



Matematiksvårigheter i ett brett perspektiv på lärande

Ljungby 2009 – 02 - 03

Görel Sterner, Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM)

gorel.sterner@ncm.gu.se

Om det inte är dyskalkyli – vad är det då?

(Gunnar Sjöberg, 2006)

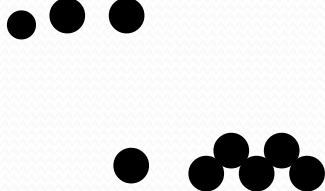

- Underskott av matematikundervisning
- Tidstjuvar
- Lektioners början och slut
- Enskilda elevers låga arbetsinsats i skolan
- Enskilda elevers låga arbetsinsats hemma
- Relationer mellan lärare och elev
- Gruppstorlek och arbetsro



Räkneprinciper

- Abstraktionsprincipen
- Ett – till – ett principen
- Principen om godtycklig ordning
- Principen om bestämda räkneord
- Kardinaltalsprincipen

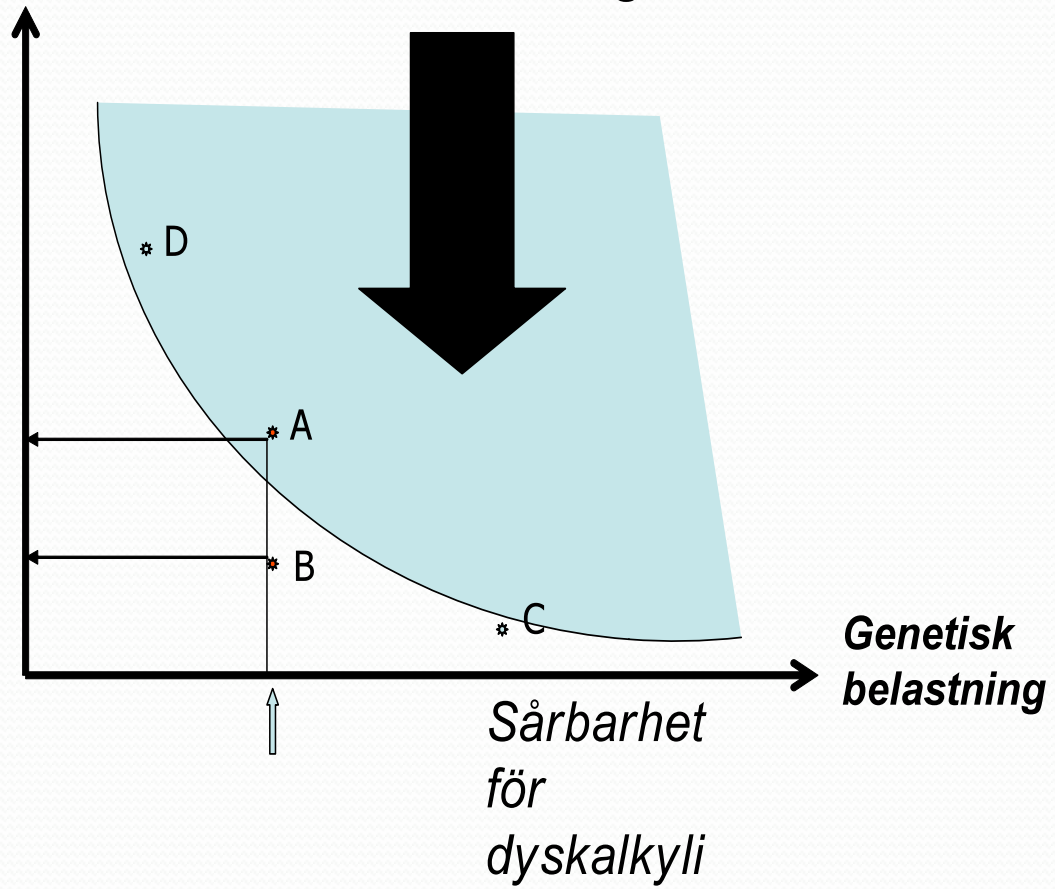
Arbetsminnets kapacitet

	1	2	3	4
Kognitiv representation		Verbalt tal-system, räkneord	Matematiskt symbolsyst. 13, 14, 15...	Mental tallinje (ordningstal)  spatial bild
Hjärnområde	bi-parietal	vänster prefrontal	bi-occipetal	bi-parietal
Förmåga	mängdbedömn. approximation jämförelser	verbalt räknande, räknestrat. talfakta	skrivna beräkn. udda/jämnt	approximativa beräkningar, aritmetiskt tänkande
	Spädbarn	Förskoletid	Tidiga skolår	

(Aster och Shalev, 2007)

**Miljö-
belastning**

Räknesvårigheter



**Genetisk
belastning**

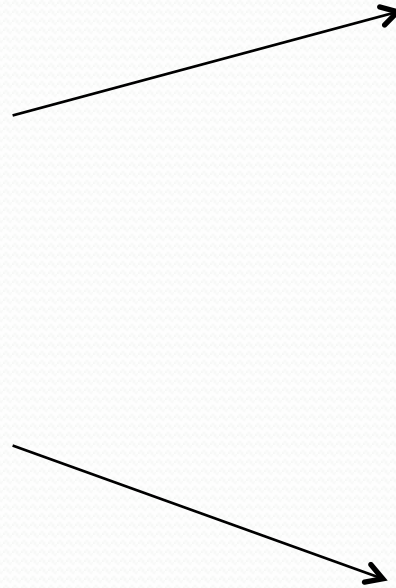
*Sårbarhet
för
dyskalkyli*

Räknesvårigheter och lässvårigheter

- Allmän kognitiv förmåga
- Arbetsminne
- Automatisering
- Regelrigiditet
- ADHD
- Fonologisk förmåga

Läsning

Matematik

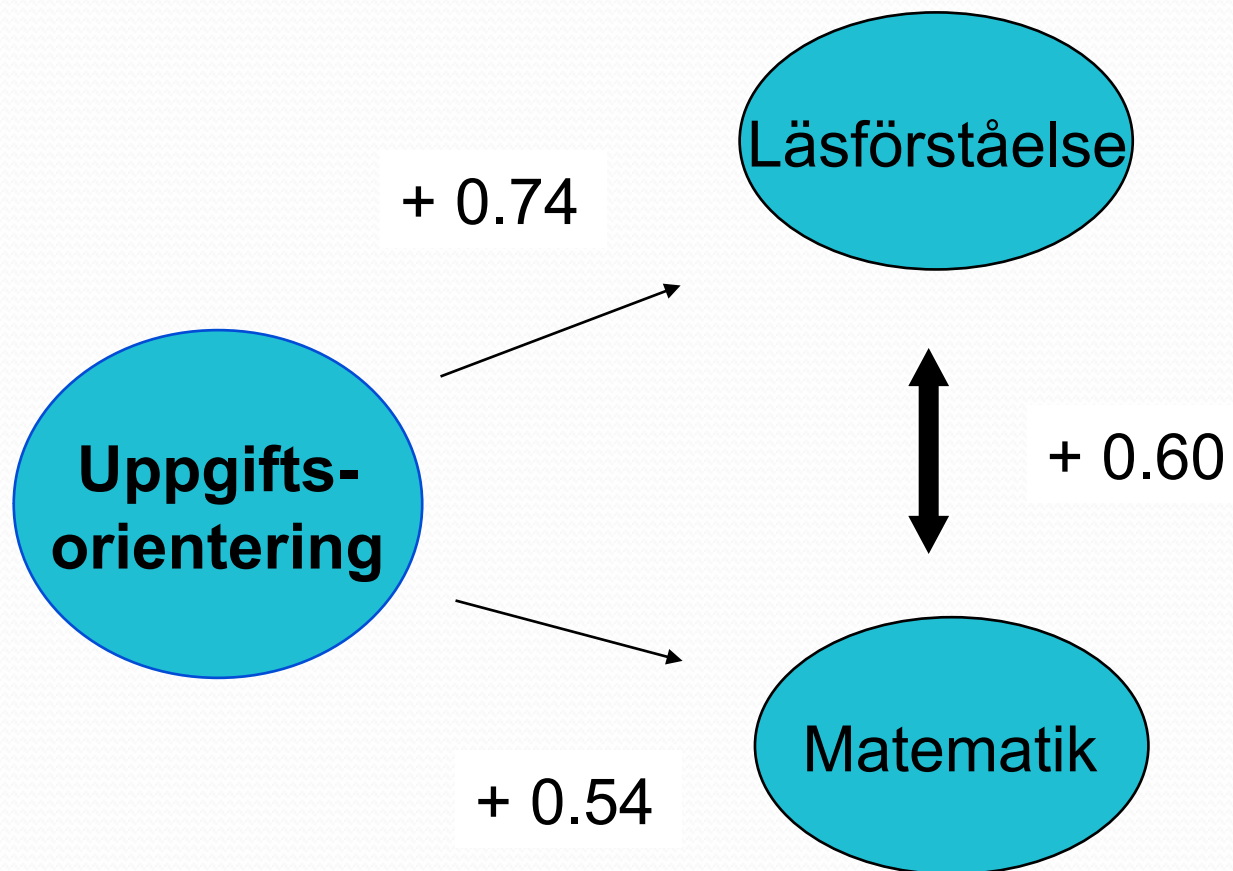


Matematikord – jämförelseord

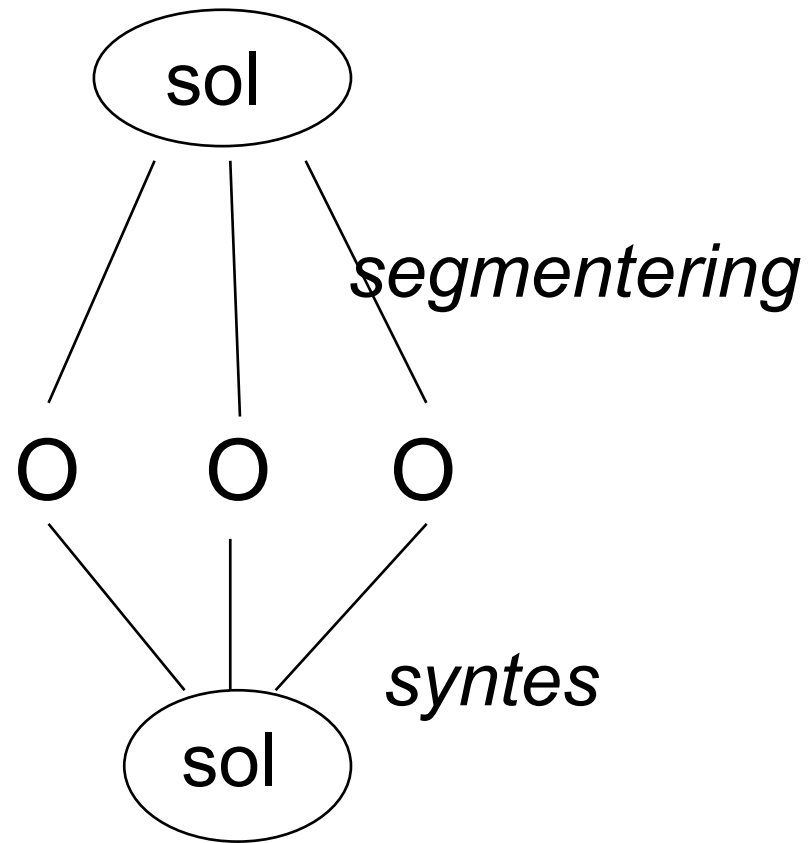
- Storlek: stor, större, störst liten, mindre, minst
- Antal: många, fler, flest få, färre, ?
- Kvantitet: mycket, mer, mest litet, mindre, minst
- Massa: tung, tyngre, tyngst lätt, lättare, lättast
- Längd: lång, längre, längst kort, kortare, kortast
- Höjd: hög, högre, högst låg, lägre, lägst
- Bredd: bred, bredare, bredast smal, smalare, smalast
- Tjocklek: tjock, tjockare, tjockast tunn, tunnare, tunnast
- Ålder: gammal, äldre, äldst ung, yngre, yngst



Uppgiftsorientering, läsförståelse och matematik



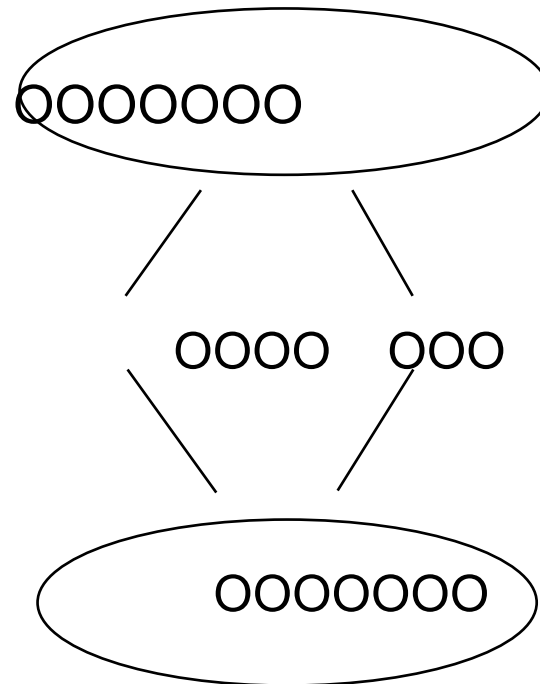
Fonologisk medvetenhet

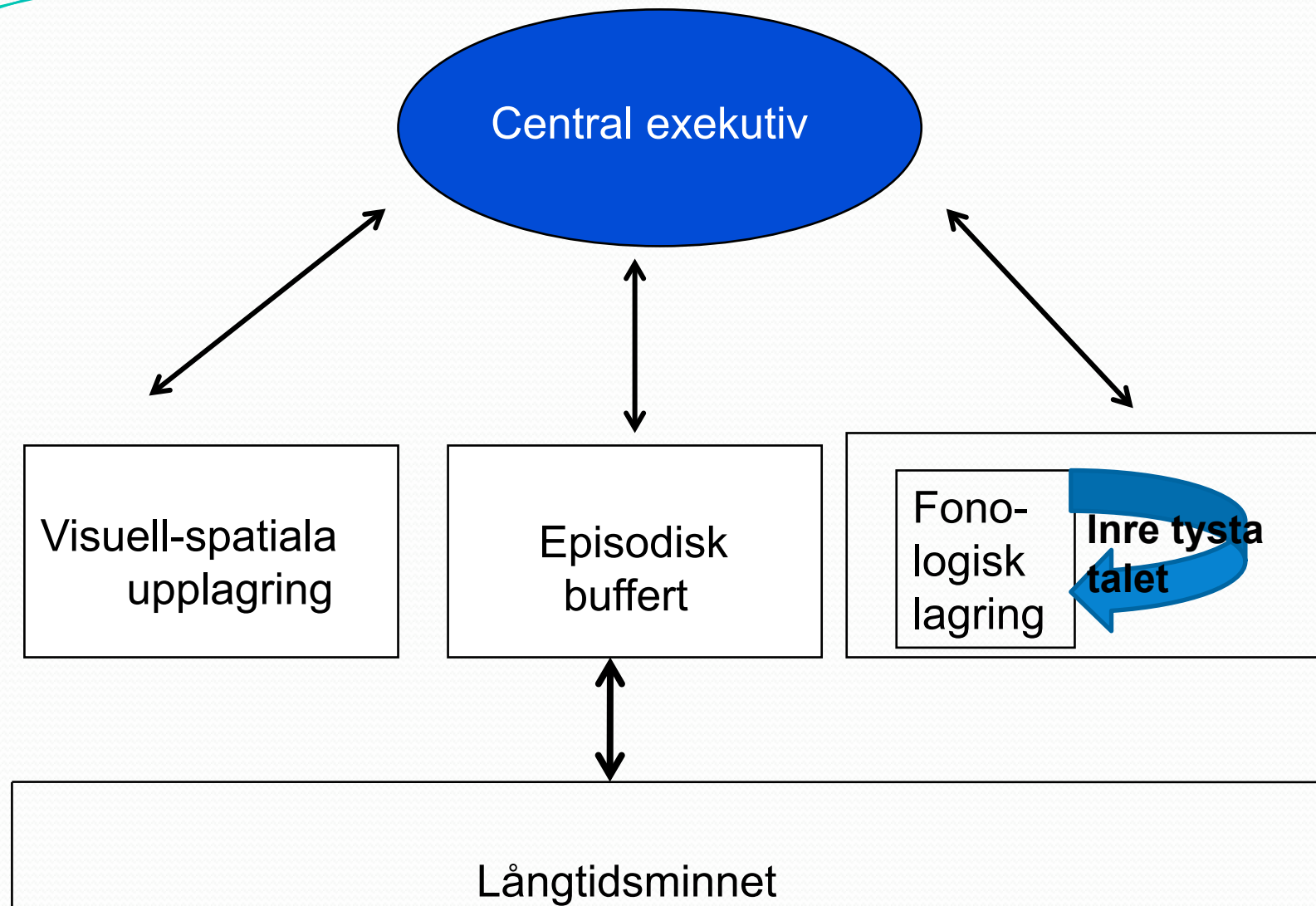


Helhet – del – del

Helhet – del - del

Talet 7







”Hålla kvar, bearbeta och uppdatera information i arbetsminnet samt stänga ute irrelevant information.”

Läsning

Skrivning

Matematik

Följa instruktioner

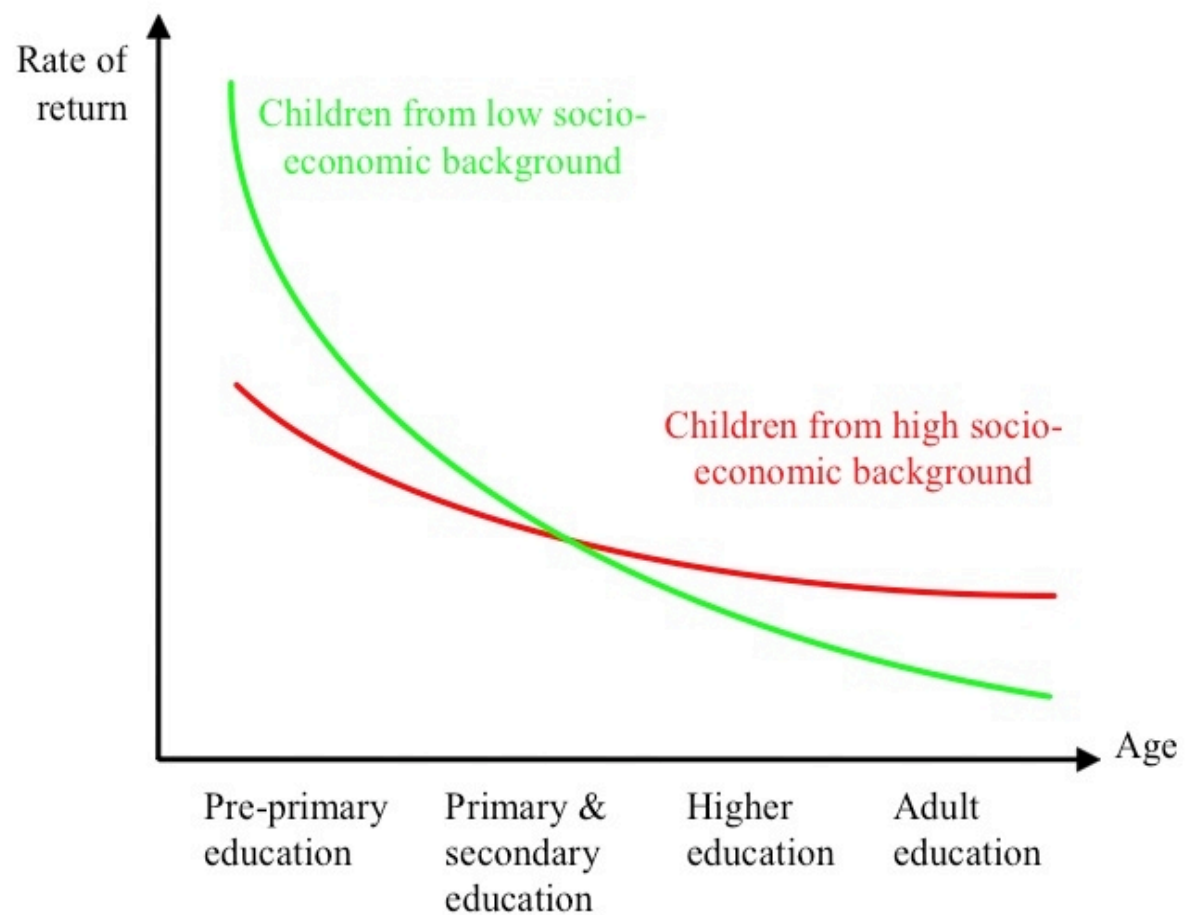
Klassrumssituationer

- ouppmärksamma, distraherade, dagdrömmar
- tillbakadragna i klassrumsdiskussioner
- svårt att övervaka och kontrollera sitt arbete
- svårt att komma ihåg och följa instruktioner
- dålig uthållighet
- presterar under sin förmåga, lär sig långsamt

Exempel på svårigheter i matematik

- Talfakta, enkla räkneoperationer
- Uppskattning, tals storleksförhållanden
- Ordproblem
- Addition och subtraktion med flersiffriga tal
- Räkneprinciper, räknelagar
- Talmönster
- Klockan

Figure 1: Returns to investment at different levels of lifelong learning



Source: Cunha et al (2006) adapted by EENEE⁸

Undervisningens fyra faser

- Den laborativa muntliga fasen
- Den representativa fasen
- Den abstrakta fasen
- En fas för att befästa, återkoppla och att skapa samband som grund för fortsatt lärande

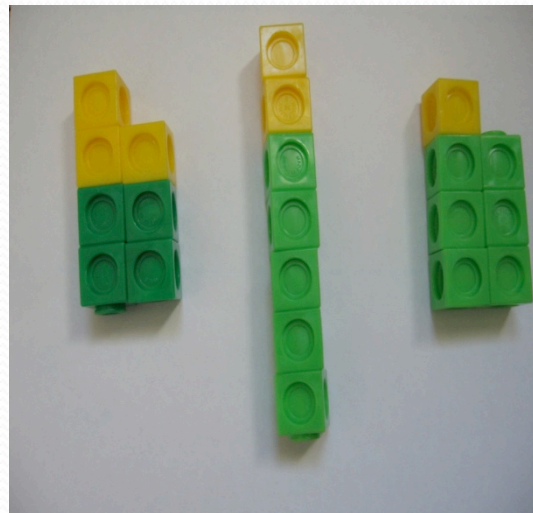
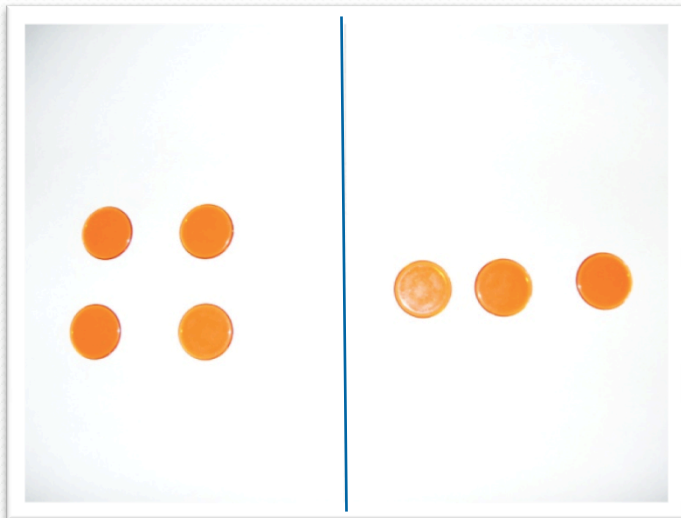
(Minskoff & Allsopp, 2006; Swanson, 2007)

Laborativa fasen

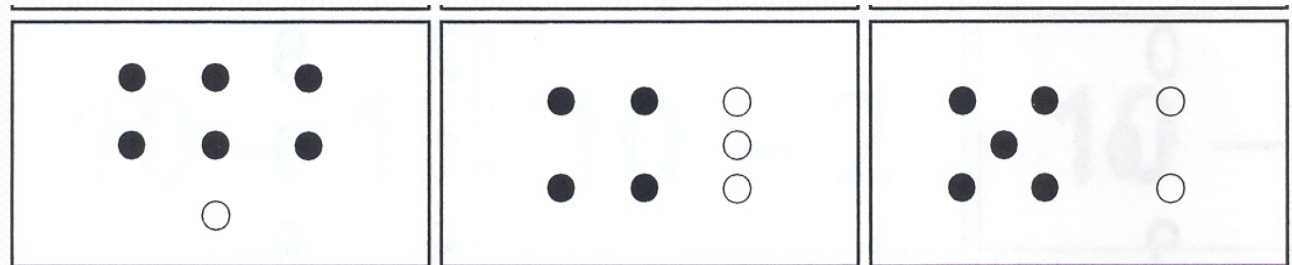
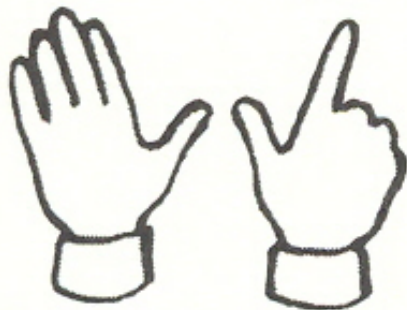
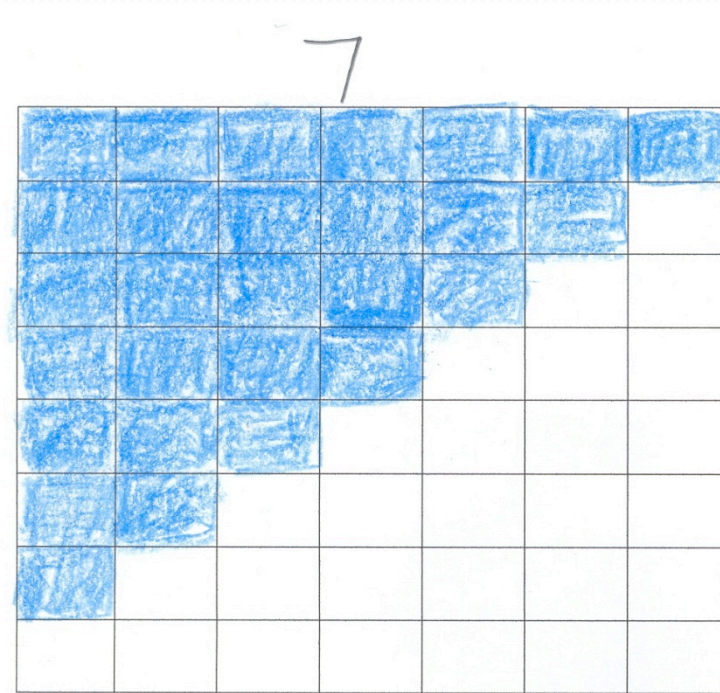
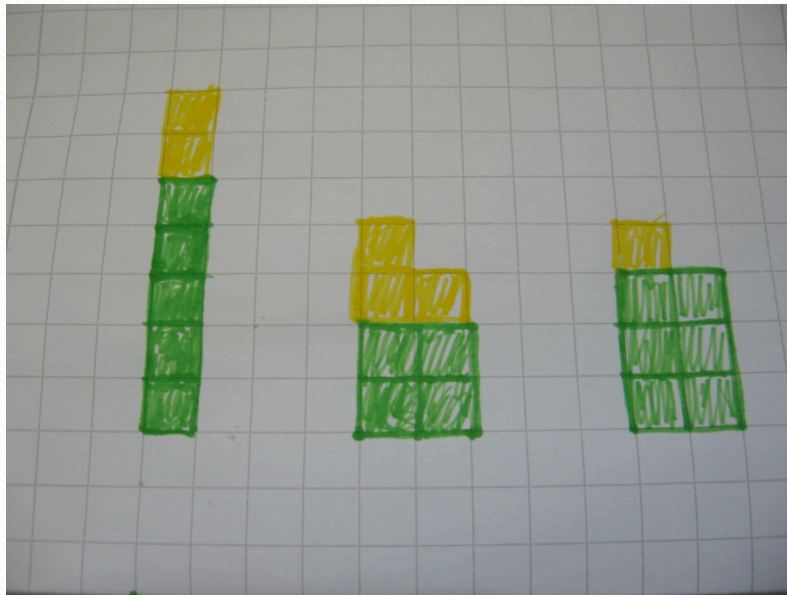
Vilka kombinationer är möjliga?

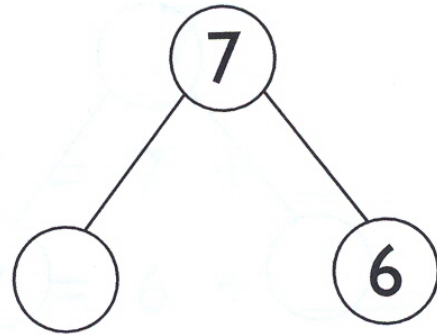
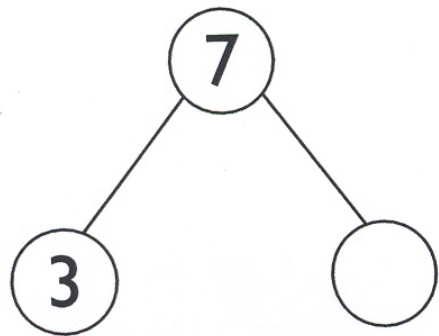
Hur många kombinationer finns det?

Hur kan du beskriva det aktuella mönstret?



Representativa fasen





$$7 = 5 + \underline{\quad}$$

Framsida

$$7 = \underline{\quad} + 2$$

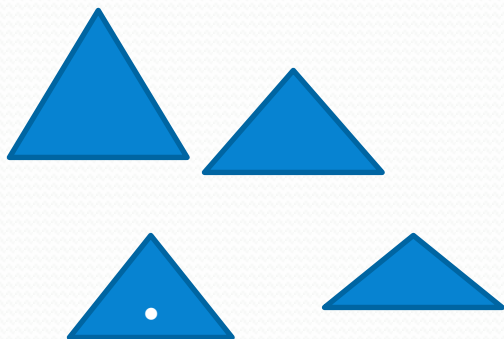
Baksida

$$\begin{array}{r} \underline{7} \\ 7 = 7 + \underline{\quad} \\ 7 = 6 + \underline{\quad} \\ 7 = 5 + \underline{\quad} \\ 7 = 4 + \underline{\quad} \\ 7 = 3 + \underline{\quad} \\ 7 = 2 + \underline{\quad} \\ 7 = 1 + \underline{\quad} \\ 7 = 0 + \underline{\quad} \end{array}$$

Talfamiljer

$$3+4=7 \quad 4+3=7$$

$$7-3=4 \quad 7-4=3$$

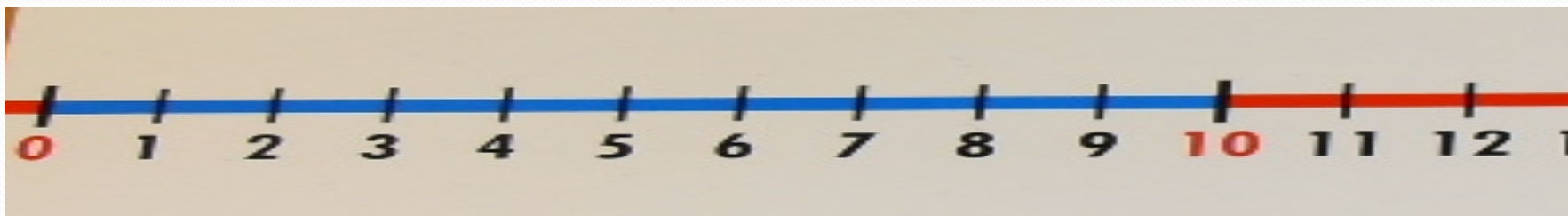


ett, två, tre, fyra

Räkneord

1	2	3	4
+	-	.	÷

Matematiska symboler



Tallinjen



Ramsräkning framåt och bakåt
Talens storleksordning
Talens grannar, nästan grannar
Positionssystemet, ental och tiotal

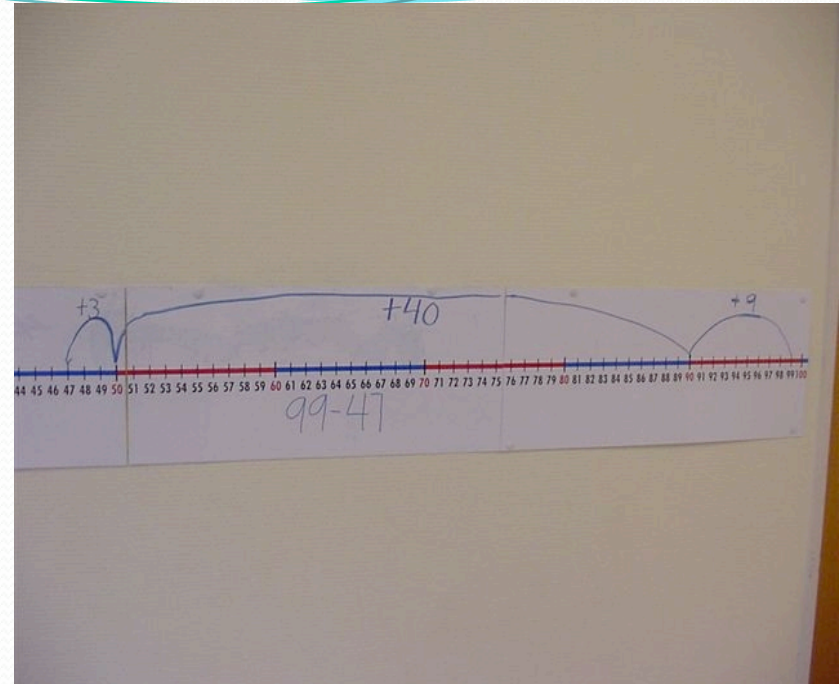
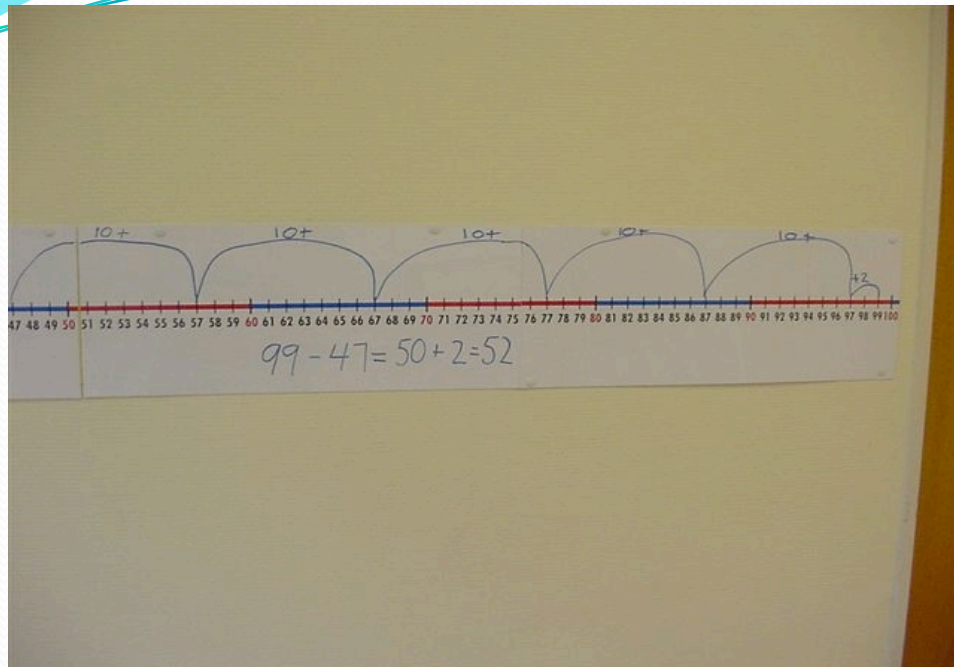
- Räkna ofta i kör framåt och bakåt på räkneramsan. Det hjälper eleven att befästa mönstret i talföljden.
- Räkna framåt och bakåt i steg om två, fem och tio från 0 respektive 100.
- Räkna framåt och bakåt i steg om två, fem och tio från vilket tal som helst (70, 23, 82...).

- *Skriv* aktuella talföljder.

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19

- Arbeta med talföljder med hjälp av miniräknaren. Eleven säger vilket tal som följer på det aktuella talet och kontrollerar med den programmerade miniräknaren.





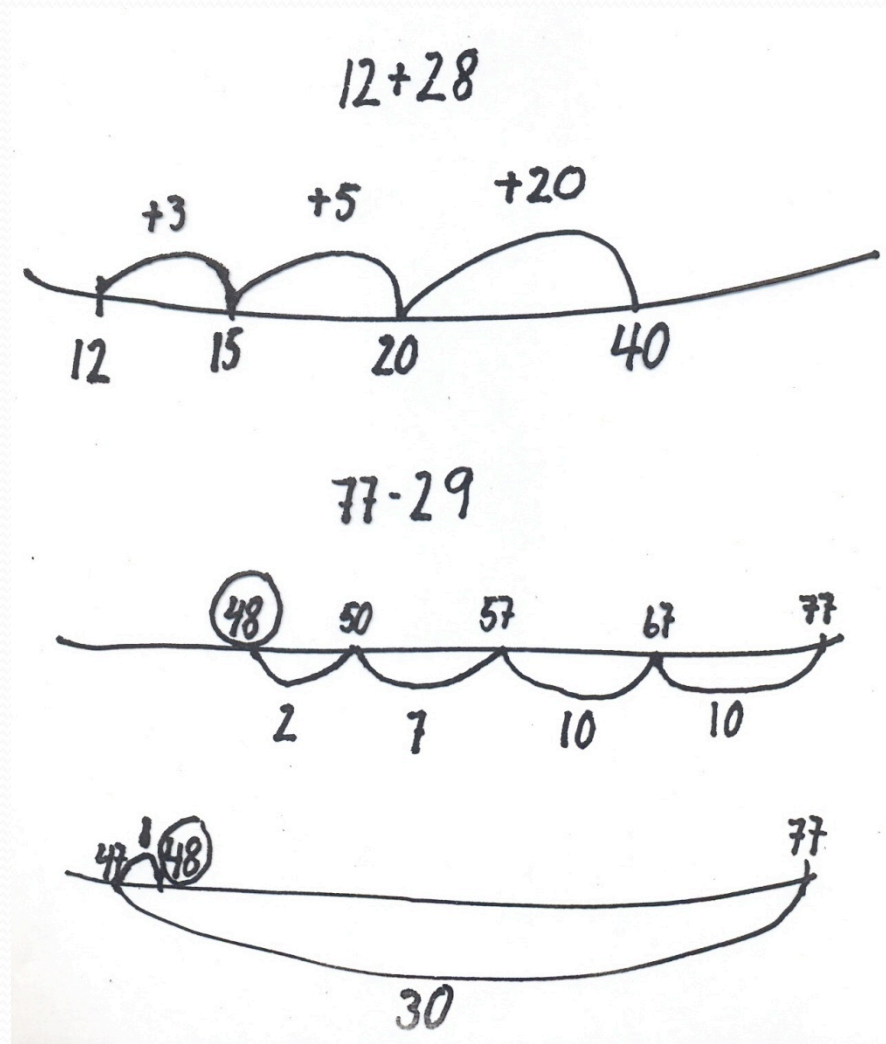
$$99 - 47 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 2 = 52$$

$$99 - 47 = 3 + 40 + 9 = 52$$

$$99 - 47 = 100 - 48 = 2 + 50$$

Jämför: $102 - 98 =$
 $102 - 3 =$

Tomma tallinjen



Förstå och använda tal – *en handbok*

Handbok med förslag och råd till lärare för att kartlägga, analysera och åtgärda elevers svårigheter och begreppsliga missuppfattningar inom området tal och räkning

Handboken med åtföljande test har utvecklats genom ett samarbete mellan NCM, NSMO och Alistair McIntosh



Innehållet i handboken bygger på forskning och beprövad erfarenhet.

- *Ett stöd för att visa på vidden och progressionen i arbetet med tal i grundskolan.*
- *En hjälp för lärare att kartlägga, analysera och åtgärda missuppfattningar och svårigheter som eleven ger uttryck för.*
- *Ett stöd för läraren att undvika att skapa missuppfattningar genom sin undervisning. Förebyggande insatser är centrala!*

Generella ståndpunkter

- Alla elever möter svårigheter och skapar missuppfattningar när de lär sig matematik. en del gör det mera sällan, andra gör det allt för ofta.
- Fel som beror på dålig begreppsförståelse är sällan slumpartade. De är resultatet av att eleven försöker förstå och använda logik som inte passar i situationen.
- Missuppfattningar grundar sig ofta i bristande erfarenheter eller olämplig undervisning.
- Det ska finnas utrymme för att memorera viktiga fakta, till exempel grundläggande multiplikationsfakta, men skall då bygga på god taluppfattning och kunskap om sambanden till andra fakta som gör det möjligt att härleda fakta som glömts bort eller inte framträder snabbt och säkert.

Taluppfattning, f-klassen – årskurs 9

- *Översiktstest och utvärderingsschema*
- *Stöd för tolkning av enskilda test på respektive nivå*
- *Stöd för uppföljande intervjuer*
- *Exempel på vanliga missuppfattningar och svårigheter*
- *Bakgrunden till problemen*
- *Allmänna och specifika förslag för undervisningen.*

Tre Stråk med 22 områden

Talförståelse

Räkneord

Räkna

Positionsvärde

Decimaltal

Bråk

Relationer mellan bråk, procent och decimaltal

Negativa tal

Skattning

Förståelse för operationer med tal

*Representationer – textuppgifter/ symboler –
addition och subtraktion,*

*Representationer – textuppgifter/symboler -
multiplikation och division,*

Multiplikation med tal som är mindre än ett

Användning av parenteser

Välja relevant beräkningssätt.



Göra beräkningar

Grundläggande tabellkunskaper, addition, subtraktion

Grundläggande tabellkunskaper, multiplikation och division

Generalisering av grundläggande tabellkunskaper

Huvudräkning, addition och subtraktion

Huvudräkning, multiplikation och division

Skriftliga räknemetoder, addition och subtraktion

Skriftliga räknemetoder, multiplikation och division

Användning av miniräknare

Test 3, lärarversion

Instruktion

- Inled med huvudräkningsuppgifterna, nr 18–26. Läs exemplen men skriv inga tal. Eleverna skriver enbart svaren. Tillåt upp till 10 sek betänketid för var och en av de uppgifterna.
- Läs uppgifterna för klassen eller den/de elever som behöver hjälp. Undvik att läsa tal eller att förklara.
- Betona ordet “ungefär” i uppgift 11. Förklara att vi inte söker ett exakt svar.
- Siffran till höger inom parentes anger det kapitel i delen Tal och räkning där problemtypen behandlas vidare.
- Grön färg anger korrekt svar.

1 Fortsätt talmönstret. (2)
26, 27, 28, **29, 30, 31**

2 Fortsätt talmönstret. (2)
54, 53, 52, **51, 50, 49**

3 Fortsätt talmönstret. (2)
96, 97, 98, **99, 100, 101**

4 Fortsätt talmönstret. (2)
3, 5, 7, **9, 11, 13**

5 Fortsätt talmönstret. (2)
52, 54, 56, **58, 60, 62**

6 Fortsätt talmönstret. (2)
5, 10, 15, **20, 25, 30**

- 8 Använd alla de fyra siffrorna 4, 7, 3, 9 för att göra två tal mellan femtio och etthundra. (3)

Antingen 74 och 93 eller 73 och 94.

- 9 Vilket tal kommer närmast före sexhundra, när man räknar? (3)

599

- 10 Oscar föddes 2007. Vilket år fyller han hundra år? (3)

2107

- 11** Ungefär vilket tal pekar pilen på? (8)



Vilket tal som helst mellan 60 och 80.

- 12** Stig har femton kulor och ger två till Kalle. Gör en ring om det räkneexempel som passar till räknehändelsen. (9)

$2 + 15$

$2 - 15$

$15 + 2$

$15 - 2$

23 $120 - 50$ Svar: **70** (16)

24 $3 + 8 + 7$ Svar: **18** (18)

25 $13 + 18$ Svar: **31** (18)

26 Dubbelt så mycket som 15
Svar: **30** (19)

Lös följande uppgifter skriftligt.

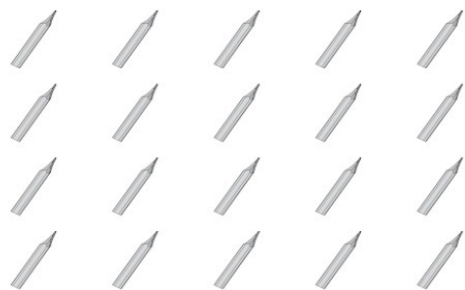
27 $32 + 26$ Svar: **58** (20)

Sammanställning översiktstest Taluppfattning nivå 3

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Karin	/	/	/	/	/	/	/	/	/		/	/	/	/	0		0	/	/
Ebba	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/		/	/	0
Viktor	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/		/		/	/
Gustav	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/		/	0	/	/
Lina	/	/	/	/	/	/	/	0	/	0	/	/	/	/	/	/	/	/	/
Nadja	/	/	/	/	/	/	/	0	/	/	/	/		/		0	/	/	/
Senad	/	/	/	0	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	0	/		/	/
		16	16	14	14	15	16	11	15	11	16	12	13	16					
Amanda	¹⁰⁰ /	¹⁰⁰ /	¹⁰⁰ /	⁸⁸ /	⁸⁸ /	⁹⁴ /	¹⁰⁰ /	⁶⁹ 0	⁹⁴ /	⁶⁹ /	¹⁰⁰ /	⁷⁵ /	⁸¹ 0	¹⁰⁰ /	³¹	⁶² /	⁷⁵ /	¹⁰⁰ /	⁹⁴ /
Antal korrekta svar I %	16													5	³¹ _{10.2}	12	16	^{15.1} _{14.2}	
Huvudsektion	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	8	9	9	9	10	10	10	14	14

- 15 Skriv en multiplikation som visar hur många pennor det finns på bilden. (10)



$5 \cdot 4 = 20$ eller
 $4 \cdot 5 = 20$

- 16 Olle har lagt tegelstenar i högar. Hur många högar med 3 i varje har han lagt? (10)



4

- 17 Det står fem godisskålar i skåpet. I varje skål ligger femton karameller. Vilket räkneexempel berättar om hur många karameller det finns? Gör en ring om det svar du tycker stämmer. (10)

$5 + 15$

$15 - 5$

$5 \cdot 15$

$5 + 5 + 5 + 5 + 5$

Översiktstesten leder till frågor

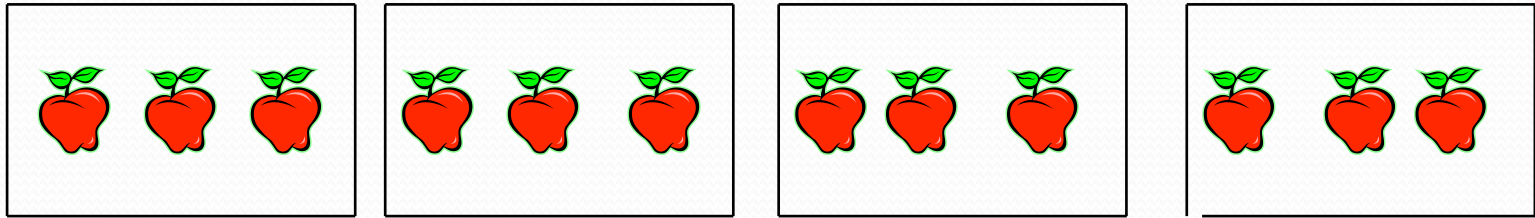
- Varför gör eleven särskilda misstag?
- Vilka bakomliggande faktorer finns i form av missuppfattningar eller bristande kunskaper?
- Vilken typ av åtgärder behöver eleven?
- Vad leder detta till för min undervisning?

Exempel på svårigheter och missuppfattningar

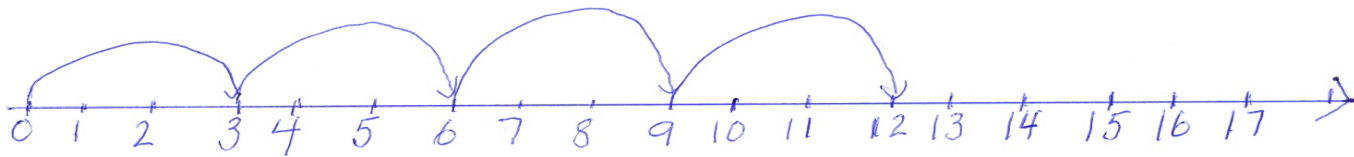
- eleven uppfattar inte en grupp av objekt som en enhet (*jfr ett tiotal, ett hundratal etc.*)
- känner inte till vad multiplikationstecknet betyder
- eleven uppfattar inte att multiplikation representerar situationer där lika stora mängder adderas successivt
- eleven har en begränsad uppfattning av multiplikation, enbart som upprepad addition
- multiplikation leder alltid till något större och division till något mindre

Bakgrund

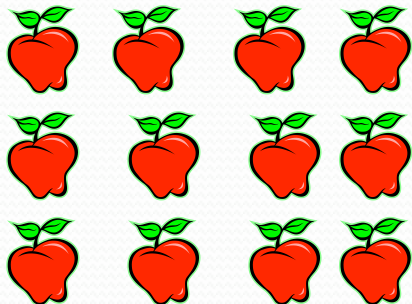
Multiplikation presenteras ofta inledningsvis som upprepad addition.
"fyra korgar med tre äpplen i varje korg"



Bilden kan också representeras på en tallinje



Två tal som multipliceras representerar två oberoende dimensioner



Föreställningar om multiplikationens tvådimensionella karaktär kan fördjupas och utvidgas till förståelse för:

- multiplikation med tal i bråkform och decimalform
- den kommutativa, associativa och distributiva lagen för multiplikation
- multiplikationens relation till areabegreppet
- huvudräkning och algoritmräkning





Allmänna råd

Betona den rektangulära rutnätsstrukturen som en representation för multiplikation så ofta som möjligt och synliggör sådana mönster i omgivningen.

Låt eleverna använda och röra sig mellan olika representationer för multiplikation: berättelser, bilder, diagram, talat språk och skrivet språk.

Introducera division med hjälp av laborativa aktiviteter.

Arbeta muntligt och fokusera på språket kopplat till division.

Se till att båda aspekterna av division representeras i olika aktiviteter (innehållsdivision och delningsdivision).

Specifika råd

- Uppmärksamma hur mönster i tak, på fönster och skåp osv. är ordnade i rader och kolumner. Hur många rader? Hur många kolumner?
- Rita en bild av $5 \cdot 3$.
- Hitta på en berättelse till $7 \cdot 6$.
- *Här är fyra pappersremсор. Var och en är 6 cm långa.*
Skriv detta som en multiplikation.
Skriv det som en division.
Hitta på en berättelse kopplat till multiplikation.
Hitta på en berättelse kopplat till division.
- *Jag delade ut 12 bullar till tre kompisar.*
Rita en bild. Skriv en matteuppgift.

föremål

bild

symboler

ord

samband

föremål

symboler

ord

bild


Tanketavlan – användningsområden

- Vid introduktion av ett begrepp
- För att låta eleven arbeta med ett begrepp i olika representationer
- För att följa upp undervisningens effekter
- För att lyfta fram och synliggöra samband, tex mellan multiplikation och division, tal i bråkform och tal i decimalform osv.



Exempel på hur handboken kan användas

- Upptäcka och analysera hur elever tänker, vilka svårigheter och missuppfattningar som kan finnas.
- Få hjälp att planera innehållet inom ett eller flera områden.
- Kontrollera hur väl en lärobok täcker det aktuella området.
- Hitta goda exempel på aktiviteter och uppgifter inom olika områden av taluppfattning.

- 
- Få hjälp med vilken utgångspunkt du ska ha i undervisningen, för att undvika de typer av missuppfattningar och svårigheter som elever ofta visat sig få inom det aktuella området.
 - Analysera dina elevers kunnande och hitta de områden där de har svårigheter.
 - Analysera elevernas kunskapsutveckling och effektiviteten i undervisningen.
 - Utgöra en bas för regelbunden reflektion över din undervisning, bakgrundskunskap och vägar till undervisning och lärande i matematik.