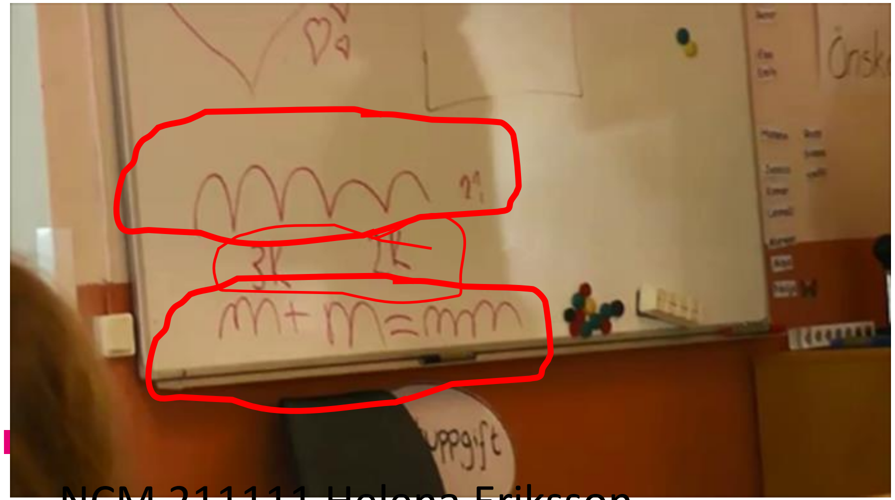


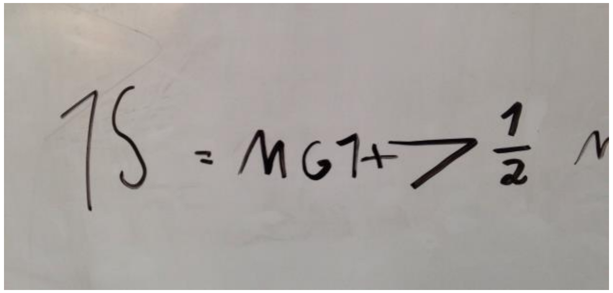


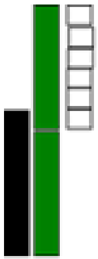
Lärandemodellerna som

- Rudimentära
- Preliminära
- Prototypiska
- Symboliska









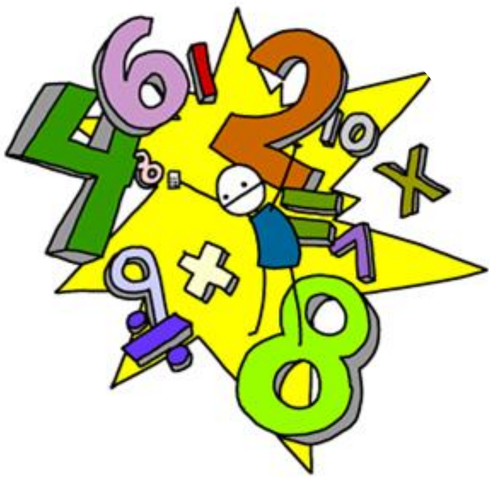
Algebraiskt tänkande

Benämning i forskning	Undervisningstradition	Matematiskt innehåll
Algebraiserad elementär matematik	Aritmetik först	47-18+18=
Pre-algebra		Förklara aritmetik Benämna okända antal
Early algebraization	Algebra och aritmetik samtidigt	Fokus på okända, inverser, likhetstecken, olika lösningar
Artimetiskt-algebraiskt tänkande		Område där algebra och aritmetik möts. Aritmetik som generell
Begynnande algebraiskt tänkande		Earaly algebra ses inte riktigt som algebra. Geometrisk mönsterutveckling
Algebraisk tradition	Algebra först	Relationer och strukturer

Resultat

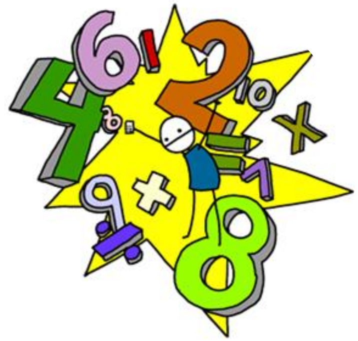
BORLÄNGE

HÖGSKOLAN DALARNA



- Elever arbetar med fler matematiska redskap, exempelvis siffersymboler, algebraiska symboler, tallinjer, bildsymboler, modeller, muntligt resonemang, gester, mm
- Elever som undervisas på sitt andraspråk har möjligheter att använda redskap för att utveckla matematiska begrepp i diskussioner.
- Elever som annars visar låga kvaliteter på förmågor i matematik har möjlighet att reflektera över matematiska begrepp och lösningar.
- Elever som redan i åk 1 visar höga kvaliteter på förmågor i matematik erhåller rika möjligheter att resonera runt matematiska begrepp.

Resultat

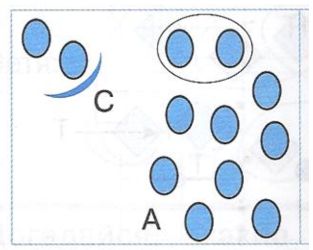


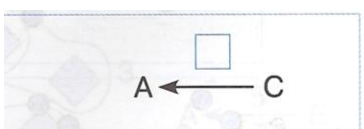
BORLÄNGE

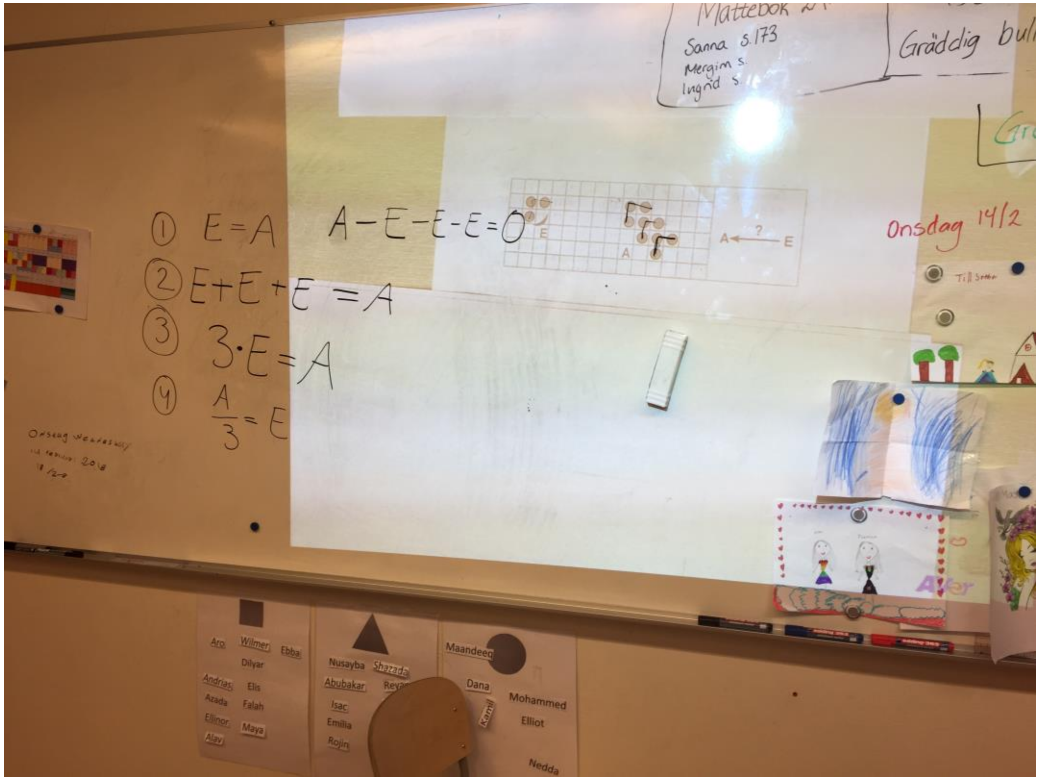
HÖGSKOLAN DALARNA

- Eleverna löser matematiska problem på flera olika sätt; eleverna använder bildsymboler, algebraiska symboler, geometriska modeller samt att de representerar lösningar som öppna utsagor; $7 + x = 15$,
- Betygen i matematik i årskurs 6 på skolan har ökat under de senaste åren, även under pandemin trots hög frånvaro av elever,
- Det lokala screeningarbetet har fått uppgraderats då elever klarar aritmetiska beräkningar tidigare i årskurserna,
- Undervisningen iscensätts mer som kollektiva samtal i samtliga ämnen där modelarbete utvecklas i flera ämnen.

Fortsatta utmaningar
Olika enheter



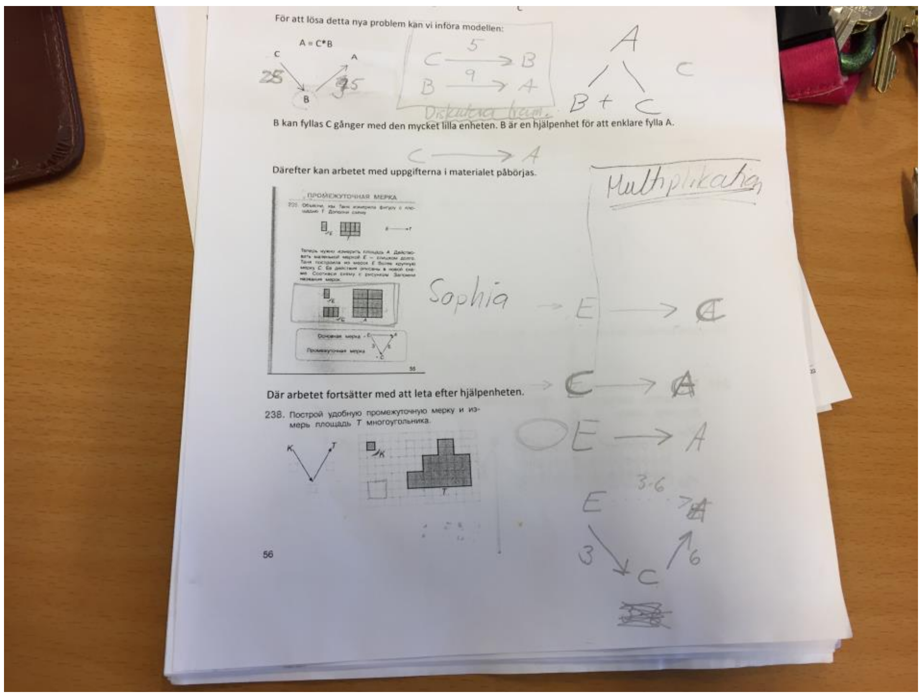


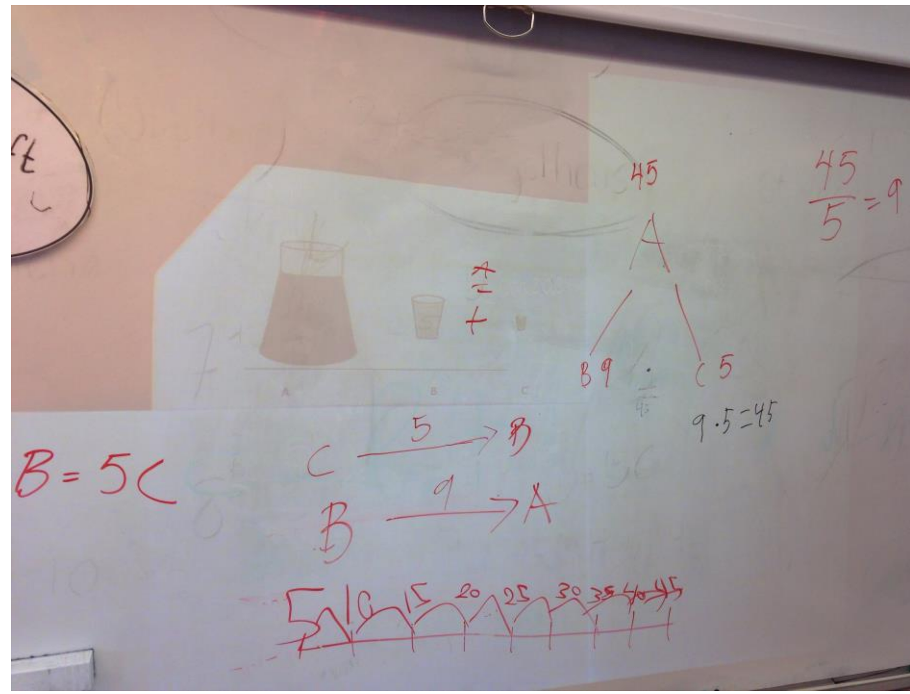


Fortsatta utmaningar
Vi planerar för multiplikation

BORLÄNGE

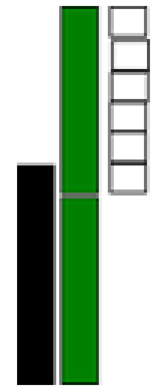
HÖGSKOLAN DALARNA

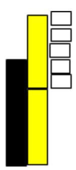


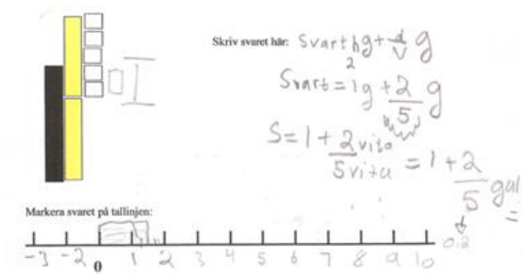


Nämnaren, 2020:4 s.11-16

Fortsatta utmaningar
Tal i bråkform

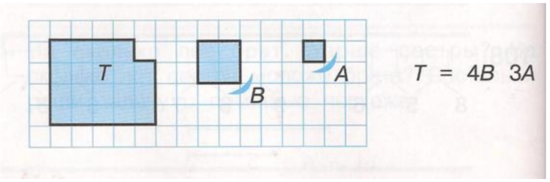


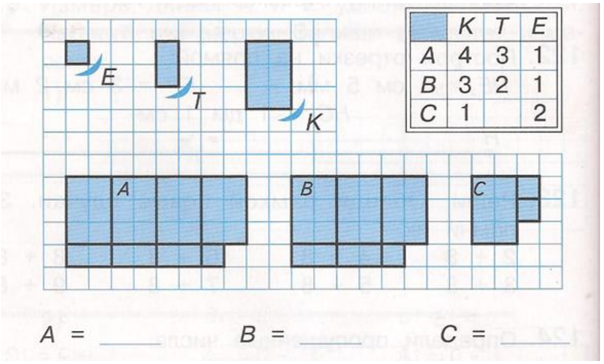


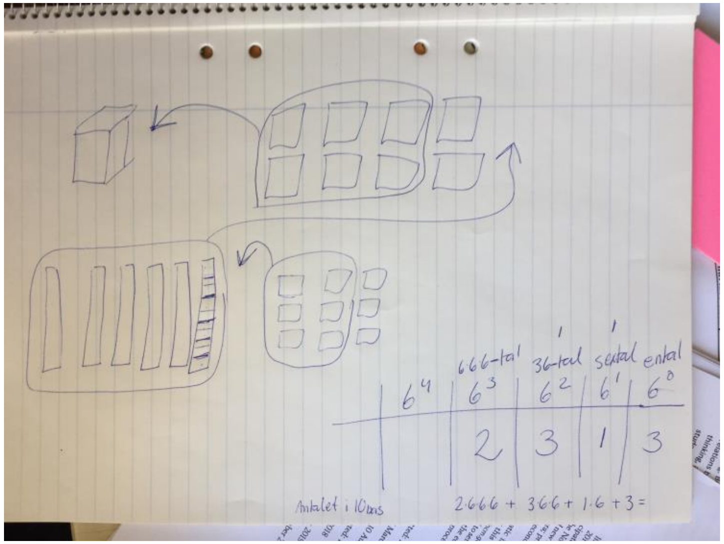


Fortsatta utmaningar
Att räkna i andra baser (Lgr 22)

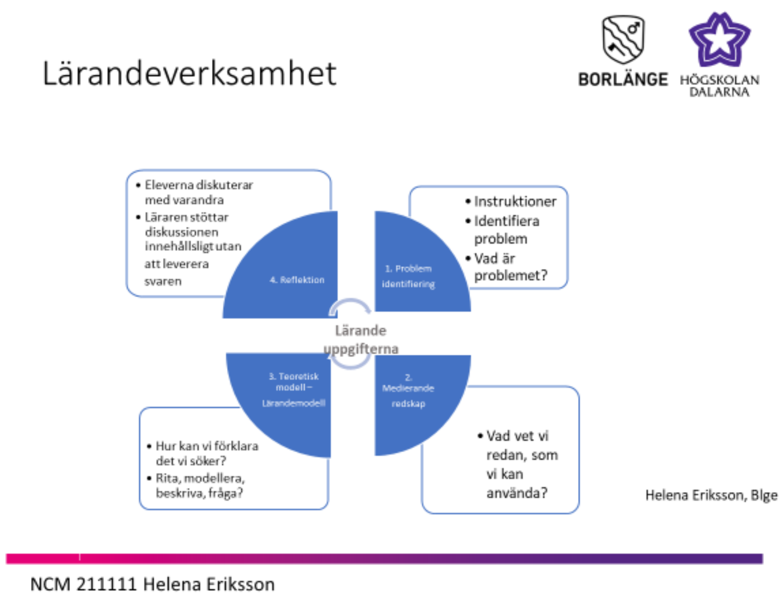
BORLÄNGE
HÖGSKOLAN DALARNA







Diskussion



- Är detta intressant för matematikundervisning i Sverige?
- Finns uppgifterna?
- Möjligheter?
- Hinder?
- Hur skulle det kunna gå till?

hei@du.se

helena.eriksson2@borlange.se

Referenslista

BORLÄNGE HÖGSKOLAN DALARNA

- Adler, J. (2001). Teaching mathematics in multilingual classrooms. Kluwer Academic Publishers.
- Andersson, C., Andrén, S., Eriksson, H. & Tuominen, J. (2020). Skapa behov av multiplikation. *Nämnaren* 2020:4.
- Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N., . . . Villavicencio Ubillús, M. (2016). Mathematics education and language diversity. Springer International Publisher. https://www.springer.com/gp/book/9783319145105
- Björk, M., Nikula, Å., Stensland, P., & Stridfält, A. (2019). Tecken på teoretiskt tänkande om strukturer i bassystemet. Forskning om undervisning och lärande, 7(2), 26–49. https://forskul.se/tidskrift/volym-7-nummer-2- 2019/tecken-pa-teoretiskt-tankande-om-strukturer-i-bassystemet/
- Davydov, V. V. (2008). Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study (P.Moxhay, Trans.; 2nd ed.). Nova Science Publishers, Inc. (Original publicerad 1986) https://ebookcentral-proquestcom.ezp.sub.su.se/lib/sub/detail.action?docID=3021729
- Davydov, V., Gorbov, S., Mikulina, G., & Saveleva, O. (2012). Matematikka. Vita Press.
- Eriksson, H. (2016). Taluppfattning i heterogena elevgrupper. *Nämnaren* 2016:1.
- Eriksson, H. (2021). Att utveckla algebraiskt tänkande genom lärandeverksmahet. En undervisningsutvecklande studie i flerspråkiga klassrum. Stockholms Universitet.
- Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en learning study. I I. Carlgren, (Red.), Undervisningsutvecklande forskning - exempelt Lerning study (ss. 61–85). Gleerups.
- Kilhamn, C., & Säljö, R. (2019). Encountering Algebra. A comparative study of classrooms in Finland, Norway, Sweden, and the USA. Springer International Publishing. https://www.springer.com/gp/book/9783030175764
- Norén, E. (2015). Agency and positioning in a multilingual mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 89(2), 167–184. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9603-5
- Planas, N., & Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding methematics education. I A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Red.), The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues (ss. 447–483). Sense Publisher. https://doiorg.ezp.sub.su.se/10.1007/978-94-6300-561-6
- Radford, L., & Barwell. (2016). Languages in mathematics education research. I I. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Red.), The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journy continues (ss. 275–313). Sense Publishers. https://doi-org.ezp.sub.su.se/10.1007/978-94-6300-561-6.
- Skolforskningsinstitutet. (2017). Klassrumsdialog i matematikundervisningen - matematiska samtal i helklass i grundskolan. Skolforskningsinstitutets systematiska översikter. Skolforskningsinstitutet.
- Tuominen, J., Andersson, C., Björklund Boistrup, L., & Eriksson, I. (2018). Relate before calculate: Students' ways of experiencing relationships between quantities. Didactica Mathematicae, (40), 5–33. https://doi.org/10.14708/dm.v40i0.6431