

*Kunskapsöversikt:
Lära och undervisa grundläggande geometri
- några nedslag*

NCM 15 03 19
Berit Bergius

Geometriundervisning

- Utgå från matematiken

Euklides *Elementa*

hierarkisk struktur – definitioner, axiom, bevis

-Det är möjligt att dra en sträcka från en punkt till en annan.

-En sträcka kan förlängas godtyckligt till en längre sträcka.

-Kring varje punkt kan beskrivas en cirkel med given radie.

- Alla räta vinklar är lika med varandra.

- Om en rät linje skär två räta linjer och bildar inre vinklar på samma sida, vars summa är mindre än två räta vinklar, så kommer de två räta linjerna, om de utdras obegränsat, att skära varandra på den sida där de två inre vinklarna ligger.

- Utgå från den som ska lära

Teorier om lärande

Piaget

Utvecklingspsykologi och biologisk mognad

Erfarenhet - Ålder

Sensomotorisk $\approx 0 - 1,5$ år

Preoperationell $\approx 1,5 - 2$ år

Konkreta operationer $\approx 2 - 12$ år

Formella operationer $\approx > 12$ år

Vygotskij

socialkonstruktivistisk syn på lärande – för optimal utveckling bör eleven arbeta med ett innehåll som ligger i angränsande utvecklingszon (ZPD) tillsammans med någon som kommit längre i lärandet

Fröbel

Lek - *ta tillvara barnets inneboende krafter*
- *stimulera till uthållighet och koncentration*

Lekgåvor (noggrant utformad handledning)– *utgår från helheter i barns närmiljö: kroppar – ytor – linjer – punkter*

van Hiele

- lärandet sker i nivåer med ökande abstrakt tänkande
- varje individ genomgår nivåerna i tur och ordning

Nivå 1. **Igenkänning, visualisering.** Lär sig viss terminologi, kan känna igen helheten i en geometrisk form, är omedveten om egenskaper, liknar former vid konkreta objekt (t ex dörr).

Nivå 2. **Analys.** Upptäcker vissa egenskaper hos former genom empirisk analys. Uppfattar inte samband mellan former, t ex generella likheter mellan kvadrat - rektangel - romb.

Nivå 3. **Abstraktion.** Ordnar figurer logiskt, t ex alla kvadrater är rektanglar men alla rektanglar är inte kvadrater; förstår inbördes samband mellan figurer; inser vikten av korrekta definitioner. Kan inte härleda varför t ex diagonalerna i en rektangel är kongruenta; förstår inte deduktionens roll.

Nivå 4. **Deduktion.** Förstår betydelsen av deduktion och den roll axiom, satser och bevis spelar i geometrin; kan använda axiom för att bevisa påståenden om t ex rektanglar och trianglar. Tänkandet är i allmänhet inte så precist att eleven förstår nödvändigheten av axiom.

Nivå 5. **Stringens.** Förstår vikten av precision, som t ex i Hilberts axiomsystem, när man arbetar med geometrins grunder. Kan utveckla en teori utan att använda konkreta föremål. Kan exempelvis också analysera och jämföra euklidisk och icke-euklidisk geometri.

Stimulans i vägleda, utforskande inlärningsprocesser (jfr Vygotskij)

1. *Observation / information.* Lärare och elever **samtalar** om området som ska undersökas. Eleverna **observerar** föremål och figurer och både lärare och elever **ställer frågor**. Läraren hjälper i denna fas elever att **utveckla relevant ordförråd** för den aktuella nivån.
2. *Vägledad undersökning.* Genom en noggrant **strukturerad följd av aktiviteter**, blir eleven bekant med **det karakteristiska** för den nivå man arbetar på.
3. *Förklaring.* Eleverna bygger på tidigare erfarenheter och **berättar om sina upptäckter**. System av sammanhang börjar bli tydliga. Också i denna fas hjälper läraren eleven att utveckla ett ändamålsenligt och korrekt **språk**.
4. *Fri undersökning.* Eleverna får **mer komplicerade** uppgifter och flerstegsuppgifter som kan lösas på flera sätt, men också uppgifter som de inte kan lösa fullständigt.
5. *Sammanfattning.* Lärare och elever **ser** tillsammans **tillbaka** och **sammanfattar** det man arbetat med, för att få **överblick** över begrepp och se sammanhang. Läraren sätter in den nya kunskapen i ett vidare sammanhang, men presenterar inte något nytt.

SOLO – taxonomin (Biggs & Collis)

Lärande i funktionella steg – förståelsen individuell, innehålls- och kontextspecifik

Mängden information att hålla i minnet

Vad som är karakteristiskt i en uppgift

”Tänkandet” – alltmer sofistikerat

-Sensimotoriskt(spädbarnsålder)

-Ikoniskt (> 2 år)

-Konkret-symboliskt

-Formellt

-Postformellt

Perception

Tolka - samordna intryck från alla sinnen

Kognition

Lärprocess - Utbilda det "geometriska ögat"

Spatialt tänkande och resonemang utgår från förmågan att se, granska och reflektera om rumsliga objekt:

- Forma inre föreställningar från konkreta objekt till abstrakta *figurala* begrepp
- Granska inre föreställningar för att besvara frågor om dem (språk – resonemang)
- Omforma och operera på inre föreställningar och samtidigt lagra dem för att senare använda dem i mentala operationer

Konkreta erfarenheter  abstrakt förståelse

Jones (2000); Fischbein (1993); Fujita & Jones (2004)

Are we so accustomed to this space that we cannot imagine how important it is for us and for those we are educating?

Freudenthal, 1973

Övergripande teoretiska perspektiv

Spatial förmåga

Form

Storlek

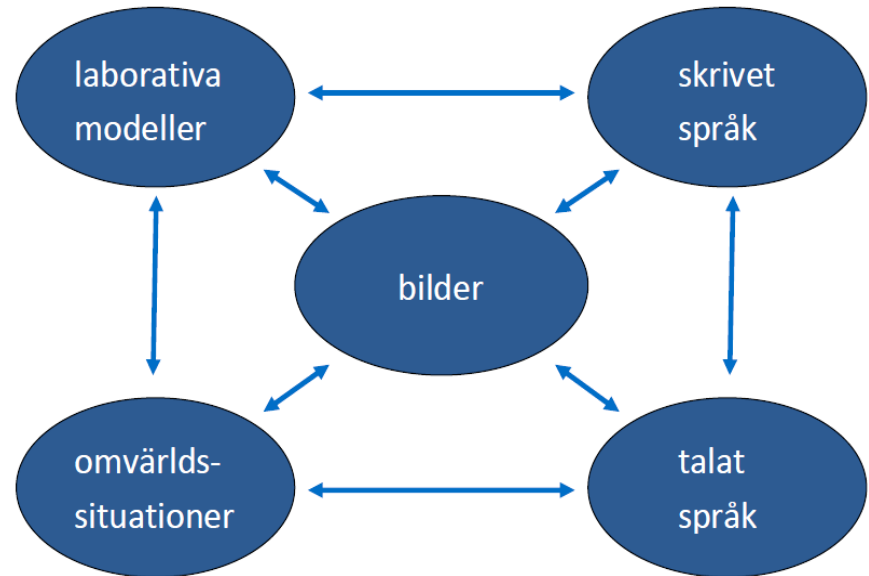
mäta - längd, area, volym, vinklar

Kort historik

Spatial förmåga – rumsuppfattning

- relationer inom objekt
- relationer mellan objekt
- relationer mellan objekt och omvärld

Tolka och beskriva



Spatial förmåga

- Kunna urskilja enskilda objekt i mängden - upptäcka särdrag hos enskilda objekt - strukturera och organisera sinnesintryck.
- Förstå relativa förhållanden mellan fasta och rörliga objekt - i hemmet, skolan, närsamhället, naturen, "världen" ...
- Med hjälp av avstånd, riktning, höjd, djup, och position kunna förstå, använda och utbyta information om objekt och deras positioner.
- Kunna föreställa sig rummet - var man själv och annat befinner sig i detta rum – använda språkliga uttryck som beskriver detta.
- Föreställa sig hur något ser ut från ett annat / någon annans perspektiv
- Veta hur rumsliga föreställningar kan representeras och hur och när de ska användas.
- Förstå hur positioner kan förändras genom förflyttningar.

Spatial förmåga

TOLKA OCH UTTRYCKA RUMSLIGA EGENSKAPER
I MODELLER, ÖVERSIKTSKARTOR,
RITNINGAR, GRAFER...

Från första levnadsåret och framåt

SPRÅKET

intryck från alla sinnen
 olika perspektiv - inre tredimensionellt nätverk
 vad någon tittar - pekar på
 "tittut"

Progression Utforska allt större områden ord för *läge* och *riktning*

Storlekskonstans

alltfler lägesord
ökande språklig precision

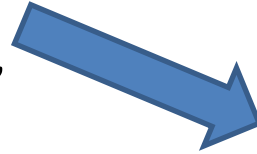
Inre karta över rummet

Helhet -----> delar

Var?

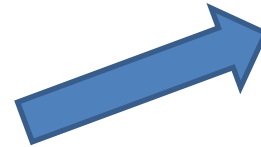
små områden:

-en utsiktspunkt - skannar över,
noterar kännemärken



stora områden:

-röra sig i området, observera
och lägga kännemärken på
minnet.



inre föreställning med
relativa avstånd mellan
kännemärken

- kännemärkena binds samman
och avståndet mellan dem
formas genom erfarenhet

Avbilda rummet – kartor, koordinatsystem, grafer

föreställa sig

blandade perspektiv

Undersöka objekt ur olika perspektiv

Samordna sinnesintryck

Relativ storlek

Relativa lägen och avstånd

skala, förstora , förminska

Koordinatsystem

Horisontella och vertikala linjer

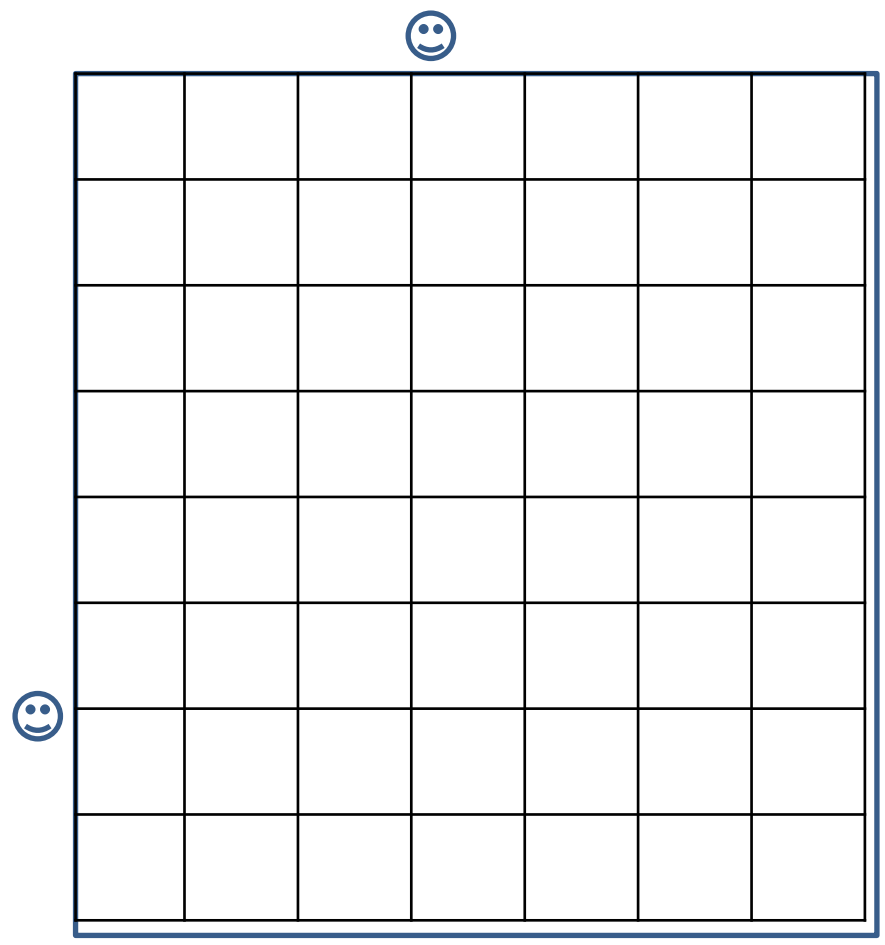
Piaget, *Hitta position*

Nivåer av förståelse – ”lärogång”

- ögonmått
- mäter med pappersremsa avståndet till sökt punkt från en kant på papperet
- mäter med pappersremsa ut läget från över- och underkant - finner punktens horisontella läge
- inser att mätningar måste göras både horisontellt och vertikalt, samt att mätningarna måste samordnas vinkelrätt.

Somerville & Bryant, 1985

Sexåringar



Julie Sarama m fl, 2003

Kartbild med horisontellt och vertikalt orienterade gator, axlar med metriska markeringar.

Söka reda på punkter, uttryckta som koordinater, t ex (8, 9)

- vilken axel är x och vilken är y ?
- koordinater - rörelsesteg - först uppåt, sedan åt höger
- innebörd i axlarnas metriska märkning
- Origo
- x – koordinaten 0
- samordna information om två eller fler positioner
- spatialt förhållande, avstånd mellan punkter

MÄTA

Underförstådd logik om rummet

Mätandets idé

Ordna, överblicka, kontrollera

jämföra, kvantifiera

språkliga uttryck

Bryant (2008)

Urskilja egenskaper. Vad *kan* mätas? Vad *ska* mätas?

Interaktion med människor som förstått begreppet

Battista (2007)

Mäta längd

Egenskapen längd (avstånd)

Storlekskonstans

Jämförelse - Transitivitet

Likadelning

Enheter och enhetsupprepning (iteration)

Avståndsackumulering

Nollpunkt

Relation till antal

Clements & Stephan (2004); Sarama & Clements (2009)

Direkt jämförelse

Indirekt jämförelse

Hur lång? Hur mycket längre?



Piaget, 1960

Akkumulering av avstånd

Vad betyder "åtta"?

- utrymmet som täcks av den åttonde foten
- den åttonde förflyttningen (= utrymmet för första foten inräknas inte)
- utrymmet mellan hälen på första foten och tån på den åttonde

Enheter - likadelning

Eleven abstraherar kontinuerliga kvantiteter genom att t ex föra ett finger utmed ett objekt eller att skanna av objektet med ögonen.

Genom rörelsens varaktighet uppmärksammas omfattningen på den linjära utsträckningen. För att ett längdsegment ska kunna användas som en enhet att upprepa, måste den abstraheras på en högre nivå.

(Steffe, 2010)

Vilka enheter känner eleven till?

Hur tänker de när de ska lösa mätuppgifter där måttenheter är angivna ?

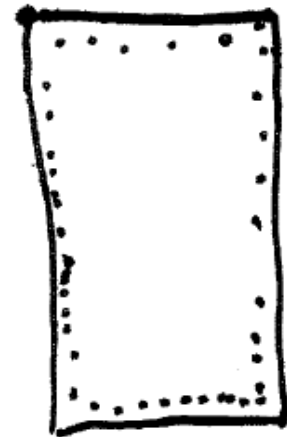
Kritiska punkter?

Vilken typ av uppgifter hjälper eleven att generalisera enhetsbegrepp för olika dimensioner?

Nivåer av förståelse

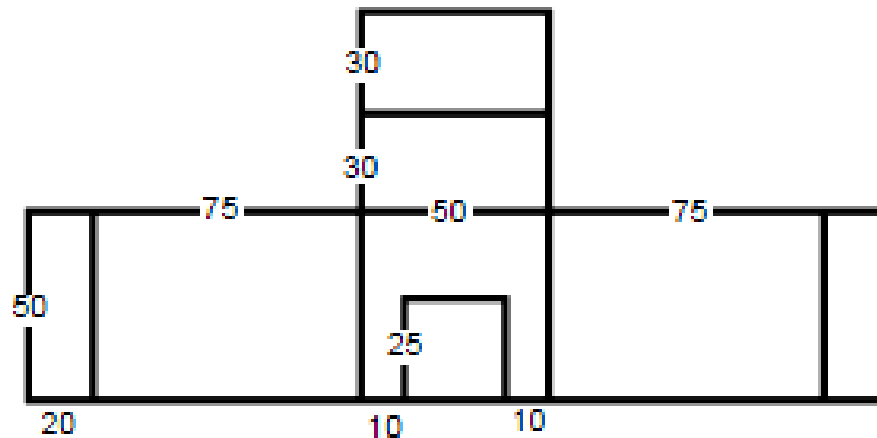
Eleven:

- gör grova jämförelser och gissar längder
- har insett att mätning hör ihop med att räkna enheter, men saknar ett-till-ett – korrespondens mellan enhet och upprepningar



- kan upprepa enheten till sekvenser, men enbart i en riktning, t ex en sida på en rektangel. Tappar bort sig när linjen byter riktning.
- klarar att upprepa enheten längs linjer som byter riktning flera gånger. Hanterar sekvenser av enheter. Resonerar om mätning utan perceptuellt stöd.

Battista (2007)



Resonera om längd

Utan mått: eleven

1. drar slutsatser utifrån hur föremål ser ut och tänker holistiskt om längd. Fokuserar på hela former, inte delar. Gör direkta och indirekta jämförelser.

2. delar upp objekt systematiskt för att jämföra längder, inledningsvis rent konkret eller genom att rita. Uppdelningarna jämförs visuellt eller i tanken.

3. jämför sidlängder genom att förflytta, vrida och vända objekt.

Med mått: eleven

1. räknar "enheter" utan ett-till-ett – korrespondens.
2. börjar upprepa en "enhet" längs ett objekt eller sträcka, men överlappar / lämnar mellanrum. Blandar eventuellt olika enheter.
3. förstår innebörden i begreppet enhet och samordnar varje enhet med föregående. Undviker mellanrum, överlappningar. Blandar inte längdenheter.
4. bestämmer mått utan att explicit upprepa varje enhet. Kan bestämma andra längder utifrån redan kända mått.
5. drar numeriska slutsatser om längder utan att upprepa enheter. Drar slutsatser om mått utifrån egenskaper hos geometriska former.

- Mätning är en komplicerad process där begrepp och färdigheter utvecklas långsamt över tid
- I inledande informella aktiviteter för innebörd och egenskaper hos begreppet *längd* fastställas och förståelse för begrepp som längre, kortare, och lika långa utvecklas, liksom strategier för direkt jämförelse
- Vikten av att eleverna löser verkliga mätproblem betonas. Genom att de sammanfogar enheter och grupper av enheter utvecklas mätfärdigheter och förståelse för begrepp
- Undervisningen ska göra det möjligt att upptäcka sambandet mellan att använda konkreta enheter, som centikuber, och att använda linjal.

För undervisningen

- Låt eleverna jämföra storlek, t ex att hitta föremål i klassrummet som är längre än den egna underarmen.
- Engagera eleverna i aktiviteter som kopplar samman antal och längd. Låt dem mäta både med t ex centikuber och vanliga linjaler.
- Undersök idén om upprepning av en enhet längs en rät linje och jämför måttet med linjal. Fokusera på linjalens nollpunkt och att linjalen anger längder och inte enskilda tal.
- Låt eleverna bygga egna linjaler av t ex centikuber, det hjälper dem att koppla samman sina erfarenheter med den matematiska idén. Uppmärksamma att linjalens märkning anger ackumulerade avstånd.
- Uppmärksamma eleverna på behovet av standardenheter.
- Ge eleverna erfarenheter som visar på relationen mellan enhetens storlek och det antal som behövs för att täcka en avgränsad utsträckning.
- Låt eleverna använda olika mätverktyg.

Lägg upp undervisningen i sekvenser.

Utgå från laborativa aktiviteter där eleverna

1. gör direkta jämförelser
2. gör indirekta jämförelser
3. mäter med icke-standardiserade enheter
4. mäter med standardiserade enheter
5. mäter med linjal

Betona transitiva resonemang och ackumulering av avstånd.
Lägg mindre tonvikt på fysiska mätprocedurer.