

Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?

Elisabeth Rystedt & Lena Trygg

A good vehicle, however, does not guarantee the right destination

Liping Ma

Nationellt centrum för matematikutbildning



GÖTEBORGS
UNIVERSITET

Typografi: Åsa Dahlberg

Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM
Göteborgs universitet
Box 160
405 30 Göteborg

Beställning:
Fax: 031 786 22 00
e-post: bestallning@ncm.gu.se
webb: ncm.gu.se/bestallning

© 2010 NCM och författarna
ISBN: 978-91-85143-16-0
Upplaga: 1:1
Tryck: Litorapid AB, Göteborg, 2010

Innehåll

Förord	1
Inledning	3
<i>Matematik – en abstrakt och generell vetenskap?</i>	3
<i>Bakgrund</i>	4
<i>Förtydliganden och avgränsningar</i>	5
<i>Metod</i>	7
<i>Kunskap och lärande</i>	7
Resultat av litteraturgenomgång	9
<i>Laborativa matematikmaterial</i>	9
<i>Historisk tillbakablick</i>	15
<i>Laborativt arbetssätt i matematik</i>	19
<i>Översikter</i>	20
<i>Matematik måste tillföras och / eller lyftas fram</i>	23
<i>Representationer</i>	24
<i>Elevers dokumentation</i>	31
<i>Analys och bedömning</i>	33
<i>Lärarens roll</i>	35
<i>Laborativ matematikundervisning</i>	40
<i>Organisation av laborativa material</i>	54
<i>Laborativt arbete i andra ämne</i>	55
Sammanfattning	57
Kommentarer	59
Referenser	66

Elisabeth Rystedt har en bakgrund som mellanstadielärare och har därefter kompletterat med en magisterexamen. Hon har även arbetat som 7–9-lärare i matematik och svenska och har sammanlagt drygt 20 års erfarenhet som lärare. Hon var en av Skolverkets utbildningsinspektörer i den nationella kvalitetsgranskningen *Lusten att lära* med särskild inriktning mot matematik. Numera är hon anställd på Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, vid Göteborgs universitet, där hon bl a är projektledare för den nationella satsningen på Matematikutvecklare som genomförs på uppdrag av Skolverket. Hon har ett särskilt intresse för kompetensutvecklingsfrågor samt laborativ matematikundervisning kopplat till språkutveckling.

Lena Trygg är textil- och matematiklärare och har under 15 år undervisat i textilslöjd (åk 1–9) och i matematik (åk 6–9). Under sin tid som lärare byggde hon upp en matematiksal för elever i åk 6–9. När hon sedan arbetade som lärarutbildare ökade hennes intresse för laborativ matematikundervisning ytterligare. Hon är sedan år 2000 anställd på Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, i Göteborg där hon bl a ansvarar för NCM:s matematikverkstad, vilket innebär många möten med lärare och dessutom redaktörsuppgifter i såväl tryckta material som på webben. Hon ansvarar också för webbarbetet på Matematikutvecklare.se.

Förord

Vi märker ett påtagligt stort engagemang och ökande intresse för att utveckla skolans laborativa matematikundervisning. Orsakerna kan sökas på flera håll men ofta är det skolor som vill förbättra matematikundervisningen med hjälp av laborativa material och aktiviteter för att eleverna ska få ökad lust att lära matematik. Det är också tydligt att det i utvecklingsarbetet snabbt uppstår frågor av såväl didaktisk som organisatorisk karaktär. I nästa steg efterfrågar lärare och skolledare vilka erfarenheter som finns på andra håll och hur forskning kan stödja det fortsatta utvecklingsarbetet. Detta har gjort att det känts angeläget att ta fram en kunskapsöversikt som ger en bild av vilket kunnande som finns om laborativ matematikundervisning.

Vi som skrivit kunskapsöversikten har på olika sätt samlat på oss erfarenheter och kunnande om laborativ matematikundervisning genom att vi aktivt arbetat med kompetensutveckling om matematikverkstäder. Med begreppet matematikverkstad menar vi laborativ matematikundervisning i vid bemärkelse – oavsett om det handlar om arbete i det egna klassrummet, i särskilda rum eller med hjälp av matematikmaterial samlat i skåp och lådor eller förvarat i mobila vagnar.

Under åren har vi mött tusentals lärare på kurser, konferenser, föreläsningar, inspirationsdagar, workshops, studiedagar, mässor och vid studiebesök i NCM:s matematikverkstad. Vi har utvecklat webbsidor med information och inspiration, deltagit på biennaler och biennetter, anordnat kompetensutvecklingskurser på uppdrag av skolor, skolområden och kommuner, utarbetat en studiecirkel och genomfört studiecirkelledarkurser, medverkat på SMaLs sommarkurser, fungerat som rådgivare via mail och telefon och varit ett stöd för skolor som byggt matematikverkstäder på Skolforum. Vårt engagemang har också medfört samverkan med nordiska länder. I första hand NCM:s systerorganisationer Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen, NSMO i Norge och Resurscenter för matematik, naturvetenskap och teknik i skolan (Mattelandet) i Finland. Vid några tillfällen har vi även blivit inbjudna till att hålla kurser för nordiska lärare i London och Bryssel samt för lärare i Mexiko. Vi har sedan en tid tillbaka börjat följa den spännande utvecklingen kring laborativ matematikundervisning i Indien och vi uppfattar, enligt media, att intresset är starkt växande. I de indiska kursplanerna finns laborativa aktiviteter tydligt framskrivna för hela den grundläggande utbildningen och de ingår också i den obligatoriska examinationen.

Tillsammans har vi också skrivit boken *Matematikverkstad – en handledning för att bygga, använda och utveckla matematikverkstäder* och artiklar i Nämnaren. Tack vare NCM:s omfattande referensbibliotek har vi förmånen att kontinuerligt kunna hålla oss informerade om nyutkommen litteratur i ämnet.

Arbetet med denna översikt har varit givande och lärorikt. Vi har fått möjlighet att på djupet sätta oss in i studier som på olika sätt belyser laborativ matematikundervisning. Det hjälper oss vidare i vårt fortsatta arbete med matematikverkstäder. Stundtals har vi också känt en fläkt av historiens vingslag, för även om det handlar om elever på 2000-talet och hur de kan uppfatta sambandet mellan konkret och abstrakt inom matematikundervisningen, så vet vi att tankar om konkret – abstrakt fanns redan hos Aristoteles på 300-talet f Kr. Inget är således helt nytt under solen ...

Ett stort tack till doktorerna Jesper Boesen, Lars Mouwitz och Johan Häggström som bistått oss med vetenskaplig handledning både vid planering av översiktens uppläggning och under hela arbetsprocessen. De har gett oss värdefulla och kritiska synpunkter på såväl övergripande kunskapsteoretiska resonemang som frågor av detaljkaraktär när de nagelfarit våra texter. Jesper Boesen är även vetenskaplig ledare för samtliga kunskapsöversikter som NCM tar fram under 2009–2010.

Tack också till Karin Wallby och Berit Bergius på NCM som gett kloka och konstruktiva synpunkter, liksom doktorand Jonas Andersson som gått igenom texten i egenskap av matematikutvecklare. Ytterligare en kollega som vi fått ovärderlig hjälp av är vår bibliotekarie Marianne Dalemar som snabbt plockat fram efterfrågad litteratur från NCM:s fantastiska bibliotek, från digitala källor som vi själva inte har haft tillgång till eller i form av fjärrlån. Vi vill också särskilt nämna Lars Gustafsson som envist arbetat för att vi skulle börja använda EndNote – det hade vi aldrig klarat oss utan. Avslutningsvis vill vi tacka Anders Palm och Johan Börjesson, Skolverket samt alla de kollegor på NCM som deltog på ett för oss värdefullt seminarium i ett tidigt skede. Och naturligtvis ett särskilt tack till vår chef Bengt Johansson som med sin ousinliga entusiasm i en jämn och strid ström förser oss med nya förslag på aktuell forskningslitteratur.

Ansvaret för eventuella kvarvarande brister ska inte belastas våra kollegor, utan det får vi ta på oss själva.

Denna översikt är framtagen av Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, vid Göteborgs universitet med stöd av Myndigheten för skolutveckling (MSU:Dnr 2007:478).

Göteborg den 16 december 2009

Elisabeth Rystedt och Lena Trygg

Inledning

Det finns idag ett stort engagemang för att arbeta laborativt i matematikundervisningen och det är lätt att hitta laborativa aktiviteter i litteratur och på internet. Men det har i Sverige hittills inte funnits någon sammanställning som tagit ett samlat grepp om den forskning som har relevans för detta. Denna kunskapsöversikt har titeln *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* och här omfattar *vi* alla som är intresserade av vilket kunnande som finns om laborativ matematikundervisning och vilka konsekvenser det kan ge i den ordinarie undervisningen. Allra först, i detta inledande kapitel, berörs vad elevens lärande i matematik ska leda fram till. Därefter ges en bakgrund till översikten, förtydliganden görs, avgränsningar beskrivs och metod redovisas. Slutligen finns en kort genomgång av hur forskning lett fram till en förändrad syn på sambandet mellan lärande och utveckling.

Matematik – en abstrakt och generell vetenskap

Översikten behandlar laborativ matematikundervisning, men det betyder inte att lärandet ska stanna i det praktiska. Matematik är en abstrakt och generell vetenskap (Kiselman & Mouwitz, 2008). Matematiken har frigjort sig från det konkreta ursprunget, vilket är en förutsättning för att den ska kunna vara generell, dvs tillämpbar i många olika situationer (Nationalencyklopedin, 1996). Det är det som är matematikens styrka.

Redan ett naturligt tal är en abstraktion (Devlin, 1997). Att två äpplen och tre äpplen tillsammans är fem äpplen är exempel på en konkret situation, medan $2+3=5$ är en abstraktion som kan användas i alla situationer oavsett om det handlar om äpplen, motorcyklar eller planeter.

Att lära sig matematik kan därför ses som en process, där målet är att upptäcka och använda abstrakta strukturer och relationer (Devlin, 1997).

Bakgrund

Det är enkelt att finna exempel på det stora intresset för laborativ matematikundervisning. En internetsökning på "laborativ matematik" ger tiotusentals träffar hösten 2009 och 'manipulatives + math*' ger miljontals träffar. Sveriges kommuner har under 2009 haft möjlighet att söka medel från Skolverket för insatser som är avsedda att utveckla undervisningen i matematik (Utbildningsdepartementet, 2009). Laborativ matematik och matematikverkstäder var vanligt förekommande förslag på insatser. Vid en sökning i SIRIS framgår att i de 1088 ansökningar som inkom fanns sökorden "laborativ matematik" och/eller "matematikverkstad" i 385 ansökningar vilket innebär 35 procent av det totala antalet (Skolverket, 2009). Andelen projektbeskrivningar som på något sätt inbegriper laborativ matematikundervisning kan vara ännu större, eftersom vi inte gjort någon fördjupad sökning på uttryck som t ex praktisk matte, utomhusmatematik eller matteverkstad.

Vi möter ofta lärare som gärna "vittnar" om att laborativ matematikundervisning bidrar till att deras elever får ett ökat intresse för matematik och att det i sin tur gynnar lärandet. De menar att laborativa aktiviteter ger eleverna en mer positiv och vidare syn på matematiken, jämfört med när de enbart kommer i kontakt med matematiken i form av siffror och bokstäver i en lärobok. Många lärare har beskrivit för oss hur aktiviteter kan fungera som inspirerande introduktion och öka motivationen för matematikämnet samt göra färdighetsträningen mer varierad. Andra har berättat att de i sin egen undervisning ser fördelar med att elever får ta många sinnen i bruk. De menar att det kan befästa lärandet då det ger möjlighet att, i tanken, gå tillbaka till en minnesbild av "Hur var det nu vi gjorde?" och "Hur var det man kunde tänka?". En del lärare har lyft fram att ett laborativt arbetssätt också kan ge tillfällen för eleverna att, i matematikundervisningen, dra nytta av egna tidigare erfarenheter och även bidra till att eleverna kan få ökat omvärldskunnande. Ett stort antal lärare har på olika sätt uttryckt att begreppsutvecklingen kan stödjas när material och aktiviteter får fungera som en bro mellan konkreta handlingar och abstrakta symboler. Några har betonat att laborativa aktiviteter kan underlätta både elevens lärande och lärarens analys av elevens lärande. Samtidigt finns också lärare som ifrågasätter värdet av laborativ matematikundervisning utifrån argument om att det är tidsödande, kräver god skolekonomi och att elever tycker att det är barnsligt.

Lärarnas "vittnesmål" vilar oftast på deras egna erfarenheter och det är därför svårt att utifrån dem avgöra vilken betydelse laborativt arbetssätt generellt har för elevers matematiklärande. Det finns därför behov av att sammanställa kunskande som finns om laborativa läromedel och dess användning i matematikundervisningen. Det övergripande syftet med denna kunskapsöversikt är att bidra till att forskningsresultat och forskningsrelaterade texter blir mer tillgängliga så

att de kan ligga till grund för utveckling av skolans laborativa matematikundervisning. Av den anledningen görs också nedslag i delar av nationella styrdokument som har relevans för laborativ matematikundervisning – även om dessa dokument inte explicit refererar till forskningsstudier.

Förtydliganden och avgränsningar

Resultat från såväl nationella som internationella studier visar att skolan måste finna bättre former för att göra matematikundervisningen meningsfull så att fler elever både får ett ökat intresse och ett fördjupat kunnande i matematik.

Denna översikt är i första hand avsedd för lärare i grundskolan och motsvarande skolformer, men berör i väsentliga delar även gymnasieskolan.

I *Svenska Akademiens ordbok* beskrivs ordet *laboration* som ett utförande av experimentellt arbete och att det inom pedagogisk verksamhet kan ingå i undervisningen. I ett laborativt arbetssätt är eleven *aktiv*, vilket beskrivs med orden "framträder i handling, handlande, verkande, verksam" (Svenska Akademiens ordbok). Vi har i detta arbete valt att definiera *laborativ matematikundervisning* som en verksamhet där elever inte enbart deltar mentalt utan också arbetar praktiskt med material i undersökningar och aktiviteter som har ett specifikt undervisningssyfte. Det som utmärker laborativ matematikundervisning är att fler sinnen tas i bruk jämfört med enbart enskilt arbete i lärobok och att det finns en stark koppling mellan konkret och abstrakt. Med konkret menas i detta sammanhang sådant som kan uppfattas med våra fem sinnen, det vi kan se, ta på, flytta på med mera, medan abstrakt är sådant som vi endast kan uppfatta med våra tankar (Svenska Akademiens ordbok).

Laborativa läromedel kan ges en omfångsrik innebörd. Det kan vara fysiska material som är möjliga att hantera genom att tex plocka isär och sätta samman, vrida och vända, omfördela och ordna. Dessa är ofta tillverkade i trä eller plast men kan lika gärna vara material som tex kapsyler, färgpennor och papper. Laborativa läromedel kan också vara digitala som exempelvis grafräknare, datorprogram, webbaserade applikationer och interaktiva skrivtavlor. Forskare har redan under en tid lyft fram 'computer manipulatives' som en självklar utveckling och viktigt tillägg till, eller ersättning för, vissa slag av praktiska, konkreta, laborativa matematikmaterial (Clements, 1999; Moyer, Bolyard & Spikell, 2002). Förutom datorbaserat material framhålls även ett laborativt arbetssätt genom exempelvis moderna mobiltelefoner med GPS (Jönsson, et al., 2009), där ett innehåll kan vara matematisk problemlösning i geo-caching. Intresserade av digitala läromedel kan läsa mer i tex *Mathematics education and technology – rethinking the terrain* (Hoyles & Lagrange, 2009).

I denna kunskapsöversikt är fokus helt riktat mot fysiska och konkreta matematikmaterial. Begränsningen har varit nödvändig då det inom uppdraget inte funnits tidsutrymme att låta alla former av laborativa läromedel ingå. Vi hoppas att även en svensk kunskapsöversikt om digitala läromedel och deras roll för att utveckla laborativa arbetssätt i matematik kommer att tas fram.

Begreppen arbetssätt och arbetsformer hålls ibland åtskilda, men vår erfarenhet är att när lärare idag diskuterar arbetssätt så innefattas arbetsformer. Vi har därför valt att i den fortsatta texten låta arbetssätt även inbegripa arbetsformer.

En betydande del av de texter som ligger till grund för översikten är engelskspråkiga och de har sitt ursprung främst i USA, Storbritannien och Australien. En naturlig konsekvens med tanke på ämnesområdet är att det ofta förekommer uttryck som placerar eleverna åldersmässigt i de olika ländernas skolsystem. Vi har i så stor utsträckning som möjligt använt elevernas faktiska ålder eller motsvarande svenska skolbenämningar, även om de inte alltid har en exakt överensstämmelse. För den som vill ha mer precis information hänvisar vi till respektive originaltext.

Ur lärarsynpunkt är det vid laborativ matematikundervisning motiverat att se hur läromedel tas upp i nationella styrdokument. Läromedel berörs på ett generellt plan i Grundskoleförordningen (SFS 1994:1194). Där står att eleverna "skall ha tillgång till böcker, skrivmateriel, verktyg och andra hjälpmedel som behövs för en tidsenlig utbildning. Särskild vikt skall läggas vid att eleverna i undervisningen har tillgång till läromedel som täcker väsentliga delar av ett ämne eller en ämnesgrupp och som är ägnade att ge fasthet och sammanhang i studierna" (2 kap, 24 §). I både läroplanen för det obligatoriska skolväsendet, Lpo 94, och läroplanen för de frivilliga skolformerna, Lpf 94, framgår att rektor har ett särskilt ansvar för att eleverna får tillgång till läromedel av god kvalitet och annat stöd för att själva kunna söka och utveckla kunskaper (Skolverket, 1994a, 1994b).

Exempel på skrivningar om konkretiserande material finns bland annat i kursplanens bedömningsanvisningar som gäller hela grundskolan. Där framgår det att en viktig aspekt av kunnandet är elevens förmåga att "uttrycka sina tankar muntligt och skriftligt med hjälp av det matematiska symbolspråket och med stöd av konkret material och bilder" (Skolverket, 2009b, s 9). I Skolverkets kommentarer till mål som elever lägst ska ha uppnått i slutet av det tredje skolåret i ämnet matematik lyfts behovet av material fram vid ett flertal tillfällen (Skolverket, 2009b). I inledningen anges att konkretiserande material och bilder kan användas parallellt med matematiska symboler och begrepp för att utveckla ett alltmer abstrakt tänkande. Vidare framhålls också att eleverna ska kunna förklara vad de olika räknesätten står för och deras samband med varandra med hjälp av till exempel konkret material eller bilder.

Metod

Arbetet med kunskapsöversikten inleddes, utifrån vår mångåriga erfarenhet av ämnesområdet, med en sammanställning av tillgängliga, relevanta texter utgående från NCM:s nationella referensbibliotek och den digitala bibliotekskatalogen LIBRIS. Därefter gjordes sökningar i databaserna MathEduc och ERIC, på ord som 'manipulatives', 'laboratory', 'hands-on' och 'concrete', alltid tillsammans med 'mathematics', för att få fram relevanta artiklar. (MathEduc, Mathematics Education Database, är världens största tidskriftsdatabas inom ämnet matematikdidaktik. ERIC är världens största databas för utbildning och pedagogik. Den innehåller mer än en miljon sammanfattningar av rapporter och tidskriftsartiklar.) Denna sökning begränsades till matematikdidaktiska forskningstidskrifter vilka innehåller empirisk forskning och använder sig av en referee-process innan de accepterar artiklar för publicering samt är skrivna på engelska eller skandinaviska. De tidskrifter som mest noggrant gicks igenom och med särskilt fokus på de senaste fem årgångarna var *Educational Studies in Mathematics*, *For the Learning of Mathematics*, *Journal for Research in Mathematic Education*, *Journal of Mathematics Teacher Education*, *Learning and Instruction* och *NOMAD (Nordisk Matematikdidaktik)*.

I ett tidigt skede noterade vi att forskare, ansvariga för de studier vi tog del av, skrivit andra texter av intresse för laborativ matematikundervisning. Vi såg detta som en tillgång i det samlade kunskapsområdet och valde därför att inte enbart göra en begränsning till forskningsstudier utan även referera till texter av forskningsrelaterad natur. Detta innebär att denna översikt baserats på forskningsstudier och forskningsrelaterade texter samt att kopplingar exempelvis gjorts till nationella styrdokument och myndighetsrapporter som berör skolans verksamhet.

De övergripande frågor som stått i fokus vid vår litteraturgenomgång är vilka möjligheter, risker och hinder som finns när laborativa material och laborativt arbetssätt används i grundskolans matematikundervisning. De specifika frågor som utkristalliserat sig under processen är: Vad är laborativa matematikmaterial? Vad är laborativt arbetssätt i matematik? Vilken är lärarens roll vid arbete med laborativa material? Vilket kunskapsområde finns om effekter i elevers lärande vid laborativ matematikundervisning – och vilka konsekvenser får det?

Kunskap och lärande

För att i denna översikt få en bakgrund för de kommande avsnitten beskrivs begreppen kunskap och lärande utifrån Läroplanskommitténs betänkande som låg till grund för Lpo 94 (SOU 1992:94).

I beskrivningen av begreppet lärande redovisas hur forskning bidragit till en förändrad förståelse av individens lärande. Förståelsen beskrivs i tre steg och vi

ser att det är fullt möjligt att placera in laborativ matematikundervisning i samtliga – fast med olika syfte:

1. Lärande som införlivande av yttre kunskaper.
Inom denna tradition anses inläring vara detsamma som utveckling. Ju mer eleven lär desto mer utvecklas han/hon. Hit hör olika behavioristiska inläringsteorier, som t ex B F Skinners (1904–1990). Dessa teorier går bra att förena med en syn på skolans kunskapsuppgift som innebär förmedling av relativt enkla och avgränsade kunskaper och färdigheter. Intresset för behaviorismen var störst under slutet av 1960-talet. Laborativ matematikundervisning skulle i denna tradition t ex kunna innebära att spel används för att ge elever färdighetsträning.
2. Lärande som förståelse utifrån elevens utvecklingsnivå.
Till denna tradition har framför allt Jean Piaget (1896–1980) bidragit genom sin generella utvecklingspsykologiska stadieteori. Den innebär att människan genomgår en serie av alltmer avancerade kognitiva utvecklingsstadier. Människans utveckling ses som universell och sker så gott som oberoende av omgivningen. Intresset för Piaget var störst under slutet av 1970-talet och hans teorier har haft stort inflytande på tänkandet om skolan. I ett sådant perspektiv blir skolans uppgift att skapa betingelser för elevens naturliga utveckling och att anpassa problem till deras utvecklingsnivå. Utvecklingen sätter gränser för vilken inläring som är möjlig. Lärarens uppgift vid laborativt arbete blir att välja ut laborativa aktiviteter som överensstämmer med elevernas utvecklingsnivå. Med samma ämnesinnehåll, t ex grundläggande taluppfattning, och samma laborativa material, t ex multibaskuber, kan läraren erbjuda aktiviteter med olika svårighetsgrader, t ex uppdelning av talen upp t o m 18 eller förståelse för positionssystemets uppbyggnad.
3. Lärande som ett samspel mellan individ och miljö.
Den tredje traditionen omfattar ett antagande att inläringen kan påverka utvecklingen och har sina rötter främst hos Lev Vygotskij (1896–1934). Han utgick från motsättningen mellan å ena sidan att överföra kunskaper från de vuxna till barnen och å andra sidan att barnen själva måste utveckla sina kunskaper. Denna motsättning förklarade Vygotskij med hjälp av "utvecklingszoner" hos den lärande – vad den lärande klarar av att göra med hjälp av någon mer erfaren person. Den lärande kan imitera handlingar som går utanför deras egen förmåga och kan genom imitation nå längre än med enbart sin egen förmåga. Vygotskij betonade också den meningsfulla praktiken, där kunskap ses som ett redskap för att nå olika mål. I ett meningsfullt sammanhang används först kunskaperna som något "yttre", men övergår

sedan till något ”inre”. Den vuxna kunskapen införlivas på så sätt med barnens egen förståelse. Genom internalisering av språket får barnen tillgång till de vuxnas kunskap. Inläringen går före utvecklingen och skapar en möjlig utvecklingszon. Intresset för Vygotskijs tankar började växa fram under slutet av 1980-talet. Laborativ matematikundervisning inom denna tradition kan vara när unga elever får erfarenhet av ett ämnesinnehåll som av skoltradition ofta brukar presenteras flera år senare. Ett konkret exempel är när läraren med hjälp av laborativt material introducerar kvadratrötter, såväl begreppsligt innehåll som symbolisk notation, för elever i 10-årsåldern.

Resultat av litteraturgenomgång

Under denna rubrik redovisas de resultat vi tagit del av i litteratur utifrån de frågor som tidigare ställts. Inledningsvis beskrivs vad laborativa matematikmaterial är, hur bruket av dem vuxit fram genom historien samt innebörden i ett laborativt arbetssätt. Därefter redogörs för tre forskningsöversikter om laborativ matematikundervisning och i efterföljande avsnitt diskuteras förutsättningar för användandet av laborativa material. Ett större avsnitt ägnas åt representationer och hur kopplingen mellan konkret och abstrakt matematik kan ta sig uttryck. Nästa avsnitt lyfter fram dokumentationens betydelse inom matematikämnet, sedan berörs analys och bedömning och därefter beskrivs lärarens roll vid laborativ matematikundervisning. I det avslutande avsnittet presenteras studier som i någon mening visar på effekter i elevers lärande vid laborativ matematikundervisning och vilka konsekvenser det kan få vid planering, genomförande och uppföljning.

Laborativa matematikmaterial

Vi har redan tidigare beskrivit laborativa matematikmaterial som fysiska och konkreta, vilka är möjliga att hantera, manipulera, ta på, flytta, undersöka, etc. I engelskspråkig litteratur används ofta ordet 'manipulatives', eller former av det, för laborativa matematikmaterial. Här återges några definitioner och för att inte några nyanser ska gå förlorade har de inte översatts.

Evelyn Sowell (1989):

Manipulative materials include both concrete and pictorial representations.

(s 498)

ERIC Digest Team (1990):

... 'manipulatives' will be understood to refer to objects that can be touched and moved by students to introduce or reinforce a mathematical concept.

(s 2)

James Heddens (1997):

Manipulative materials are concrete models that involve mathematics concepts, appealing to several senses, that can be touched and moved around by the students (not demonstrations of materials by the teacher).

(s 1)

Patricia Moyer (2001):

Manipulative materials are objects designed to represent explicitly and concretely mathematical ideas that are abstract. They have both visual and tactile appeal and can be manipulated by learners through hands-on experiences.

(s 176)

Även om definitionerna av 'manipulatives' är relativt samstämmiga, finns det olika aspekter av laborativa matematikmaterial som bör lyftas fram. Julianna Szendrei delar först in dem i två huvudgrupper (Szendrei, 1996):

- *vardagliga föremål* vilka finns som verktyg eller föremål i vardagen, arbetslivet och naturen
- *pedagogiska material* som är speciellt tillverkade, kommersiellt eller av lärare och elever, för matematikundervisningen.

Sedan lägger hon även till spel, vilka blev allt vanligare i matematikundervisningen under 1900-talet.

Szendrei skriver också att det bland många matematikdidaktiker finns en tro på att arbete med laborativa material är en avgörande punkt för lärande i matematik, oavsett elevens ålder, men att de framhåller materialgrupperna på skilda sätt:

Vardagliga föremål. Vissa didaktiker förespråkar praktiskt arbete med vardagliga föremål – som vid trädgårdsskötsel, matlagning, snickeri etc – vilka kan ge både praktiskt och vetenskapligt kunnande. De anser att dessa föremål har en nära koppling till omvärlden och eftersom de ofta har utvecklats av mänskligheten under lång tid, tar det mindre tid att lära sig att använda dem på ett korrekt sätt – och eleverna ska ändå lära sig att hantera dem. Felaktig användning minimeras eftersom även föräldrar och andra känner till materialet eller verktyget. Szendrei ger också exempel som visar att naturmaterial som bönor, ekollon, kastanjer och snäckskal användes som stöd för räkning och som ostandardiserade måttenheter i undervisningen redan i början av 1900-talet (Szendrei, 1996).

Pedagogiska material. Andra forskare försöker finna en perfekt överensstämmelse mellan strukturen på den matematiska kunskapen och materialet genom att undvika det "störande brus" som finns i vardagliga föremål och som kan distrahera eleverna, de försöker alltså "renodla" begreppen genom det pedagogiska materialet. Dessa material kan vara designade för att illustrera specifika matematiska principer där vardagliga föremål inte är fullt tillräckliga. I praktiken används ofta vardagliga föremål både före och efter ett pedagogiskt material för att undan för undan ge mer "brus". Ett pedagogiskt material visar tillverkarens uppfattning av en matematisk idé och det är inte alls säkert att den är transparent och uppfattas av lärare och elever på samma sätt. Pedagogiska material har också tagits fram för att ge läraren en möjlighet att upptäcka elevers missuppfattningar (Szendrei, 1996).

I Sverige har Wiggo Kilborn framhållit betydelsen av strukturlikhet mellan den matematiska idén och den laborativa aktiviteten (Kilborn, 1981). Vid tex multiplikation av typen $6 \cdot 87$ kan pengar inledningsvis användas, en enkrona = ett ental, en tiokrona = ett tiotal etc. Han konstaterar att när talen blir allt högre nås en gräns när det blir opraktiskt att använda materialet och istället måste eleven kunna gå över till att göra beräkningar i huvudet och / eller med papper och penna.

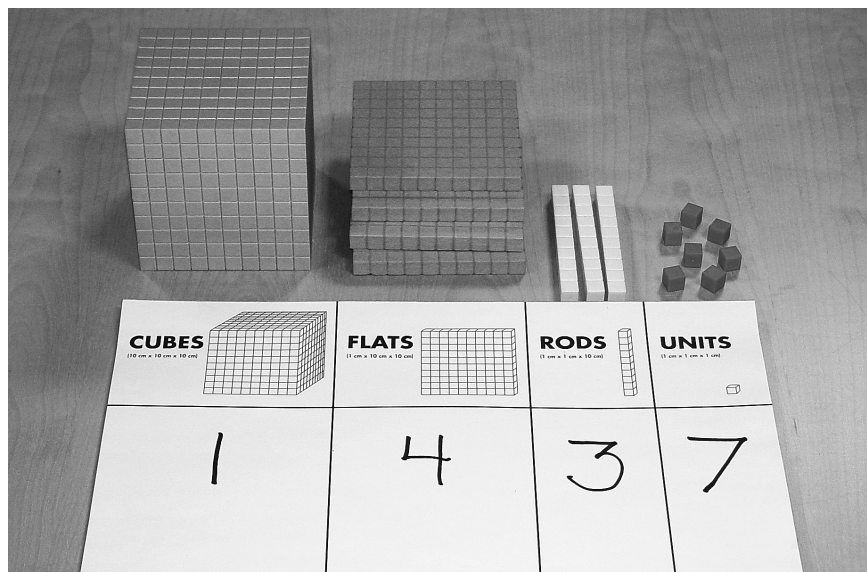
David Uttal och hans kollegor anser att det slutgiltiga målet med att använda laborativa material är att hjälpa eleverna att få förståelse för abstrakta begrepp och de skrivna symboler som används för att representera dem (Uttal, Scudder & DeLoache, 1997). I sin studie visar de att eleverna måste få möjlighet att uppfatta laborativa material som symboler och att det då kan vara en nackdel om eleverna i första hand får använda ting som de är vana vid i sin vardagsmiljö. Eleverna kan bli så emotionellt engagerade i exempelvis en tilltalande leksak att det hindrar dem att uppfatta den matematiska tanken i aktiviteten. Det kan vara så, menar de, att det bästa laborativa materialet är objekt som enbart används i matematikundervisningen.

Spel. I frågan om spel går också matematikdidaktikernas åsikter isär. Enligt Szendrei anser en del att spel ger eleverna en negativ bild av ämnet matematik, andra lyfter fram spel och tycker att de kan tillföra mycket. Några positiva aspekter som förs fram är att spel kan medföra att elever måste precisera sitt språk och att spelen kan bidra till att färdighetsträning inte bara uppfattas som en tråkig process – men det förutsätter att spelen används på ett genomtänkt sätt (Szendrei, 1996).

Flersiffriga tal och material – ett exempel

Här ges *en* bild av hur ett laborativt material kan fungera i matematikundervisningen (Fuson, 1990). Exemplet är från en artikel som handlar om hur elever ska få förståelse för hur flersiffriga tal är uppbyggda utifrån positionssystemet. I artikeln diskuteras amerikanska elevers svårigheter med att addera och subtrahera flersiffriga tal ur ett språkligt och kulturellt perspektiv. Ett av problemen som lyfts fram är att talen 11–19 inte är språkmässigt logiska i engelska språket (och inte heller i det svenska) till skillnad från i asiatiska språk, baserade på kinesiska, där exempelvis tolv heter ”tio två”. Detta anges som en trolig orsak till att amerikanska (och svenska) barn länge föredrar upp- och nedräknande strategier istället för att använda tio som en enhet. I artikeln ges en ingående bakgrund till problemet och olika alternativ på lösningar diskuteras. Ett förslag är att när eleverna är tillräckligt förtrogna med de tio första talen och deras delar, bör undervisningen direkt fortsätta med firsiffriga tal. Detta för att eleverna snabbare ska börja ta hjälp av begreppen ental, tiotal, hundratal och tusental.

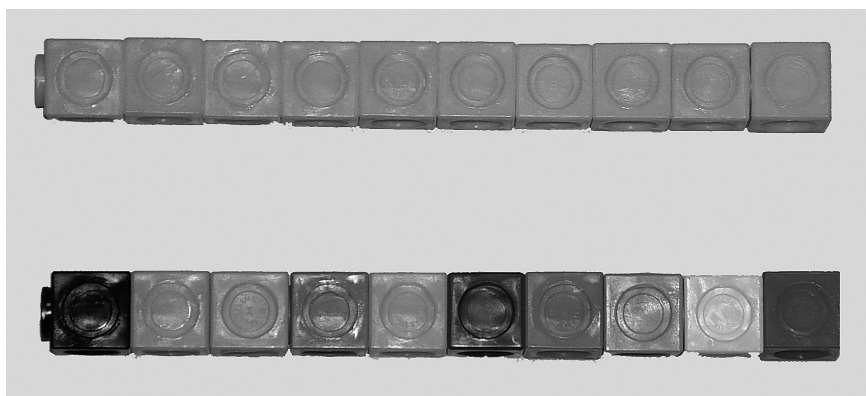
Karen Fuson beskriver hur utgångspunkt kan tas i språket och tillsammans med laborativt material övergår sedan undervisningen till allt mer abstrakt matematik och ett matematiskt korrekt skrivsätt. I det här exemplet används multibaskuber, också kallade Dienes kuber, vilka ingår i kategorin pedagogiska



Multibaskuber som representerar talet 1437.

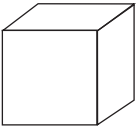
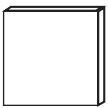
material. Stora tal uttrycks genom att allt större enheter (tial, hundratal, etc) sätts samman av siffrorna 0–9 i positionssystemet. För att elever ska få förståelse för varför tal uttrycks på detta sätt, behöver de få perceptuellt stöd för att skapa begreppsstrukturer som speglar tialssystemets uppbyggnad.

I artikeln betonas att lärarens uppgift är att stödja eleverna så att de får förståelse för sambandet mellan det laborativa materialet och de olika tal det representerar. Elevernas tankesätt behöver uppmärksammas, en elev kan t ex sätta den korrekta verbala etiketten "tial" på tiostaven, men ändå inte uppfatta att ett tial består av tio ental. Ett sätt att möta detta är att låta eleven använda andra material en tid och tillverka sina egna tiostavar av t ex byggbara kuber.



Tiostavar i syfte att visa att ett tial består av tio ental.

Fuson visar i tabellform, se nästa sida, den begreppsliga strukturen för flersiffriga tal och hur den kan utformas. Vi har översatt och förenklat tabellen som en illustration till vår text för att visa på sambandet mellan ett laborativt material och den formella matematikens uttrycksformer. Kopplingen till den kinesiska ordstrukturen samt tiotusenkolumnen har inte tagits med och läsare som vill veta mer om detta hänvisas till originaltexten. I exemplet blir det möjligt att utifrån det laborativa materialet komma så långt att eleven får en visuell representation av det abstrakta begreppet $10^0 = 1$.

Namn på begreppsliga strukturer för flersiffriga tal	Hur den begreppsliga strukturen kan utformas			
Plats Första platsen längst till höger, sedan andra osv åt vänster	fjärde	tredje	andra	första
Platsvärde Ental på första platsen sedan ökande platsvärde med en tiomultipel för andra platsens siffror osv Laborativt material som gestaltar platsvärden som byggstenar, en liten enhetskub motsvarar talet 1	tusen 	hundra 	tio 	en(tal) 
Växlingar Tio enheter på en plats kan växlas till en enhet på platsen närmast till vänster, och vice versa, beroende på ökningen med en multipl av tio för varje plats	tio hundratal en	tio tiotal tio en	tio ental tio en	ett ental tio
Kumulativa växlingar Växlingar kan ske i flera led med en multipel av tio i varje led, ökande åt vänster, minskande åt höger	tre byten	två byten	ett byte	inget byte
Multiplar Växlingar kan ske i flera led med en multipel av tio i varje led, ökande åt vänster, minskande åt höger	tre multiplar av tio ($t \cdot t \cdot t$)	två multiplar av tio ($t \cdot t$)	en multipel av tio (t)	ingen multipel av tio
Fackspråk Tiopotenser som språkliga uttryck	tio upphöjt till tre (tredje potensen av tio)	tio upphöjt till två (andra potensen av tio)	tio upphöjt till ett (första potensen av tio)	tio upphöjt till noll
Symbolspråk Tiopotenser i symbolform	10^3	10^2	10^1	10^0

Exemplet visar kortfattat att samma laborativa material kan komma till nytta upprepade gånger under en elevs skolgång för att ge allt djupare förståelse för tals uppbyggnad. Inledningsvis handlar det om att benämna talen korrekt och få förståelse för positionssystemet, flera år senare kan undersökningar av Dienes kuber leda till insikt i hur tal skrivs och förstås i grundpotensform.

Vi vill i detta sammanhang påpeka att det också finns material som är 1/10, 1/100 och 1/1000 av kubikcentimetern. Det gör att tabellens idé kan utvidgas och även konkretisera decimaltal, ner till tusendelar då kubikcentimeterns värde bestäms till 1.

Historisk tillbakablick

Redan den grekiske filosofen Aristoteles som levde på 300-talet f Kr betraktade matematiken som abstraktioner av tingens konkreta egenskaper. Han ansåg att kunskap utvinns genom att först studera många konkreta exempel för att upptäcka vad som är utmärkande för dem. I nästa skede kan detta abstraheras och uttryckas generellt som tex vad som är utmärkande för däggdjur (Helenius & Mouwitz, 2009; Nationalencyklopedin, 1996).

Fortsättningsvis ges en mycket översiktlig historisk tillbakablick, vars syfte i första hand är att visa att bruket av konkreta material i tillämpad matematik och matematikundervisning inte är någon ny företeelse.

Fram till 1800-talet

Material har länge använts för att hålla reda på antal (tex pärlor), som symboler för antal (tex inbrända markeringar på trä) samt som hjälpmedel vid beräkningar (tex knutar på snören) (Szendrei, 1996). Ett ofta nämnt exempel är ett 30000 år gammalt vargben med inbrända markeringar (Thompson, 1991). Vid utgrävningar i Mellanöstern från perioden 8000–3000 f Kr har man hittat talpjäser i lera i flera storlekar och i varierande form. De har fungerat som räknehjälpmedel för planering eller registrering av ekonomiska transaktioner i en begynnande högkultur (Nationalencyklopedin, 1996).

Senare exempel på konkreta material i syfte att underlätta aritmetiska beräkningar är en grekisk abakus i marmor från 400 f Kr, räknebord och räknepennor från medeltiden samt kulramar i olika modeller (Nationalencyklopedin, 1996). I de tidiga kulturerna är det också möjligt att finna belägg för att material har använts för att visa matematiska begrepp, se tex *Jiuzhang suanshu*, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, som är en kinesisk matematikbok från Han-dynastin, år 206 f Kr–220 e Kr (Wang, 2007). I artikeln illustreras hur tvådimensionella geometriska figurer redan då användes för att konkretisera Pythagoras sats och tredimensionella kroppar för att konkretisera aritmetiska serier. Tyvärr anges inte i artikeln vad de laborativa hjälpmedlen var tillverkade av. Inom matematikundervisningen har konkreta material dock inte alltid varit helt accepterade, hävdar Szendrei. De första konkreta materialen övergavs successivt när de skriftliga mekaniska räknemetoderna gjorde sitt intåg eftersom de inte längre sågs som nödvändiga för att få fram resultaten på beräkningarna. Att eleven skulle förstå algoritmen uppfattades inte som betydelsefullt (Szendrei, 1996).

Johan Amos Comenius (1592–1670) och Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827) var de första som strävade efter, enligt Szendrei, att återinföra konkret material i undervisningen. Comenius huvudtes var att använda olika sinnen och inte enbart ord. Innehållet skulle komma före formen. Han ansåg att allt vetande

har sitt upphov i sinnlig åskådning, som sedan går genom föreställningsförmågan över i minnet. Comenius skrev redan 1632 i sin bok *Didactica Magna* (Comenius, 1989) en gyllene regel för lärare: allt skall så mycket som möjligt visas fram inför sinnen. Pestalozzi kan ses som upphovsman till idén om att systematiskt utgå från sinnlig erfarenhet i undervisningen. Han menade i likhet med Comenius att observation och att använda sinnen är första steget i alla lärandeprocesser (Szendrei, 1996).

Från 1800-talet och framåt

Intressant att notera är att Sveriges äldsta metodiska handbok för seminarieutbildningen som gavs ut 1843 ville bana väg för Pestalozzis grundregel rörande nödvändigheten av åskådning (Nordström, 2009). Efter Comenius och Pestalozzis har många andra matematikdidaktiker sedan utvecklat nya laborativa material för matematikundervisning.

Friedrich Fröbel (1782–1852) studerade under Pestalozzi och konstruerade ett material, Fröbels lekgåvor, som var särskilt riktat till små barn (Kidwell, Ackerberg-Hastings & Roberts, 2008).

Maria Montessoris (1870–1952) syfte med sitt omfattande matematikmaterial *Didactic apparatus*, framtaget genom omfattande forskning, var att uppnå sensorisk, motorisk och intellektuell utveckling genom fria övningar utifrån barnets eget intresse. Barnet ska själv välja material och när det ska användas (Szendrei, 1996).

I slutet av 1800-talet och början av 1900-talet fördes en debatt i Sverige kring behovet av åskådlighet inom undervisningen. I en artikel i *Svensk lärartidning* från 1897 rapporteras från ett sammanträde vid Stockholms folkskolläraryr-förening. En medlem hade där förevisat åskådningsmaterial för undervisning i geometri och mötts med "starka bifallsyttringar" (B Johansson & Wistedt, 1992). Anna Kruse (1861–1931), lärarinna och senare föreståndarinna för Brummerska skolan i Stockholm, var en som tidigt uppmärksammade hur material och stoff ska leda elever till matematiska upptäckter. Hon skriver i sin bok *Åskådningsmatematik*: "Barnen skola aldrig få någon regel för hur de skola göra. De skola ej ha några förklaringar, allt ska vara så klart och åskådligt, att det för dem blir en erfarenhetskunskap, som därför ej behöver förklaras" (Kruse, 1910, s 11). I 1919 års undervisningsplan är texten tydlig när det gäller behovet av åskådlighet i undervisningen (B Johansson & Wistedt, 1992).

George Cuisenaire (1891–1976) var en belgisk folkskollärare. Han konstruerade ett material med tio olika långa stavar då han hade observerat att många elever hade svårt att skilja på tals storlek. Så småningom spred den engelske psykologen och matematikprofessorn Caleb Gattegno information om cuisen-

airestavarna och hur de kan komma till nytta i matematikundervisningen (Gattegno, 1979).

I Sverige förknippas ofta Gudrun Malmer med cuisenairstavarna. Hon beskriver i flera av sina böcker, och även i ett datorprogram, hur stavarna kan användas. Hon betonar språkets betydelse och har utvecklat metoder för hur laborativa material kan stödja lärandet. Ett exempel är *Räkneväskan*. I den ingår ett laborativt material, talblock, framtaget på 1960-talet. Materialet utgavs på nytt 2005 (Malmer & Rudqvist, 2005) och finns även i moderna versioner hos andra läromedelsföretag.

Zoltan Dienes (1916–) har bedrivit ett omfattande arbete bland annat för att öka elevers förståelse för matematik baserat på laborativa material. Hans huvudsakliga budskap bottnar i elevens aktiva deltagande och till det behövs en stor mängd laborativa material (Post, 1981). Förutom att han har skrivit ett flertal böcker, där *Building up Mathematics* kanske är den mest kända (Dienes, 1960), var det han som konstruerade multibaskuberna, de första algebraiska materialen samt de logiska blocken. Dessa material och tillhörande instruktioner ligger till stor del till grund för nutidens användning av laborativa material i matematikundervisningen. Sedan mitten av förra seklet har Dienes försökt att underlätta skolpraktiken genom fältarbete i en lång rad länder och han har inspirerat många matematikdidaktiker. Dienes sammanförde exempelvis grupparbeten med laborativa material långt innan ord som konstruktivism och jämlikhet blev moderna (Sriraman & Lesh, 2007).

Redan för ungefär hundra år sedan, 1909, skrev Charles Laisant, redaktör vid tidskriften *L'Enseignement Mathématique*, ett råd till föräldrar som ville att deras barn skulle få en god matematikutbildning: "Examine the laboratory of the school: the weights, the measures and surveying instruments. If you do not find such tools, run away and do not return" (Szendrei, 1996, s 418).

Frits Wigforss, inflytelserik svensk matematikdidaktiker under 30-, 40- och 50-talet, förespråkade tex åskådlig geometriundervisning, inte minst för att få förståelse för geometriska samband som kan uttryckas i en formel (B Johansson & Wistedt, 1992): "Ett inpluggande av definitioner och abstrakta lärosatser är – om ingen klar åskådning ligger bakom – värdelöst" (Wigforss, 1957, s 148). Wigforss betraktade konkret åskådningsmaterial som ett medel för att utveckla det abstrakta tänkande och varnade av den anledningen för allt för långt drivna krav på konkretion (B Johansson & Wistedt, 1991): "Den yttre åskådningen är emellertid ett medel att komma fram till den inre, till en åskådning i fantasien, till det åskådliga tänkandet. Och kravet på åskådlighet kan leda till överdrift i att visa barnen allt möjligt, som de redan har en klar uppfattning av, medan man försummar att uppöva deras förmåga av åskådligt tänkande" (Wigforss, 1957, s 8).

Sedan 1940-talet har den amerikanska matematiklärarorganisationen *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM, uppmuntrat till användning av laborativa material på alla stadier. 1986 ägnades ett helt nummer av deras tidskrift *The Arithmetic Teacher* åt laborativa material och frågor av praktisk art som varför, när, vad, hur och med vilka det skulle användas (ERIC Development Team, 1990).

Under 1960-talet påbörjades en period då laborativa material och bilder i matematikundervisningen betonades. Fortsatt in på 70-talet jämförde forskare resultaten när laborativa material och bilder, alternativt inget sådant material, ingick i undervisningen. Resultaten var blandade (Sowell, 1989).

Laborativ matematikundervisning har skrivits fram i såväl statliga kursplaner (Japanese Ministry of Education, 1998) som i kommersiella undervisningsplaner (Ball, 1992). De kommersiella undervisningsplanerna har ofta tillhörande läromedel och i exempelvis olika delstater i USA erbjuds ibland laborativa material till försäljning med direkt anknytning till undervisningsplanens innehåll. I länder med statliga kursplaner får lärare liknande erbjudanden om materiallådor från kommuner eller företag. Den nya svenska kursplanen i matematik för åk 3 är ett exempel där konkret material uppmärksammas (Skolverket, 2009b).

Laborativt arbetssätt i matematik

Eleven måste få möta en variation av arbetssätt inom matematikundervisningen, vilket uttrycks på följande sätt av Astrid Pettersson (2003) i *Baskunnande i matematik*:

En effektiv lärandemiljö utmärks av att det är god balans mellan olika arbets-sätt, mellan elevens eget utforskande och kunskapssökande och en god och systematisk undervisning och handledning. (s 60)

Det utforskande arbetssättet kan härledas till den *induktiva metoden* – att eleverna skaffar sig egna specifika erfarenheter som sedan ligger till grund för insikter i allmängiltiga och generella samband (Christou & Papageorgiou, 2007; Taflin, 2007). Ett exempel kan vara att elever med hjälp av laborativa material undersöker förhållandet mellan area och omkrets. I den gemensamma diskussionen tillsammans med läraren kommer de fram till att en given omkrets kan ha olika area och vice versa.

Den systematiska undervisningen utgår från den deduktiva metoden – att undervisningen utgår från det allmängiltiga och generella och sedan leder över till det enskilda och specifika (Christou & Papageorgiou, 2007; Taflin, 2007). Den deduktiva metoden börjar från andra hållet: läraren eller läroboken kan beskriva och demonstrera hur arean av trianglar kan beräknas. Eleverna får sedan göra areaberäkningar av trianglar med varierande former och i olika storlekar.

Induktiv metod	specifikt ⇨ generellt	ett undersökande arbetssätt
Deduktiv metod	generellt ⇨ specifikt	ett demonstrerande arbetssätt

Undersökande respektive demonstrerande arbetssätt står inte i motsats till varandra utan ska istället uppfattas som komplementära och kombineras med varandra (Star & Rittle-Johnson, 2008). Detta tas också mycket tydligt upp i ett vägledningsmaterial till den danska gymnasiekursplanen i matematik. Där betonas växelverkan mellan experimentellt och deduktivt arbetssätt då elever ska tillägna sig matematiska begrepp (Undervisningsministeriet, 2008). I en studie uppmärksammas vikten av att även när eleverna arbetar undersökande behöver de få såväl individuellt som kollektivt stöd av läraren. Eleverna behöver både tillräcklig frihet för att bli kognitivt aktiva i processen och tillräcklig handledning för att deras tänkande ska resultera i användbar kunskap (Hugener m fl, 2009).

Laborativt arbetssätt – konkretiserande undervisning

En annan infallsvinkel är att se på skillnader mellan laborativt arbetssätt och konkretiserande undervisning. Detta kan exempelvis göras utifrån boken *How children fail* (Holt, 1982):

Ett laborativt arbetssätt innebär att undervisningen tar avstamp från den informella nivå där eleverna befinner sig. Alla elever deltar men kan arbeta med olika innehåll beroende på vilken förståelse de har för aktuellt begrepp. Från den informella nivån med laborativt arbete fortsätter sedan arbetet i den takt som passar eleven till den formella och symboliska nivån.

En konkretiserande undervisning innebär en omvänd arbetsgång. Alla elever får direkt starta i den formella och abstrakta matematiken. För den grupp av elever som inte klarar detta får läraren arrangera ett konkretiserande innehåll, vilket i praktiken ofta innebär att dessa elever får använda laborativa material medan övriga elever fortsätter arbeta symboliskt.

Översikter

Vi har tagit del av ett antal kunskapsöversikter som fokuserar forskning om laborativa material och aktiviteter inom matematikundervisningen. Vi har valt att titta närmare på två äldre metaanalyser och en nyare forskningsöversikt som tillsammans spänner över de senaste 80 åren.

Äldre metaanalyser

I en metaanalys görs en studie av vetenskapliga publikationer med syfte att dra slutsatser om de samlade vetenskapliga resultaten, dvs en studie av studier (Nationalencyklopedin, 1996). Den ena metaanalysen som vi granskade är genomförd av Marilyn Suydam och Jon Higgins 1977 och den andra av Ewelyn Sowell 1989. Anledningen till att dessa översikter valts ut är att de ofta refereras i forskningslitteratur om laborativ matematik och det är därför angeläget att de återfinns även i detta arbete. Värt att notera är också att det finns forskare som återkommande refereras oavsett vilket årtionde som kunskapsöversikten har publicerats – Piaget, Dienes, Bruner samt, när det gäller de senare översikterna, Vygotskij.

I *Activity-based learning in elementary school mathematics: Recommendations from research* gör Suydam och Higgins en genomgång av studier genomförda mellan 1933 och 1976 och för sedan en diskussion utifrån de resultat de fann (Suydam & Higgins, 1977).

Den forskning de sammanfattar rör elever i ungefär motsvarande grundskolan och behandlar aktiviteter där laborativa material ingår. De konstaterar att två antaganden utgör basen för många studiers uppläggning:

- lärandet pågår i en process från konkret till abstrakt
- det laborativa materialet är inte nödvändigt för alla steg i processen, utan när elever har utvecklat sin förståelse för symboler är det dessa som fortsättningsvis används.

De resultat som sammanfattas berör elever på alla kunskapsnivåer, elever med skilda förmågor och från olika socioekonomiska bakgrunder. Matematikinnehållet varierar: de fyra räknesätten, bråk, geometri och problemlösning nämns explicit. I en del av metaanalysen har Suydam och Higgins tittat närmare på studier som har jämfört undervisning med och utan laborativa material och de fann tre resultatgrupper:

- det finns inte någon signifikant skillnad i resultat då elever använder respektive inte använder laborativa matematikmaterial
- det är fördel att använda material
- det är till nackdel att använda material.

Vi kan notera att ämnesområdet geometri förekom i alla tre grupper.

Suydam och Higgins diskuterar att som i så många andra forskningsstudier är lärarens inflytande svårt att kontrollera, identifiera och isolera. De menar att hur effektivt lärandet är beror mer på läraren än på det laborativa materialet. En engagerad och välutbildad lärare som känner både elever och styrdokument kan ha en mycket positiv effekt på elevens lärande.

Författarna beskriver också de svårigheter som finns vid sammanställning av forskningsresultat i en metaanalys och använder ett tidningsfoto som metafor: tittar man mycket nära på ett sådant foto syns alla punkter som det är uppbyggt av, men på lite håll syns istället vad fotot vill visa. På motsvarande sätt för de ett resonemang kring forskningen om laborativt arbetssätt och laborativa material. Även när enskilda undersökningar ifrågasätts, blir det ändå en relativt samlad och entydig bild som framträder. Ungefär hälften av undersökningarna visar att laborativt arbete är positivt och ca 10 procent visar att det är negativt, övriga förhåller sig neutrala. Med positivt menar de att när laborativa material inkluderas i undervisningen är sannolikheten för att eleverna ska nå ett högre kunnande i matematik större än vid undervisning utan laborativa material. Författarna anser att om det vore övervägande negativt att arbeta laborativt borde en betydligt större andel undersökningar vara entydigt negativa. Suydam och Higgins

sammanfattar: "use of manipulative materials *and* pictorial representations resulted in higher achievement than use of symbols alone" (Suydam & Higgins, 1977, s 58).

Generellt sett är laborativa material accepterade som en betydelsefull del inom matematikundervisningen bland både forskare och lärare, men Suydam och Higgins noterar samtidigt att det är långt ifrån alltid som tron på material omsätts till handling:

Nevertheless, teachers should test research findings in their own classrooms. Research can only indicate what in general is effective or appears to be "truth".
(s 13)

I *Effects of manipulative materials in mathematics instruction* sammanfattar Sowell resultat från 60 studier gjorda under åren 1954–1984 (Sowell, 1989). Studierna omfattade elever från motsvarande förskola till grundutbildning på högskolan, med tyngdpunkt på de tidiga skolåren. Ämnesinnehållet varierade och populationer från både stad och landsbygd ingick. Studierna omfattade undervisningstid från 1 till 72 veckor, med en median på 6 veckor. I diskussionen lyfts det fram att bäst blir resultatet om laborativa material används under en längre tid, här definierad till över ett år, och tillsammans med symbolisk representation. Elevernas attityd till laborativa material blev mer positiv när de fick undervisning av kunniga lärare. Metaanalysen visade att arbete med laborativa material kan vara effektivt, men att få material används. Analysen kunde inte ge svar på när laborativa material gör mest nytta, inte heller vilka som är mest lämpliga i olika sammanhang.

Nyare forskningsöversikt

I februari 2009 webbpublicerade Dianne Goldsby en forskningsöversikt med titeln *Manipulatives in middle grades mathematics* (Goldsby, 2009). Med hänvisningar till många av de rapporter som redovisas i de äldre översikterna ovan sammanfattar Goldsby den forskning som finns om laborativa material för yngre elever samt kompletterar med senare forskning för både yngre och lite äldre elever:

- elever som använder laborativa material kan prestera bättre, enligt de i studierna ingående kriterierna, jämfört med dem som inte gör det
- hur lärare utnyttjar ett material och vilka resultat eleverna når beror på lärarens erfarenhet och kunnande
- relationen mellan materialet och det matematiska begreppet är inte alltid uppenbart för eleven

- hur lång tid det laborativa materialet är en del i undervisningen påverkar resultatet och för de äldre eleverna påverkas resultatet om de själva får ta ansvar för när och hur material används
- hur elever förstår ett material beror på den undervisning de får och olämpliga samband mellan material och begrepp kan leda till och förstärka missuppfattningar
- material kan inte på egen hand förväntas förbättra undervisningen.

Några forskningsresultat om laborativa material på mellanstadiet redovisas kortfattat, men avslutningsvis konstateras ändå att bristen på forskningsresultat för denna åldersgrupp är stor. Här lämnas översikterna och fortsättningsvis är det specifika studier som tas upp.

Matematik måste tillföras och / eller lyftas fram

I litteraturen betonas ofta att fysiskt material i sig inte ger matematiska insikter, det bidrar inte med automatik till förståelse i matematik. Matematik är ett värde som läraren måste tillföra materialet (Ball, 1992; Clements, 1999; Fennema, 1973; Meira, 1998; Moyer, 2001; Szendrei, 1996). Samma inställning har Madeleine Löwing och Wiggo Kilborn och de poängterar också felaktigheten i att benämna ett laborativt material som konkret material:

En av de viktigaste poängerna med konkretisering har man tappat bort redan när man kallar ett laborativt material för ett "konkret material". Materialet i sig är dött och äger inte någon konkretiserande egenskap. Genom att använda materialet på ett sådant sätt att det underlättar den språkliga förståelsen av en operation eller tankeform, så har man däremot använt materialet i konkretiserande syfte. Men det är ändå inte materialet som är konkret. Om man lyckas konkretisera något eller inte är alltså helt beroende av hur materialet används.

(Löwing & Kilborn, 2002, s 204)

Laborativa material ska dels hjälpa elever att förstå matematikens abstrakta natur och dels att bli mer effektiva problemlösare (Fennema, 1973). Deborah Ball framhåller att även om kinestetiska (att göra med kroppen) upplevelser kan bidra till ökad varseblivning och tänkande, "vandrar inte förståelsen genom fingertopparna och upp genom armen" (Ball, 1992, s 47). Patricia Moyer menar att nyttan av de laborativa materialen avgörs av hur läraren och eleverna utnyttjar dem i ändamålsenliga och meningsfulla sammanhang. Det är genom att material betraktas som redskap i lärandet och genom att eleverna aktivt reflekterar över sitt agerande med dem som matematisk förståelse kan skapas (Moyer, 2001).

Att införa laborativa material innebär alltså inte snabba lösningar som förbättrar elevers lärande i matematik, men de kan spela en viktig roll – både som positiv stimulans för att inspirera till förändring och som betydelsefulla verktyg för undervisningen i matematik (Ball, 1992).

Ovanstående forskares syn på laborativa material i matematikundervisningen kan sammanfattas med Szendreis ord i vår översättning: "Undervisningsmaterial är inga mirakeldroger, deras förtjänst kräver planering och förutseende" (Szendrei, 1996, s 411).

I en studie av Paul Cobb blir det också tydligt att materialet i sig inte innehåller det matematiska begreppet utan att detta är ett värde som måste tillföras (Cobb, 1995). Under en tioveckorsperiod använde fyra elever den så kallade hundrarutan som stöd för förståelse av tiotalsbegreppet. Studien uppmärksammade speciellt om eleverna med hjälp av materialet insåg att ett tvåsiffrigt tal kunde delas upp i tiotal och ental. Eleverna hade tidigare bekantat sig med hundrarutan men inte fått någon specifik undervisning av läraren om hur den var uppbyggd och hur den kunde stödja huvudräkningsstrategier. En elev uppfattade tex inte att hundrarutans struktur utgår från tiotalet, vilket är centralt i detta fall. Eleverna skulle i smågrupper själva komma underfund med kopplingen mellan hundrarutans struktur och den matematiska idén. Resultaten visade att materialet inte bidrog till ökad och mer sofistikerad förståelse av tiotalsbegreppet. Det framgår dock i studien att hundrarutan kunde stödja elevernas förmåga att reflektera över sin matematiska aktivitet under andra förutsättningar. Så skedde dels när eleverna väl förstått hundrarutans uppbyggnad och hur ett tal kan delas upp i tiotal och ental, dels när de arbetat med många olika uppgifter med hjälp av samma material.

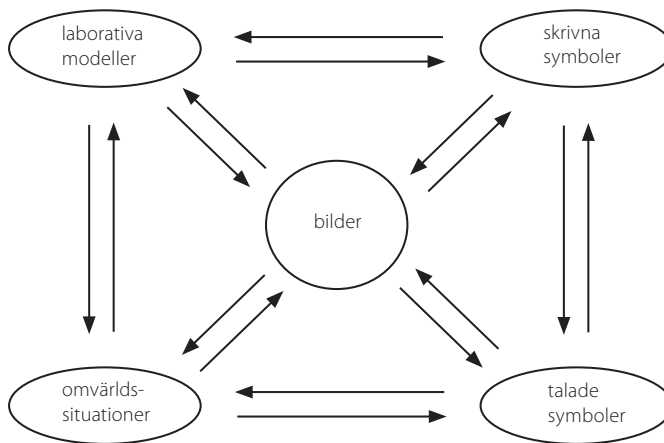
Representationer

Ett större fokus på matematiska representationer har sakta växt fram under det senaste årtiondet, skriver Stephen Monk i boken *A research companion to principles and standards for school mathematics* som getts ut av NCTM och som sammanställer forskning om den nuvarande matematikundervisningen (Monk, 2003). Vi har därför valt att gå in närmare på representationer utifrån de tre didaktiska grundfrågorna, vilka i detta sammanhang innebär: *Vad* är representationer? *Varför* ska elever arbeta med representationer? *Hur* kan arbete med representationer ske?

I Sverige förekommer ibland de båda begreppen "uttrycksformer och representationer" tillsammans (Skolverket, 1997) medan enbart "uttrycksformer" finns i andra texter (Skolverket, 2009a, 2009b). Vi använder främst ordet representationer eftersom det förekommer mest frekvent i övrig litteratur vi tagit del av.

Vad är representationer?

I *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik* beskrivs hur "lärandet kan gå via vardagsspråk och varsamt införande av matematisk terminologi, så att tex formler först uttrycks i ord och bild, att bokstäver, konstanter, parametrar och variabler ges mening som kan förstås och användas" (Skolverket, 1997, s 15). Det påpekas också att det är lämpligt att även utgå från matematiska symboler som sedan uttrycks i form av handling, bilder och språk. Eleverna behöver inse värdet av att kunna översätta inom och mellan olika representationer som tex konkreta modeller, vardagsspråk, schematiska bilder, diagram, skriftspråk, matematiktermer, matematisk notation och symboler. Detta illustreras av en schematisk bild över representationer och deras kopplingar till varandra:



Bearbetning efter Lesh 1981 (Skolverket, 1997, s 16)

I den danska KOM-rapporten (Undervisningsministeriet, 2002) beskrivs åtta olika kompetenser som elever och studenter ska få möjlighet att utveckla inom all matematikundervisningen från grundskola till universitet. Representationskompetensen, att kunna hantera olika representationer av matematiska förhållanden, är en av dessa kompetenser. Begreppet *representation* har definierats av Gerald Goldin och Nina Shteingold på följande sätt: "A representation is typically a sign or a configuration of signs, characters, or objects. The important thing is that it can stand for (symbolize, depict, encode, or represent) something other than itself" (Goldin & Shteingold, 2001, s 3). Det kan med andra ord beskrivas som att representationer ersätter något och står i stället för något annat. Varje form av representation är i någon grad en abstraktion av den verkliga världen (Smith, 2003).

Representationskompetensen består enligt KOM-rapporten av att kunna

- *förstå*, dvs avkoda och tolka
- *använda* sig av olika slags representationer av matematiska objekt, fenomen, problem eller situationer som tex symboliska, algebraiska, visuella, geometriska, grafiska, i form av diagram, tabeller, verbala representationer eller konkreta representationer av materiella objekt
- uppfatta inbördes *kopplingar* mellan olika representationsformer och ha kännedom om deras styrkor och svagheter
- kunna *välja* bland och *översätta* mellan olika representationsformer beroende på situation och syfte.

Ett exempel som ges på denna kompetens, är när ett naturligt tal representeras av prickar eller klossar. Ett annat är när ett tal uttrycks i positionssystemet med hjälp av cuisenairestavar eller centikuber och med symboler i hindu-arabisk notation, romerska siffror, kilskrift etc samt vid verbal representation, tex när någon säger fem-miljoner-etthundratjugosextusen-niohundratrettiosju.

Representationer har enligt Erich Wittmann dubbla roller, de kan ses som en konkretisering av abstrakta matematiska begrepp samtidigt som de representerar verkliga objekt (Wittmann, 2005). Han exemplifierar med hjälp av det laborativa materialet markörer. Wittmann beskriver hur de kan fungera som en konkret modell för abstrakta tal, när de används för att visa relationen mellan tal, som exempelvis mellan udda och jämna tal. Å andra sidan kan de användas för att modellera verkliga situationer, som när ett visst antal markörer representerar motsvarande antal personer.

Varför ska elever arbeta med representationer?

I NCTM:s dokument beskrivs hur representationer som exempelvis symboliska uttryck länge varit en del av skolmatematiken, men att de i undervisningen olyckligtvis ofta framstår som att de är helt fristående (Goldin, 2003). Ett sådant synsätt innebär enligt samma källa, att kraften och nyttan med representationer – som redskap för lärande i matematik – begränsas.

Betydelsen av att elever får möjlighet att arbeta med olika representationer i matematikundervisningen återspeglas tydligt i Skolverkets texter:

- Utbildningens kvalitet kan förbättras genom att den i högre grad karaktäriseras av bl a fler inslag av praktiska tillämpningar och konkreta upplevelser av den abstrakta matematiken. Elever behöver få möta fler representationsformer än text, så att fler sinnen aktiveras och därigenom skapar olika möjligheter till lärande, förståelse och upplevelser av att lyckas (Skolverket, 2003b).
- Målet handlar om att kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer genom att uttrycka sig muntligt, skriftligt och i handling med hjälp av vardagligt språk, grundläggande matematiska begrepp och symboler, tabeller och bilder (Skolverket, 2009b).
- För att utveckla ett alltmer abstrakt tänkande kan konkretiserande material och bilder användas parallellt med matematiska symboler och begrepp (Skolverket, 2009b).

I Skolinspektionens rapport *Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet* konstateras emellertid att elever inte alltid får den undervisning de har rätt till (Skolinspektionen, 2009):

Elever får endast undervisning i begränsade delar av ämnet och de får därmed inte förutsättningar att utveckla olika förmågor såsom problemlösning, förmåga att se samband, resonera och uttrycka sig såväl muntligt som skriftligt eller hantera matematiska algoritmer, procedurer. (s 4)

Idéerna om att matematiklärandet utvecklas genom flera representationsnivåer har funnits länge, troligtvis började det med Pestalozzis arbete, även om det är möjligt att spåra grundläggande delar ännu längre bakåt i tiden (Suydam & Higgins, 1977) – och de utvecklas fortfarande (Goldin & Shteingold, 2001). I många studier refereras till den amerikanske psykologen Jerome Bruners tre representationsnivåer, vilka beskrivs på följande sätt i *The mathematics laboratory – Theory to practice* (Reys & Post, 1976):

'Enactive' (handlingsbaserad)

På denna första nivå är eleven fysiskt aktiv; manipulerar, konstruerar eller arrangerar föremål från den verkliga världen. Detta steg är det mest konkreta och här grundläggs begreppen, men de existerar bara så länge eleven kan relatera dem till den verkliga världen. Om eleven får möjlighet att utveckla begreppen kan dessa så småningom bli abstrakta och funktionella då eleven når den symboliska nivån.

'Iconic' (bildmässig)

Den andra nivån identifieras genom att den representerar händelser i den verkliga världen genom beskrivande former som tex verbala formuleringar eller bilder av olika slag.

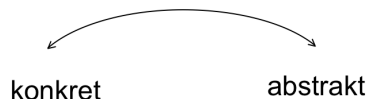
'Symbolic' (symbolisk)

Den tredje nivån är den mest sofistikerade och bygger på att eleven, vid lärande av ett givet begrepp, har erfarenheter från de båda föregående nivåerna. Karaktäristiskt för denna nivå är att all manipulation sker med symboler helt oberoende av de handlingsbaserade och bildmässiga representationerna.

Bruner själv skriver att representationer är kraftfulla, eftersom de gör det möjligt för den lärande att knyta samman uttryck som till det yttre tycks vara helt olika och han anser att detta är särskilt avgörande just i matematik. För en elev som redan har en välutvecklad symbolisk förståelse skulle det vara möjligt att hoppa över de två första stegen. Men, menar Bruner, det finns då en risk för att eleven inte har någon bildmässig representation att falla tillbaka på, om svårigheter uppstår på den symboliska nivån (Bruner, 1966).

I *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik* (Skolverket, 1997) understryks vikten av att en representation av ett begrepp, en idé eller ett problem tydliggörs för eleven och att övergångar och översättningar mellan olika representationer lyfts fram och diskuteras i undervisningen. I flera forskningsartiklar framgår att när elever hanterar laborativa material kan det uppstå diskussioner om matematikinnehållet, vilket kan underlätta för läraren att uppfatta deras tankegångar och läraren får ett tillfälle att "se" hur de tänker (Fennema, 1973; Heddens, 1997)

Richard Lesh framhåller att laborativa aktiviteter inte bara fungerar som en länk från det konkreta till det abstrakta, de kan också fungera som en länk för att hjälpa elever att tillämpa abstrakt matematik i konkreta situationer (Lesh, 1981).



Goldin och Shteingold skriver också fram den dubbelriktade vägen som en viktig aspekt av representationer (Goldin & Shteingold, 2001). För att stegen mellan konkret och abstrakt ska kunna tas behöver broar byggas och läraren behöver noggrant och medvetet välja aktiviteter och material. Om en elev kan lösa ett problem praktiskt men inte abstrakt visar det att bron inte finns (ERIC Development Team, 1990).

Hur kan arbete med representationer ske?

En enskild representation som exempelvis en formel, en ekvation, ett konkret arrangemang av tiobaskuber eller en speciell graf i ett koordinatsystem, kan inte fungera och vara meningsfull på egen hand utan måste alltid ingå i ett större system där dess mening och konventioner har etablerats, förklarar Goldin och Shteingold. Systemet måste också ha en struktur så att olika representationer är starkt kopplade till varandra. Ett sätt att se på representationer, bland annat för att bättre förstå de kognitiva hinder många elever har då de ska tillägna sig vissa matematiska begrepp, är att dela in dem i externa och interna representationer (Goldin & Shteingold, 2001):

- *externa representationer* utgår från matematikens konventionella symbol-språk, t ex sättet att notera i tiobassystemet, den formella algebraiska notationen och hur tallinjen och koordinatsystem används
- *interna representationer* är exempelvis elevens personliga symbolkonstruktioner, eget språk, visuella bilder och förhållande till matematik.

De framhåller att interaktionen mellan interna och externa representationer är fundamental för ett effektivt matematiklärande; att eleverna får möjlighet att utveckla ändamålsenliga interna representationer som sedan ansluter till de externa representationerna.

Goldin och Shteingold anser att det finns möjlighet att öka antalet elever som lyckas väl med skolmatematiken. De menar att elevers begränsningar för att förstå matematik, utan att för den skull förneka existens eller betydelse av olika förmågor, inte i första hand är medfödda. Begränsningarna är snarare ett resultat av att deras inre system av representationer bara är delvis utvecklat och därmed kan medföra hinder, svårigheter och missuppfattningar. De hävdar att ett grundläggande mål för matematikundervisningen är att låta eleverna utveckla effektiva inre representationer som är samstämmiga med de externa representationerna. Goldin och Shteingold tror inte det är en tillfällighet att matematikdidaktiker som Montessori, Bruner och Dienes var överens om att matematiska idéer bör introduceras genom att undervisningen börjar i det konkreta och sedan går vidare till allt mer abstrakta representationer.

Många elever har svårigheter att förstå matematik därför att de på egen hand inte kan göra kopplingar mellan den fysiska och den abstrakta världen (Heddens, 1986). En del elever behöver också uppmärksammas, så att de inte blir beroende av tex ett visst material och alltid måste ha det till hands för att kunna utföra även enkla beräkningar (Barmby, Harries, Higgins & Suggate, 2009). Heddens ger förslag på hur läraren kan hjälpa eleverna att gå från det konkreta arbetet med laborativa material till ett abstrakt matematiskt symbolspråk. Han ser gången som ett kontinuum, en oavbruten följd, som kan delas upp i fyra nivåer:

- I. *Konkret*. Arbeta med laborativa material.
- II. *Halvkonkret*. Den halvkonkreta nivån är en representation av en verklig situation. Laborativa material byts mot bilder.
- III. *Halvabstrakt*. Den halvabstrakta nivån medför en symbolisk representation av konkreta föremål, men symbolerna ser inte ut som föremålen utan består av informella symboler som tex ringar eller streck.
- IV. *Abstrakt*. Bilder och informella symboler ersätts med formella symboler, räkneregler, räknelagar och andra konventioner.

Alistair McIntosh presenterar i *Förstå och använda tal* ett annat sätt att arbeta med representationer än Heddens linjära arbetsgång (McIntosh, 2008). Han ger exempel på tanketavlor där eleverna själva kan välja i vilken ordning de ska ta sig an de olika representationerna. Tanketavlorna kan också fungera som ett redskap för att analysera elevers kunnande eftersom svårigheter att gå mellan olika representationsformer kan vara ett tecken på bristande förståelse. I *A research companion to principles and standards for school mathematics* påpekas också att när elever arbetar med olika representationer hjälper det läraren att förstå hur eleverna tolkar och tänker kring det aktuella matematikinnehållet (Smith, 2003). Eleverna måste dessutom få möjlighet att utveckla förståelse för styrkor och svagheter i olika representationer och diskutera varför de i vissa situationer väljer en representation framför en annan (Monk, 2003; Smith, 2003).

Kristina Juter har disputerat på universitetsstudenters uppfattningar av funktioners gränsvärden. I avhandlingen beskrivs en modell för begreppsrepresentation, vilken utarbetats av den engelske forskaren David Tall, och som består av tre matematiska världar (Juter, 2009). Hon exemplifierar varje steg med hjälp av hur elever kan uppfatta och hantera kommutativa lagen för addition:

1. Den första kallas *the embodied world* (den förkroppsligande) och utmärks av ett undersökande förhållningssätt där den lärande experimenterar med det

aktuella begreppet. Elever kan upptäcka den kommutativa lagen genom att lägga fem klossar med först två i en hög och tre i den andra och sedan arrangera om dem så att det ligger tre i den ena högen och två i den andra. De kan uppfatta den kommutativa lagen utan att för den skull kunna formulera den.

2. Den andra världen kallas *the proceptual world*, vilket är en sammansättning av de två orden *process* (process) och *concept* (begrepp). Begrepp byggs upp under årens lopp och grundar sig på erfarenheter av många slag. I det här fallet handlar det om att elever arbetar med och blir förtrogna med uttryck i formen $2 + 3 = 3 + 2$.
3. I den tredje världen, *the formal world* (den formella världen), uttrycks begreppen formellt med symboler, definitioner och satser. Elever kan generalisera den kommutativa lagen för addition och inse att $a + b = b + a$.

Den lärande befinner sig på olika abstraktionsnivåer under begreppsinnläringen och går mellan de olika världarna beroende på begreppets natur och individens matematiska mognad.

I samtliga ovanstående modeller, vilka berör elever i olika åldersgrupper, finns någon form av uttalad undervisningsgång mellan det konkreta och det abstrakta.

Elevers dokumentation

Det är inte ovanligt att innehållet i lektioner ganska snabbt "dunstar bort", skriver Kirsten Berthold och hennes kollegor i artikeln *Do learning protocols support learning strategies and outcomes?* (Berthold, Nückles & Renkl, 2007). Efter att en lektion har avslutats och de studerande lämnat klassrummet, förklarar författarna, är det inte alltid som det sker någon bearbetning och vidareutveckling av det undervisningsinnehåll som just behandlats. Det kan resultera i bestående luckor i förståelsen, menar de, och i att den långsiktiga behållningen blir svag. Det kan dessutom finnas en illusion om förståelse, vilket den lärande i så fall inte själv kommer att upptäcka.

Detta resonemang kan också, enligt vår uppfattning, vara giltigt även vid laborativ matematikundervisning. Speciellt eftersom när en aktivitet väl är genomförd och materialet bortplockat så finns "ingenting kvar" som visar vad som lärts. I en matematikbok syns däremot, även i efterhand, vilka uppgifter som en elev arbetat med. Vi menar därför att dokumentation är en viktig del i laborativ matematikundervisning och har därför valt att i denna kunskapsöversikt ta med studier som berör dokumentation, även om de inte behandlar ämnet matematik.

Berthold mfl har studerat på vilka sätt användning av lärandeprotokoll ('learning protocols'), som ett redskap för reflektion, kan komma till rätta med den problematik som de inledningsvis beskrev, och på så sätt leda till uppföljning av god kvalitet. I protokollet skriver studenterna ner sina reflektioner kring det aktuella undervisningsinnehållet. De beskriver vad de förstått respektive inte förstått samt vad som behöver göras för att de ska få förståelsen. Författarna menar att skrivandet bidrar till att tankarna skärps. Antagandet att en stor del av vårt kunnande är underförstått, innebär enligt dem att när våra tankar uttrycks explicit blir de också tillgängliga för vårt medvetande. Själva skrivandet underlättar den metakognitiva processen, då skrivandet kräver distans till det egna lärandet och den egna tankeprocessen.

En förutsättning för goda resultat är, enligt Berthold m fl, att studenterna är införstådda med *varför* skrivandet bidrar till förståelse och att det pågår kontinuerligt under en längre tidsperiod. När en serie av protokoll skrivs under en längre tidsperiod, definieras de som lärandejournaler ('learning journals').

Författarna refererar till tidigare studier som visar att det är orimligt att tro att journalskrivandet spontant leder till att eleverna uttrycker sig utförligt och detaljerat. När journaler skrivs utan specifika instruktioner blir de ofta "naiva". I artikeln beskrivs en studie som gjordes på 84 universitetsstudenter i psykologi, vilka fick titta på en inspelad videoföreläsning. Studenterna delades in i fyra grupper som fick olika typer av stödfrågor:

- Den första gruppen fick stödfrågor av kognitiv karaktär direkt kopplade till föreläsningen: Vilka var huvudpöängerna? Vilka kopplingar kan du göra mellan föreläsningen och ditt eget kunnande från skolan och dina egna vardagserfarenheter?
- Den andra gruppen fick generella stödfrågor av metakognitiv karaktär: Vad har jag förstått? Vad har jag inte förstått?
- Den tredje gruppen fick båda kognitiva och metakognitiva stödfrågor.
- Den fjärde gruppen, som var kontrollgrupp, fick inga frågor alls.

Det visade sig att de som fick någon form av stödfrågor hade bättre resultat på förståelsetest efteråt jämfört med kontrollgruppen samt även på ett uppföljande test efter sju dagar. Allra bäst på dessa test lyckades de studenter som fick kognitiva stödfrågor, vilka utgick från den aktuella föreläsningen.

I en uppföljande studie (Nückles, Hübner & Renkl, 2009) fick studenterna också först se videospelningen och därefter skriva ett protokoll, men vissa grupper fick även kompletterande stödfrågor om hur de mer exakt skulle gå tillväga för att komma till rätta med sin bristande förståelse. Exempel: Vilka

sekvenser av videoföreläsningen skulle jag behöva se igen? De fick sedan möjlighet att omedelbart ta itu med det som vållat dem svårigheter. Den grupp som fick både kognitiva och metakognitiva stödfrågor och dessutom direkta frågor om vad som behövdes för att öka förståelsen lyckades allra bäst på de båda efterföljande testen. Lärandejournaler kan på så sätt också vara en självindividualiserande metod, menar författarna. De beskriver det som en metod där den lärande själv kontrollerar och påverkar sin lärandeprocess i positiv riktning. I den mest ultimata situationen tar den lärande personliga initiativ, tillämpar specifika strategier för att uppnå individuellt uppsatta mål och visar sin förståelse för att upptäcka och eliminera eventuella missförstånd.

Förmågan att uttrycka sig skriftligt lyfts fram som ett centralt element i matematikundervisningen i det danska kommentarmaterialet för gymnasiekursplanen i matematik och ses både som ett inlärningsredskap och ett utvärderingsinstrument. Att elever får handledning när de skriver texter i matematikämnet, t ex en rapport eller en artikel till veckobladet, är därför en del av undervisningen (Undervisningsministeriet, 2008).

I en licentiatavhandling har Ewa Bergh Nestlog studerat hur elever i åk 4–6 skriver argumenterande texter inom svenskämnet och hon understryker vikten av att elever får strukturerat stöd i sitt skrivande (Bergh Nestlog, 2009). Vissa elever hade svårt att koncentrera sig på skrivandet och hon menar att de skulle vara betjänta av att arbeta mer muntligt och tillsammans med läraren prata sig fram till formuleringar som de sedan kan skriva ner för att inse sambandet mellan tal och skrift. Bergh Nestlog ser elevers skrivande av argumenterande texter som en del i deras kunskapsprocess och efterlyser forskning om texter och språkutveckling också i andra ämnen än svenskämnet.

Analys och bedömning

När elever arbetar laborativt ger det fler tillfällen att analysera och bedöma deras kunnande än om eleverna får visa sitt kunnande enbart på skriftliga diagnoser och prov (Heddens, 1997). Heddens ger förslag på hur lärare kan få större insikt i elevernas matematiska förståelse genom att

- lyssna till deras diskussioner
- ställa frågor av hur- och varför-karaktär istället för frågor som kort kan besvaras med ja, nej eller en "sifferuppgift"
- låta dem skriva hur de löst problemet istället för att enbart anteckna svaret
- observera hur de arbetar individuellt och i grupp.

Enligt Heddens kan läraren på så sätt rikta sin uppmärksamhet mot elevernas uppfattning av det matematiska begreppet istället för på procedurer. Han menar att när elever arbetar laborativt kan det också ge möjligheter för läraren att upptäcka deras mer eller mindre utvecklade tankestrategier. I artikeln ges exempel på frågor som har sitt ursprung i Pólyas modell för problemlösning och därför kan vara användbara i många sammanhang (Pólya, 1970):

- Hur vet du det?
- Vad händer om ...?
- Varför tror du att ...?
- Vad är det som gör att du tror att ditt svar är korrekt?
- Hur kan du visa att svaret är korrekt?
- Kan du uttrycka ditt svar på ett annat sätt?
- Finns det något annat sätt att lösa problemet?
- På hur många olika sätt kan du lösa problemet? Visa!
- Hur kan du övertyga oss andra om att detta är det bästa sättet att lösa problemet?

Urval vid bedömning

Alla elever ska inte alltid bedömas i alla situationer, det skulle leda till en omöjlig situation för lärare, menar Amy Ryken. Hon föreslår istället att läraren varje vecka koncentrerar sig på att göra ett mindre urval av mer noggranna analyser. Antingen väljs eleverna ut slumpmässigt eller också har läraren ett system som gör att varje elevs lösningar analyseras ett par gånger per läsår. Ibland kanske läraren väljer att närmare granska samma uppgift men som lösts av elever som befinner sig på olika nivåer (Ryken, 2009). Detta sätt att lägga upp analysarbetet – att rikta in sig på några elever i taget – stämmer också överens med de förslag som ges i *Analyschema i matematik* (Skolverket, 2003a, 2009a).

Marja van den Heuvel-Panhuizen diskuterar också behovet av att göra ett urval av problemuppgifter i matematik som ska bedömas (van den Heuvel-Panhuizen, 2005). De problem som ligger till grund för bedömning ska spegla viktiga mål i kursplanen och förse läraren med information om elevens kunande, förståelse, färdigheter samt tankestrategier. Om utgångspunkten för lärarens bedömning är att få insikt i elevernas matematiska tänkande måste därför deras matematiska tänkande bli så synligt som möjligt. Det kan bäst förverkligas när elever arbetar med öppna frågor som kan lösas på flera sätt och på olika

nivåer med möjlighet att formulera svaren med egna ord. Detta innebär, påpekar van den Heuvel-Panhuizen, en form av positivt testande eftersom det visar vad eleven kan – istället för att fokusera på vad eleven ännu inte kan.

Lärarens roll

Litteraturgenomgången visar samstämmigt att lärarens roll är avgörande för vilken effekt den laborativa matematikundervisningen får för elevernas lärande (Ball, 1992; Moyer, 2001; Szendrei, 1996). Lärarens uppgift är att lyfta fram och synliggöra matematiken så att eleverna får ut så mycket som möjligt av aktiviteten.

Didaktiskt perspektiv

I detta arbete har vi valt att lyfta fram två svenska forskare, Gunnar Nilsson och Eva Taflin, som utifrån sina studier beskriver hur lärarens handlande kan skapa förutsättningar för lärande i matematik. Nilsson har i sin avhandling undersökt hur lärarstuderande har arbetat med geometrilaborationer och hur de leder liknande laborationer med elever i grundskola (G Nilsson, 2005). Hans slutsats är att laborationer har en potential för att kunna skapa förståelse och insikter, men att ha "gjort" laborationen behöver inte betyda ökad förståelse eller nya insikter. Nilsson påpekar att vissa förutsättningar, där läraren har en central roll, måste vara uppfyllda. Läraren behöver

- organisera och leda arbetet
- tydliggöra syftet med laborationen för eleverna
- peka på kritiska punkter och ställa utvecklande frågor
- tillsammans med eleverna pröva olika lösningar
- möjliggöra diskussioner mellan eleverna
- ställa krav på det språk som används
- skapa kognitiv konflikt, vilket han ser som ett nödvändigt led i lärandeprocessen för att en förändring i tänkandet ska komma till stånd.

Han menar att en av lärarens funktioner är att vara katalysator och skapa konflikter i felaktiga resonemang som eleven byggt upp. Naturligtvis måste också den lärande vara motiverad och tycka att det är viktigt att få sina tankar att hänga ihop.

Taflin tar i sin avhandling upp hur problemlösning kan vara ett sätt att lära matematik (Taflin, 2007). Hon granskar vilka möjligheter till lärande i matematik som kan ske genom att elever får möta problem som är formulerade med ett visst matematiskt syfte och på ett sådant sätt att alla elever i en klass, på något sätt, kan bidra vid den gemensamma diskussionen. Taflin har inte specifikt studerat hur laborativa material används, även om elever ibland tagit hjälp av dem vid de i avhandlingen beskrivna problemlösningssituationerna. De resultat hon kom fram till anser vi vara giltiga också vid laborativ matematikundervisning. Taflin fann bland annat att det är betydelsefullt att läraren

- på ett genomtänkt sätt presenterar problemet för eleverna
- ger eleverna tillfälle att berätta vad och hur de lärde sig, dvs en metakognitiv frågeställning som kan göra eleverna mer medvetna om sitt eget lärande och som också kan göra eleverna mer ansvarstagande när det gäller det egna lärandet
- håller en gemensam genomgång i slutet av lektionen, så att eleverna inte lämnar lektionen med felaktiga föreställningar.

Taflins slutsatser stämmer väl överens med den tidigare refererade artikeln om lärandeprotokoll (Berthold, et al., 2007).

Två ytterligheter

Szendrei ger exempel på två ytterligheter när det gäller synen på lärarens roll vid laborativt arbete (Szendrei, 1996): Det ena är att skapa en laborativ miljö där eleverna "släpps in" och sedan förväntas lärandet ske av sig självt. Den andra ytterligheten är att eleverna måste få mycket exakta instruktioner om hur de ska arbeta med laborativa material. Ball tar också upp att en av anledningarna till den senare uppfattningen kan vara att läraren strävar efter att minimera riskerna för att eleverna ska "se fel saker" och därför används material så stelbent att det är omöjligt att upptäcka något annat än det avsedda. En annan anledning till att stränga regler sätts upp kan vara tron att eleverna annars "bara kommer att leka med materialet" och inte lära sig någon matematik. Därmed inte sagt att instruktioner inte ska ges, tvärtom är det viktigt att läraren klargör nödvändiga regler (Ball, 1992).

Rolig eller riktig matte?

I en studie följde Moyer under ett läsår hur tio lärare använde laborativa material i sin matematikundervisning för elever i motsvarande senare delen av grundskolan.

Det visade sig att lärarna gjorde tydliga skillnader mellan 'fun math' och 'real math'. Termen "rolig matte" användes av lärarna när de beskrev hur eleverna arbetade med de laborativa materialen och det sågs helt skilt från den ordinarie undervisningen. Termen "riktig matte" refererade till delar av lektioner där lärarna undervisade om specifika färdigheter eller om ett visst matematikinnehåll med huvudsaklig användning av "papper och penna" (Moyer, 2001).

Laborativa material kunde fungera som introduktion, ett kul avbrott eller som avslutning. De plockades ofta fram som en stunds nöje, avkoppling eller som en form av belöning. Lärarna tyckte att de laborativa materialen var kul, men inte nödvändiga för elevernas lärande i matematik. En lärare sa att hon egentligen inte gillade att använda laborativa material, men ansåg själv att hon borde göra det oftare. Moyer hävdar att när material bara tas fram vid speciella tidpunkter skickar lärarna signaler om de laborativa materialens betydelse. En elev som enbart möter laborativa material som "en kul grej" begränsas i sina möjligheter att upptäcka meningsfullt matematiskt innehåll med hjälp av dem. Studien slår fast att om laborativa material i första hand köps in som "rolig matte" utnyttjas de inte optimalt.

I en norsk artikel diskuteras också att ett överflöd av praktiska aktiviteter kan få en olycklig slagsida (Haara & Smith, 2009). Om det är så att eleverna enbart möter matematiken som ett antal roliga händelser utan att de får förståelse för det matematiska innehållet, blir inte resultatet bättre än när de sitter med en massa tråkiga räkneuppgifter i boken. En lärare uttrycker det så här: "If one is bored to death or amused to death, so to speak, becomes irrelevant" (s 44).

Redan i den metaanalys som Suydam och Higgins gjorde 1977 tittade de på 'mathematics laboratories'. I några av de tidigare undersökningar som gicks igenom fanns generella förväntningar på att sådana skulle ge en mycket tydlig positiv effekt, men det visade sig istället inte vara någon signifikant skillnad mellan huruvida 'mathematics laboratories' användes eller ej. En orsak ansågs vara att 'mathematics laboratories' användes mer för 'fun-time' än som en integrerad del i undervisningen. "There seems little reason to us why laboratories cannot be aimed at promoting both curricular and motivational goals" (Suydam & Higgins, 1977, sid 81).

Moyer tar upp ytterligare en aspekt av hur laborativa material kan uppfattas. Ibland bestämmer lärare om eleverna ska få arbeta laborativt beroende på hur de skött sig under den senaste lektionen med laborativa material. Beslutet utgår inte alltid ifrån om det laborativa materialet är lämpligt för att exempelvis ge eleverna förståelse för ett specifikt matematiskt begrepp, utan är mer en fråga om arbetsklimatet för både lärare och elever (Moyer, 2001).

Elevuppfattningar

Hur ser elever generellt på lärarens roll under matematiklektionerna? Här görs först två nedslag, ett i Sverige och ett i Singapore. I *Matematik – en samtalsguide om kunskap, arbetssätt och bedömning* definierar svenska elever vad som utmärker en bra matematiklärare (Myndigheten för skolutveckling, 2007). Eleverna anser att en bra lärare låter dem vara med och påverka innehåll och arbetssätt. Läraren har också höga förväntningar på eleverna och tror på deras förmåga, varierar undervisningen med olika slags uppgifter och alternerar mellan enskilt arbete, laborativt arbete, gemensamma genomgångar och diskussioner.

I Singapore har en studie gjorts av hur elever i motsvarande svenska grundskolans senare del uppfattar sin matematikundervisning (Kaur, 2009). 57 elever som undervisades av tre olika lärare intervjuades efter den senaste lektionen och fick beskriva vad som gör att en matematiklektion uppfattas som "bra". Bland de mest frekventa svaren var att läraren gjorde komplex kunskap lättförståelig genom demonstrationer, laborativa material eller verklighetsnära exempel. I båda länderna tar eleverna upp att de ser användning av laborativa material som en positiv faktor i sin egen matematikundervisning.

I en australiensisk studie har forskare sedan gått ett steg vidare och undersökt elevers attityder till användning av material vid introduktion till algebra (Norton & Windsor, 2008). 24 elever i åk 7 deltog vid totalt 12 undervisningstillfällen under en period på sex veckor. Eleverna kunde efteråt delas in i två grupper utifrån deras attityder till användningen av material. En större grupp ansåg att materialet var till hjälp och en mindre grupp med sex elever tyckte inte det. I intervjuerna framkom att två av eleverna i den mindre gruppen hade starkt negativ syn på värdet av användning av material. De hade svårt att förklara anledningen till detta, men en av dem sa att det förvirrar och att "det är enklare att skriva ner det eller att göra det i huvudet". De övriga fyra i den mindre gruppen tyckte att aktiviteterna inledningsvis var till hjälp för att se mönstret och för att se processen "om du tar steg för steg med materialet blir det mycket tydligare och du får en bild i ditt huvud". Men så snart dessa fyra förstod begreppet eller strukturen föredrog de att avstå från materialet eftersom de tyckte att det fördröjde deras arbete. Eleverna insåg att när de väl förstått begreppet eller processen, var det mer effektivt att använda symboler än att utgå från materialet.

Kompetensutveckling

Sowell fann i en djupare analys av metastudien att i de fall undervisning med hjälp av laborativa material visade ett gott resultat hade lärarna omfattande utbildning (Sowell, 1989). En annan studie visar att det inte räcker med enbart hög utbildningsnivå, utan det beror även på den undervisningserfarenhet som

läraren har (Haara & Smith, 2009). Åtta norska matematiklärare som arbetade med elever i åldrarna 6–16 år, intervjuades om sin syn på praktiska aktiviteter. Lärarna hade olika grad av utbildning, ämneskunnande och undervisningserfarenhet. Samtliga ansågs av skolledning, kollegor och elever vara kompetenta lärare. Det visade sig att de hade en varierande syn på varför praktiska aktiviteter skulle vara en del av undervisningen.

En oerfaren lärare med kort utbildning var entusiastisk och lyfte i högre grad än övriga fram psykologiska och motiverande faktorer som nyttoaspekter och att det ska vara roligt och kreativt. En erfaren lärare med kort utbildning tyckte att hennes undervisningserfarenhet hade gjort att hon blivit allt mer selektiv i sitt val av aktiviteter. Praktiska aktiviteter var en naturligt integrerad del i hennes matematiklektioner, men måste enligt henne, ha ett tydligt syfte. Oerfarna lärarna med lång utbildning var de som var mest tveksamma till att föra in praktiska aktiviteter. I artikeln framgår att undervisning utifrån läroboken var en didaktisk utmaning i sig självt för dem, trots deras omfattande ämneskunnande. Alternativ till traditionell undervisning som tex praktiska aktiviteter prioriterades inte. En av dessa lärare gav exempel på en praktisk aktivitet han mött i utbildningen och som han upplevt som ett positivt inslag, men tyckte ändå det var svårt att själv komma på liknande aktiviteter och han efterfrågade därför tips och inspiration. Lärare som både hade hög nivå på sitt ämneskunnande i matematik och ett utvecklat pedagogiskt kunnande var positiva till att använda praktiska aktiviteter i sin undervisning, men de betonade att en aktivitet måste tillföra nya perspektiv eller åtminstone konkretisera ett matematiskt innehåll på ett sätt som gör att det ökar lärandet bortom möjligheterna med traditionell undervisning. Det var matematikinnehållet som avgjorde om de skulle ta hjälp av en aktivitet eller inte.

Sammanfattningsvis konstateras att både ämneskunnande och didaktisk kunskap påverkade lärarnas syn på praktiska aktiviteter. De oerfarna lärarna hade inte samma ämnesrelaterade argument för varför praktiska aktiviteter ingick, eller inte ingick i deras matematikundervisning, som de mer erfarna lärarna. Det påpekas i artikeln att på grund av det begränsade antalet deltagande lärare i studien kan inga generaliseringar göras, men att resultatet är intressant och kan ligga till grund för fortsatta studier. Det framkommer ändå att flertalet av lärarna hade en tydlig önskan om kompetensutveckling och några antyder att de skulle ta in fler praktiska aktiviteter i sin undervisning när de fått mer undervisningserfarenhet.

Ball lyfter fram att studier också har visat att lärare har brister när det gäller kunnande om hur matematiska idéer kan uttryckas med olika representationer. Många lärare är kompetenta när det gäller procedurer i matematik, men de saknar egna erfarenheter av att arbeta laborativt. De tycker att det är svårt att välja

mellan olika material och metoder (Ball, 1992). Även Moyer framhåller vikten av kompetensutveckling som bidrar till att lärare får en mer grundläggande förståelse för hur laborativa material kan ses som verktyg i undervisningen. Lärare behöver reflektera över hur eleverna uttrycker sitt kunnande i matematik och hjälpa dem att utveckla allt mer förfinad och abstrakt förståelse, menar Moyer. Detta är inte lätt, skriver hon, det är en utmaning för läraren att

- tolka elevernas uttryck för sitt kunnande i matematik
- uppmärksamma och visa på samband till andra matematiska idéer
- utveckla lämpliga sammanhang för lärande i matematik (Moyer, 2001).

Szendrei instämmer i att det inte är okomplicerat att planera en process som går från att elever arbetar med laborativa material till att de får insikt i ett abstrakt matematiskt innehåll. Även om lärare har lämpliga strategier för laborativ matematikundervisning, påverkas den av deras egna uppfattningar om hur elever lär (Szendrei, 1996).

Moyer refererar till studier som framhåller själva användandet i sig som positivt – elever och lärare tycker det är kul (Moyer, 2001). Men det räcker inte, utan fokus måste riktas mot *hur* och *i vilket syfte* läraren utnyttjar material i undervisningen. Ball är av samma åsikt och menar att sammanhanget i vilket laborativa material eller bilder används, är lika viktigt som materialen i sig (Ball, 1992). Hur arbetar eleverna med materialen? I vilket syfte? Mot vilka mål i kursplanen? Hur förs diskussioner? Hur sker interaktionen mellan lärare och elev?

Laborativ matematikundervisning

Följande studier berör både möjligheter och begränsningar som finns när elever arbetar laborativt. Några studier är inte fokuserade på matematik men deras resultat är intressanta att ta hänsyn till vid planering och genomförande av laborativ matematikundervisning. Det gäller studier kring dokumentation samt laborativt arbete i no-ämnen. En kort diskussion förs också om slöjdprocessen.

Kopplingar mellan representationer

Laborativ matematikundervisning innebär att på olika sätt gå mellan det konkreta och abstrakta och förmågan att använda olika representationer är därmed betydelsefull vid lärande. Studier visar att elever har svårigheter att översätta mellan representationer, de uppmärksammar tex inte likheter och skillnader. Det har visat sig att elever kan förstå en representation och dess relation till den matematiska idén, men de kan inte se hur representationer relaterar till varan-

dra, de behöver stöd i att göra dessa kopplingar (Ainsworth, 2006; Barmby, et al., 2009). Eleverna behöver handledning så att de uppfattar sambandet mellan den laborativa aktiviteten, den egna informella förståelsen och de abstrakta symbolerna (Clements, 1999). Det har gjorts studier av yngre barn, då de i organiserade aktiviteter får hjälp att se samband mellan sitt informella kunnande och den mer formella skolmatematiken. Resultaten visar då på positiva effekter i deras matematiska förståelse (Clements, 2007).

Begreppsutveckling utifrån variation

Dienes förespråkade tidigt ett elevaktivt arbetssätt som inbegriper många laborativa material (Dienes, 1960). Han etablerade flera principer på vilka matematikundervisningen bör baseras och några av dessa berör särskilt laborativa material:

- *'Mathematical variability principle'* innebär att om eleverna ska få full förståelse för ett begrepp måste variablerna varieras så att det framgår vad som är konstant och vad som kan variera. Om det aktuella begreppet är parallelogram kan formen varieras genom att vinklarna, sidornas längder och riktningen ändras, så länge de motstående sidorna behålls parallella.
- *'Perceptual variability principle'* betyder att eleven ska få möta ett begrepp genom olika fysiska former, men på samma svårighetsnivå, för att förstå det väsentliga i ett abstrakt matematiskt begrepp. Det skulle t ex kunna innebära att parallelogrammen presenteras som en utklippt pappskiva, i tyg eller trä, som form på ett trädgårdsland, etc.

Idag pågår intensiv forskning och många utvecklingsarbeten där utgångspunkten tas i den variationsteori som utvecklats för studier av lärande vid Göteborgs universitet. Detta innebär att lärandeobjektet står i fokus, dvs vad eleverna förväntas lära sig, att urskilja vad just detta lärande kännetecknas av och att identifiera vilka de kritiska punkterna är. Lärarna utgår från vad som är problematiskt, som exempelvis vad eleven måste uppmärksamma för att uppfatta innehållet på det avsedda sättet (Runesson, 2007; Runesson & Ah Chee Mok, 2005). Variation är i detta sammanhang relaterat till hur innehållet i lärandet behandlas – det handlar inte om variation i allmänhet eller om tex variation av arbetssätt. Om någonting varierar och något annat hålls konstant, finns det större möjligheter att uppmärksamma det som varierar.

Ulla Runesson och Ida Ah Chee Mok visar hur ett laborativt material har använts för att framhålla variation i det som ska läras. I en studie använde läraren rätblock byggda av centikuber för att lyfta fram olika aspekter av en halv. Oavsett det totala antalet kuber var alltid hälften av antalet vita. Eleverna svarade på frå-

gan om hur många som var vita och läraren skrev deras svar på tavlan: $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$. Läraren bad därefter eleverna att finna likheter mellan bråken. En elev uttryckte det som att *alla är en halv*. I detta fall jämfördes den relativa storleken (*andelen* vita kuber) och den absoluta storleken (*antalet* vita kuber). Den relativa storleken hölls konstant medan den absoluta varierade. Elevernas uppmärksamhet drogs till aspekten storlek hos olika bråk. Skillnaden mellan relativ och absolut storlek kunde uppfattas visuellt med hjälp av kuberna.

I en undersökning beskrivs varför ett stort antal yngre elever har svårigheter med bråkbegreppet (Cramer, Post & delMas, 2002). En orsak som lyfts fram är att många elever bara har ett fåtal konkreta erfarenheter av bråk och att de sällan får tillfälle att diskutera dem. Det påpekas att om eleverna först fick ägna gott om tid åt de grundläggande begreppen, skulle mycket tid i senare årskurser som nu läggs på att komma tillrätta med elevers missuppfattningar och svårigheter med procedurer kunna minskas.

Elevers initiala lärande om bråk undersöktes genom att två olika arbetssätt jämfördes (Cramer, et al., 2002). Det ena var mer traditionellt i meningen att papper och penna användes för beräkningar baserade på standardrutiner, det andra betonade aktiviteter med många laborativa läromedel och översättningar mellan och inom olika representationer som bild, laborativa material, talat språk och symboler. Undersökningen varade i sex veckor och grundade sig på följande antaganden:

- barn lär bäst genom aktivt arbete med många konkreta modeller (Dienes)
- fysiska hjälpmedel är bara en komponent i förvärvandet av begrepp – språkliga, bildmässiga, symboliska och verklighetsanknutna representationer är också viktiga (Lesh)
- barn ska ges möjlighet att samtala med varandra och med läraren om matematiska idéer (Johnson & Johnson)
- utvecklandet av begreppslig förståelse måste prioriteras före formellt arbete med symboler och algoritmer (Hiebert).

I undersökningens senare tester visade sig signifikanta skillnader inom fyra områden. Eleverna i "den laborativa gruppen" hade starkare begrepps-förståelse av bråk, de kunde bättre bedöma den relativa storleken av två bråk och de använde denna kunskap för att uppskatta summor och differenser. De var också bättre på att ta hjälp av sin förståelse av bråk för att lösa uppgifter som de inte direkt hade fått undervisning om än eleverna i "papper och penna-gruppen". I två områden framkom ingen skillnad: att uttrycka värdet av ett bråk på olika sätt och i additions- och subtraktionsuppgifter med symboler. Det sistnämnda

ansågs förvånande eftersom eleverna i "papper och penna-gruppen" hade fått mycket mer tid till detta än eleverna i "den laborativa gruppen".

Två varianter av undervisning

I en studie sattes fokus på hur elever i motsvarande skolår 6–8 använde laborativa material när de under sex veckors tid fick fri tillgång till sådant (Moyer & Jones, 1998). Den fria tillgången innebar att de skulle ha en korg med laborativa material på eller i direkt anslutning till sin arbetsplats. Genom en omsorgsfull process hade tio lärare valts ut där ena hälften bedömdes ha en strukturerad och tydligt lärarstyrd undervisning (dessa lärare och deras elever benämns i fortsättningen grupp 1) och andra hälften ansågs ha en friare och mindre lärarstyrd undervisning (på motsvarande sätt benämnd grupp 2).

Inledningsvis diskuteras att det i tidigare studier har visat sig att elever motsvarande dem i grupp 2 har en större inneboende motivation och är mer uppmärksamma än elever som i grupp 1. Detta påverkar även elevernas matematiska tänkande. Ett exempel som ges är att då sistnämnda elever blir ombedda att förklara stegen i en lång division svarar de (vår översättning): "Jag vet inte varför jag flyttade ner siffran, men min lärare sa att man ska göra så" (s 4). Den lärarstyrda undervisningen uppfattades innan studien påbörjades, som att den kunde hindra elevers kritiska och självständiga tänkande.

I Moyer och Jones studie visade det sig att det varierade mycket i hur eleverna kom att utnyttja korgarna. I grupp 1 sattes tydliga regler upp för hur materialet skulle användas i undervisningen. Dessa lärare upplevde att klassrumsarbetet fungerade bra, att eleverna tog hjälp av material på ett förnuftigt sätt och de påpekade att enbart ett fåtal småsaker försvann. I grupp 2 var lärarna skeptiska till elevernas fria tillgång till material och första veckan var det mer eller mindre kaos i flera av deras klassrum, vilket ledde till att några av lärarna aldrig blev riktigt bekväma med korgarna. De sa sig också vara tvungna att ofta ge tillrättvisningar till elever på grund av olämpligt beteende. Många av lektionerna i grupp 2 tycktes sakna struktur och syfte.

Elever i grupp 1 var först tveksamma, men efter hand som de blev vana vid innehållet i korgarna började det att användas allt mer. Deras lärare var själva vana och erfarna med material, vilket gjorde att de brukade det på flera olika sätt och de var mer öppna för att låta eleverna undersöka och hitta olika användningssätt av materialet. Detta återspeglades i elevernas beteende, de blev mer öppna för att finna och acceptera olika strategier och lösningar på problem. Det var sällan eleverna valde olämpligt material och ifall de ändå gjorde det kom de oftast själva på att de skulle byta, eller blev upplysta om det av en kamrat. Det var

inte ovanligt att eleverna tog fram material och upprepade aktiviteter vid andra tillfällen under skoldagen och att de exempelvis hittade på egna spel.

Elever i grupp 2 var till en början mycket upprymda över att få fri tillgång till material, de tyckte det var kul, men samtidigt var de tveksamma eftersom de inte riktigt säkert visste när de verkligen fick lov att arbeta med det. Deras lärare hade, som grupp betraktad, betydligt fler års erfarenhet av läraryrket, men mindre erfarenhet av att arbeta laborativt vilket gjorde att de inte var så bekväma med det. Detta ledde till att korgarna användes med mindre variation och det var sällan som eleverna uppmuntrades till att undersöka och upptäcka med hjälp av materialet. Här uppgav lärarna oftare att de var frustrerade, att det var stökigt och att eleverna mest lekte. I slutet av undersökningsperioden rapporterade ändå de flesta lärarna att eleverna hade börjat arbeta med materialet på ett, enligt dem, ändamålsenligt sätt.

Moyer och Jones skriver att när elever ges möjlighet att själva ansvara för hur material ska väljas och användas gör de det, efter lite ängslan i början, men sedan allt mer spontant och när de själva anser sig ha behov av det. Undersökningen visar också att de flesta elever kan tillgodogöra sig arbete med laborativa material, men utifrån de förutsättningar som ges i klassrummet tar det olika lång tid innan det fungerar optimalt. En slutsats som dras i rapporten är att vid användning av laborativa material underlättar det om läraren har erfarenhet av att arbeta med materialen. En annan slutsats är att läraren måste organisera yttre ramar inom vilka eleverna vet att de kan "röra sig fritt".

Liknande metoder – olika resultat

Liping Ma visar att även om lärare undervisar med liknande undervisningsmetoder kan det ändå leda till att eleverna får olika förståelse i matematik beroende på lärarnas varierande ämneskunnande. I intervjuer sa de flesta av 23 amerikanska lärare att de använde laborativa material i syfte att underlätta för elevernas förståelse. Men, skriver Ma, "a good vehicle, however, does not guarantee the right destination" (Ma, 1999, s 5). Resultatet av elevernas lärande utifrån laborativa material berodde till stor del på deras lärare. Ma beskriver hur olika lärare utgick från material för att eleverna skulle få förståelse för subtraktion som $53-25$. Det kritiska vid beräkningen ansågs vara att inse att ett tiotal är lika med tio ental. I ett fall beskrev en lärare hur hon visade detta med hjälp av glasspinnar som var sammanbuntade tio och tio med gummisnoddar och som hon tog isär för att få fram tio ental, vilket i sin tur underlättade att få fram rätt svar. Eleverna fick sedan göra samma sak och efter många övningar gå vidare med nya subtraktionsuppgifter, med eller utan glasspinnar. Ma menar att här är fokus på proceduren. Eleven gör på samma sätt som läraren, delar upp 1 tiotal pinnar i 10 ental för att

göra själva beräkningen enklare. Även om läraren beskriver räkneproceduren tydligt, så beskrivs inte alls det underliggande begreppet.

En annan lärare beskrev hur hon ville hjälpa eleverna att få förståelse för att varje bunt består av 10 pinnar: att det är 1 tiotal *eller* 10 ental. Hon ville tydligt få fram att tex 5 tiotal och 3 ental är detsamma som 4 tiotal och 13 ental. Syftet var att eleverna skulle se idén med relationer inom tal samt att tiotal kan växlas till ental och vice versa. Denna lärare tog hjälp av materialet för att det skulle representera det underliggande matematiska begreppet i proceduren. Ma understryker att det är nödvändigt att läraren hjälper eleverna att se sambandet mellan det laborativa materialet och den matematiska idén.

Verklighetsnära material och /eller arbetsblad

Skillnaden i elevers matematikresultat undersöktes efter att två grupper om sammanlagt ca 70 elever i motsvarande de tidigare åren i grundskolan hade undervisats med antingen laborativa material eller arbetsblad (Cain-Caston, 1996). De elever som hade fått en undervisning baserad på arbetsblad presterade på en för åldersgruppen normal nivå, medan de elever som undervisats med hjälp av laborativa material uppvisade ett resultat två nivåer högre. I de till testen hörande resultatskalor hamnade "arbetsbladsgruppen" på 65 medan "materialgruppen" fick resultatet 81.

I en amerikansk studie av 113 elever i 9–12-årsåldern beskrivs hur de löser textuppgifter som handlar om pengar (McNeil, Uttal, Jarvin & Sternberg, 2009). Eleverna delades in i tre grupper:

- Grupp 1 fick tillgång till sedlar och mynt som i hög grad liknade riktiga pengar, men inte papper och penna.
- Grupp 2 fick sedlar och mynt som var mer schematiska och icke-realistiska. En endollarssedel motsvarades av ett papper i samma storlek som en riktig sedel, men med enbart en tryckt etta på. Mynten bestod av vita cirkelformade pappersbitar där 1c respektive 10c var tryckt med svart. Eleverna hade också tillgång till papper och penna.
- Grupp 3 hade endast tillgång till papper och penna.

Resultatet visade att de elever som inte hade tillgång till laborativt material lyckades något bättre än de som hade det. Författarna poängterar att skillnaden var liten och varnar för att dra alltför stora slutsatser utifrån denna jämförelse. Förklaringen ansågs vara att det verklighetsnära materialet kunde leda eleverna bort från de matematiska begrepp som det laborativa materialet förväntades representera. Det var inte heller säkert att eleverna automatiskt uppfattade den

bakomliggande matematiska idén. Alla elever kanske inte förstod att en dollar och 10 cent samtidigt var ett uttryck för \$1.10. Undersökningen gjordes i en provsituation och de elever som hade tillgång till sedlar och mynt fick därför ingen undervisning om på vilka sätt de kunde ta hjälp av dem för att komma fram till korrekta lösningar. De förväntades hitta metoder på egen hand.

I en uppföljande studie deltog 85 elever i 10–11-årsåldern där forskarna undersökte i hur hög grad eleverna uppvisade fel som berodde på begreppsliga respektive icke-begreppsliga missförstånd. En uppgift bestod av att räkna ut hur mycket en pojke ska ha tillbaka på en 5-dollarssedel när han köper två saker som kostar \$0.20 resp \$1.15. Att addera alla tal i uppgiften: $\$5.00 + \$0.20 + \$1.15 = \6.35 bedömdes som tecken på ett begreppsligt missförstånd.

I den nya studien blev resultatet omvänt, dvs grupp 1 som hade tillgång till realistiska sedlar och mynt hade färre fel som kunde härledas till begreppsliga missförstånd. Grupp 3 som inte alls hade tillgång till sedlar och mynt hade störst andel fel som berodde på begreppsliga missförstånd. Anledningen till skillnaden ansågs vara att när eleverna hade tillgång till pengar var de mer benägna att dra fördel av sitt informella kunnande och de var mer känsliga för svaren de fick fram. Utgick de i exemplet ovan från en 5-dollarssedel och köpte två saker, insåg de att svaret inte kunde bli \$6.35. I grupp 3 som inte hade pengar tycktes eleverna ha lättare för att ignorera sin omvärldskunskap. Skillnaden mellan grupp 2 och grupp 3 var inte statistiskt signifikant.

Det skrivs också fram att i en traditionell provsituation kan ett verklighetsnära material som eleverna inte tidigare använt under matematiklektioner leda till förvirring. I andra situationer där elever inte ska prestera så felfritt som möjligt, kan det istället vara en fördel att utgå från verklighetsnära material, menar författarna. När elever diskuterar utifrån laborativa aktiviteter kan det vara en poäng att även missförstånd uppstår. Dessa kan då synliggöras i klassen, tas upp till diskussion och redas ut. Dessutom kan läraren utnyttja det verklighetsnära materialet så att eleverna kan se relationen mellan det och matematiken.

Eleverna ser något annat

Ball (1992) för också en diskussion om att lärare kan överskatta möjligheten att påvisa matematiska idéer med laborativa material eftersom de genom sin egen matematiska förståelse kan "se" begreppen. Elever som inte har samma matematiska förståelse kan "se" annat. De kan tolka ett material på ett helt annat sätt än det som läraren avsett. Hon ger ett exempel när en elev med hjälp av bråkstavar ska undersöka vilket som är störst: tre tredjedelar eller fem femtedelar? Eleven svarar att det är fem femtedelar eftersom det är flest bitar. I detta fall, förklarar Ball, kämpade eleven med att försöka lista ut vad det var han skulle uppmärks-

samma. Var det antalet bitar? Var det storleken på bitarna? Att eleven kan "se" något annat än läraren planerat kan jämföras med Vygotskijs diskussion om hur olika ett och samma schackbräde kan uppfattas av personer beroende på deras varierande kunskaper om spelet (Cobb, 1995). Den som inte är insatt i schackspel kan "se" pjäserna enbart utifrån de yttre egenskaperna medan en person som är väl förtrogen med spelet och dess regler, kan "se" en helt annan mening grundat på pjäsernas värde och positioner.

Olämplig användning

Ibland används laborativa material på olämpliga eller rent av felaktiga sätt (Baroody, 1989; Szendrei, 1996). Cuisenairestavar kan komma till mycket god nytta för att elever ska få förståelse för exempelvis mätandets princip eller för bråkbegreppet, men Szendrei ger också exempel på felanvändning när elever blir uppmanade att memorera färg kopplat till tal, "vit = 1". Här reduceras användningen av cuisenairestavar till triviala räkneövningar i addition, i stället för att vara ett material som kan utnyttjas för att, i varierande svårighetsgrad, visa relationer mellan tal. Vid exempelvis bråkräkning måste en stav kunna representera olika tal, ibland är det den gula staven som är det hela, ibland den svarta. Att använda stavarna på det sättet blir omöjligt om eleven redan på förhand "vet" att den gula staven "är 5". Arthur Baroody återberättar en liknande historia om elever som fann sin egen väg då de skulle använda cuisenairestavar tillsammans med speciella arbetsblad för att finna summor. De tog den vita staven (kuben) som mått och gjorde egna markeringar på de andra stavarna. Baroody ifrågasätter inte värdet av cuisenairestavar, men undrar om det inte hade varit lämpligare att dessa elever, vid denna typ av uppgifter, fått använda byggbara kuber istället.

I en artikel beskrivs ett annat exempel då laborativt material används på ett mindre lämpligt sätt (Ball, 1992). En elev visar att han har missuppfattat begreppet udda och jämna tal då han ritar cirklar på rad som delas in i grupper med hjälp av streck och han kommer fram till att ett tal samtidigt kan vara både och. Eleven får därför cirkulära markörer, men han lägger upp dem på samma sätt som då han ritade cirklar. I det här fallet bidrar inte materialet till att han kan upptäcka vad begreppet faktiskt innebär. Under våra kommentarer senare i texten ges förslag på hur material istället kan utnyttjas för att elever ska få förståelse för udda och jämna tal.

Hypotes och feedback

När elever arbetar med problemlösning bör de uppmanas att både ställa en hypotes och att sedan kontrollera sin förutsägelse, så att de omgående får feedback

(Battista, 1998; Battista & Clements, 1996; Pang, 2009). Michael Battista beskriver hur en sådan arbetsgång kan utformas för att utveckla elevers spatiala förmåga. Exempel ges på hur elever arbetar med volymberäkning genom att de först ska fundera över hur många kuber som får plats i avbildade lådor av olika storlek och därefter kontrollera med hjälp av material – kuber och lådor som de själva tillverkat i papper. Att börja med att försöka förutsäga resultatet är nödvändigt, menar han, därför att antagandet visar den uppfattning eleven för tillfället har om volym. Genom att både göra förutsägelser och sedan testa dem, får eleverna redskap för att reflektera över sitt sätt att tänka, vilket i sin tur kan hjälpa dem att förfinas och utveckla sitt tänkande kring det matematiska begreppet. Om eleverna endast fyller lådor med kuber och lämnar ett korrekt svar, ger det inte underlag för reflektion därför att

- det är skillnaden mellan förutsägelse och faktiskt resultat som bidrar till förändring av tankestrukturen
- elevernas uppmärksamhet riktas mer mot "görandet" än mot det egna tänkandet.

I en israelisk studie undersöktes, i ett liknande syfte, hur ett välstrukturerat arbetssätt kan bidra till att skapa förändringar i elevers matematiska tänkande (Schwarz & Linchevski, 2007). 60 elever i 15-årsåldern var indelade i två grupper, en experimentgrupp och en kontrollgrupp. De samarbetade två och två med problem som handlade om proportionalitet. Till varje uppgift fanns två par av block (AB och CD) avbildade på papper och eleverna skulle diskutera den relativa vikten av C och D. I experimentgruppen uppmuntrade samtalsledaren till diskussion (tex övertyga oss andra om det), ställde frågor (tex vad händer om ...?) samt bad om förtydliganden ifall hon inte förstod vad eleverna menade. I slutet av diskussionen tog samtalsledaren fram en balansvåg och exakt samma uppsättning av block som i den aktuella uppgiften. Om vägningen inte stämde med elevernas tidigare resultat uppmanade hon eleverna att diskutera varför den inte gjorde det. I kontrollgruppen fick eleverna inte något stöd när de skulle argumentera för sitt tänkande.

Experimentgruppen visade betydligt bättre resultat på det individuella testet som genomfördes tre veckor senare. Detta ansågs bero på två faktorer. Det ena var att eleverna praktiskt hade fått testa sin hypotes genom att själva väga de olika blocken på en balansvåg och därmed fått omedelbar feedback. Det andra var att samtalsledaren medvetet skärpte elevernas argumentationsförmåga. Studien visade att det var först efter att eleverna själva hade testat sin hypotes med hjälp av balansvågen som diskussionen verkligen ledde till begreppsutveckling. Författarna menar att det inte är alla diskussioner som leder till begrepps-

utveckling, utan att det krävs både indirekt och direkt handledning. Indirekt handledning innebar i detta sammanhang att eleverna själva kunde testa sin hypotes. Direkt handledning innebar att samtalsledaren ställde frågor om orsak, bad om klargöranden och gav antydningar om samband mellan olika åsikter. Att ställa frågor om orsak kan vara ett exempel på kognitivt utmanande frågor, vilket tas upp i nästa stycke.

Kognitivt utmanande frågor

I en amerikansk studie uppmärksammas behovet av kognitivt utmanande uppgifter. I studien ingick 32 lärare som undervisade elever i åldrarna 11–15 år i matematik och syftet var att undersöka i vilken grad som lärarna använde sig av uppgifter av hög kognitiv respektive låg kognitiv karaktär (Silver, Mesa, Morris, Star & Benken, 2009). Uppgifter av hög kognitiv karaktär uppfyller enligt forskarna minst ett av följande kriterier:

- eleven förklarar, beskriver, motiverar, jämför eller bedömer
- eleven tar beslut och gör val, planerar eller formulerar frågor eller problem
- eleven är kreativ på något sätt, som t ex genom att använda en känd procedur på ett nytt sätt
- eleven arbetar med fler än en representation på ett meningsfullt sätt t ex genom att översätta från en representation till en annan eller att förklara sambandet mellan två eller flera representationer.

Uppgifter av låg kognitiv karaktär uppfyller minst ett av följande kriterier:

- eleven behöver endast utföra rutinfärdigheter i för dem redan kända procedurer
- de är potentiellt utmanande, men görs rutinmässiga då läraren "lotsar" eleven, delar uppgiften i ett antal ej utmanande delfrågor eller ger förslag på lämplig lösningsmetod
- eleven behöver endast ge förklaringar av icke-matematisk natur, t ex värderande omdömen: var det lätt eller svårt, kul eller tråkigt?

Resultaten visade att av samtliga undersökta undervisningssituationer var det endast 30 procent som ansågs vara av hög kognitiv karaktär. Av 43 situationer som innehöll någon form av laborativa aktiviteter var det 20 som uppfyllde kriterierna för hög kognitiv karaktär. Författarna menar att lärarna inte alltid tar till vara möjligheten att t ex vid laborativt arbete använda kognitivt utmanande uppgifter på ett systematiskt sätt. De efterlyser lärarhandledning om hur upp-

gifter kan utformas så att elever får ökade möjligheter att lära matematik. Deras resonemang stämmer väl överens med Nilssons studie, där han framhåller vikten av att skapa kognitiv konflikt för att en förändring i elevens tänkande ska ske (G Nilsson, 2005).

I en annan studie (Sahin & Kulm, 2008) undersöktes hur två lärare under fem matematiklektioner använde tre olika kategorier av frågor till elever i motsvarande grundskolans mellersta del.

- Den första kategorin bestod av *undersökande frågor* där eleverna uppmanades att förklara eller närmare utveckla sitt tänkande, ta hjälp av tidigare kunskap eller att pröva sina idéer.
- Den andra kategorin bestod av *guidande frågor* där läraren ställde stödfrågor om nästa steg, eleverna ombads att fundera om det fanns någon generell Lösingsstrategi som kunde vara lämplig eller där läraren ställde en serie frågor som kunde ge eleverna en fingervisning om hur de kunde gå vidare.
- Den tredje kategorin var *faktabaserade frågor* där eleverna tillfrågades om sakuppgifter, definitioner eller ett specifikt svar på en viss uppgift.

Den ena läraren var nytexaminerad och den andra läraren betraktades i studien som en erfaren lärare. Resultatet visade att de mest frekventa frågekategorierna hos båda lärarna var de faktabaserade frågorna. I artikeln påpekas att så har lärares frågor sett ut under åtminstone de senaste hundra åren. Anledningen anses vara att faktabaserade frågor kan ställas många gånger under en lektion men med varierande innehåll. Den nytexaminerade läraren ställde överlag mer undersökande frågor än den mer erfarna läraren. Men, i de situationer som den erfarna läraren använde laborativa material tenderade även hennes undersökande frågor att öka. Detta förklaras med att de laborativa materialen kan bidra till att eleverna blir mer involverade och att de därför också får fler undersökande frågor. I artikeln efterlyses ytterligare forskning för att undersöka detta förhållande i ett större sammanhang.

Lovisa Sumpter har i sin avhandling studerat hur svenska gymnasieelever resonerar när de löser uppgifter i matematik och hon fann att imitativt resonemang dominerade, medan kreativt resonemang var sällan förekommande (Sumpter, 2009). Imitativt resonemang innebär att komma ihåg inlärt stoff och att muntligt eller skriftligt återge ett fullständigt svar. Eleverna kan på en ytlig nivå kopiera tidigare procedurer eller följa en annan persons handledning utan att ifrågasätta varför det ledde till en korrekt lösning av uppgiften. Med kreativt resonemang menas att resonemanget är ”nytt” för den person som ska lösa uppgiften eller att det glömts bort men återuppväcks. Resonanget ska dessutom vara rimligt, dvs eleven ska kunna motivera varför slutsatserna är sanna eller

troliga och det ska också vara matematiskt grundat. I diskussionen efterlyser Sumpter forskning om hur elever i för- och grundskolan resonerar i matematik. Hon refererar till de svenska resultaten på TIMSS 2007 och lyfter fram behovet av att flytta fokus från procedurer till kreativa och väl grundade matematiska resonemang. Sumpter menar att hennes avhandling visar att ett dominant fokus på imitativt resonemang tycks vara en begränsande faktor för eleverna vid problemlösning.

Gemensamma referenspunkter

Per Nilsson har i sin avhandling studerat hur elever i 12–13-årsåldern med utgångspunkt i speciellt utformade tärningsspel kan resonera om och hantera experimentella situationer som kräver förståelse av slump och sannolikhet (P Nilsson, 2006, 2009). Han fann att de aktuella tärningsspelen resulterade i två positiva undervisningsmässiga värden. För det första kan didaktiskt utformade spel utmana elevers förgivettagande och få dem att reflektera över de matematiska principer som läraren vill att de ska förstå. För det andra kan läraren använda spelsituationerna som gemensamma referenser. Eleverna gör upptäckter i spelsammanhanget som både de och lärarna kan gå tillbaka till och utnyttja i den fortsatta undervisningen. Han fascinerades av hur naturlig nyfikenhet och vilja att utforska och förstå sin omvärld kan utvecklas hos elever när de fångas av en aktivitet som intresserar dem. I sina studier har han tydligt sett hur denna nyfikenhet och vilja kan driva elevers lärande. ”Vad jag menar är att den typ av situationer som tärningsspelen representerar kan frambringa matematiska förmågor hos elever som många gånger aldrig får tillfälle att träda fram och gro om undervisningen enbart sker på basis av texten i en lärobok” (P Nilsson, 2009, s 118).

Förebyggande arbete

Goldin och Shteingold ger ett exempel på hur en medveten undervisning med representationer kan underlätta för elevers förståelse och förhindra att elever får svårigheter (Goldin & Shteingold, 2001). En vanlig inlärningsgång är att eleverna räknar antal, adderar och subtraherar med hjälp av laborativa material och därefter gör beräkningar med skrivna siffror. Yngre elever lär sig tidigt i skolan att ”du kan inte ta bort ett större tal från ett mindre” och när sedan negativa tal införs, måste de ändra i sin förståelse. Författarna refererar till forskare som kritiserar denna inlärningsgång eftersom den kan leda till missuppfattningar och som istället argumenterar för att det är möjligt med en tidigare undervisning om negativa tal med laborativa material. Det finns i artikeln beskrivet hur tvåfärgade

markörer, där en färg representerar positiva tal och den andra färgen negativa tal, kan användas i denna alternativa inlärningsgång.

Även i specialundervisning kan modellen med de tre stegen 'concrete' – 'representational' – 'abstract' (i viss litteratur förkortad till CRA) användas. The Access Center beskriver utifrån forskningsresultat hur CRA kan öka matematikresultaten för dessa elever (The Access Center, 2004). I texten ges tydliga exempel på hur läraren kan använda de tre stegen i specialundervisning i motsvarande grundskolan. Det framhålls att med CRA går det att stödja elevernas förståelse för de underliggande matematiska begreppen innan de börjar "lära sig regler".

Uppföljande diskussion med elever

Liping Ma har jämfört kinesiska och amerikanska lärares förståelse av grundläggande matematik (Ma, 1999). De kinesiska lärarna hade kortare utbildning än sina amerikanska kollegor, men de hade ändå ett djupare kunnande i matematik. Förväntningarna på elevers kunnande gick också att relatera till lärarnas eget ämneskunnande. En avgörande skillnad mellan de amerikanska och kinesiska lärarna var att de kinesiska lärarna hade en uppföljande klassdiskussion efter den laborativa fasen, vilket de amerikanska inte hade. De kinesiska lärarna följde upp arbetet med att eleverna skulle rapportera, visa, förklara och argumentera för sina lösningar. I aktiviteter som involverade laborativa material och speciellt i den efterföljande diskussionen gavs eleverna möjlighet att ställa frågor vilka kunde leda vidare till en fördjupad förståelse i matematik. Det var här som länken mellan det laborativa materialet och de abstrakta symbolerna kunde etableras. Att undervisning ska avslutas med någon form av uppföljning och sammanfattning skrivs också tydligt fram i det statliga kommentarmaterialet för matematikundervisningen i Singapore (Kaur, 2009). I detta finns ett pedagogiskt ramverk som ger handledning för lärare kring lärande och undervisning och där står att undervisning innefattar faserna:

1. introduktion
2. huvudaktivitet
3. slutsatser eller tillämpningar som visar att eleverna behärskar det aktuella undervisningsinnehållet.

Att utgå från abstrakta exempel

I studien *The advantage of abstract examples in learning math* framkom att om målet för matematikundervisningen är att ge elever kunskaper som kan använ-

das i många olika situationer, kan det vara bättre att utgå från abstrakta exempel istället för från konkreta (Kaminski, Sloutsky & Heckler, 2008). Exempel som innehöll "ovidkommande information" betraktades som konkreta och de kunde inkludera fysiska material för yngre elever och vardagsnära situationer för de äldre. Författarna förklarar att matematiska begrepp är väldefinierade och abstrakta, de störs inte av irrelevanta detaljer. Av den anledningen menar de att det finns en större närhet mellan de abstrakta exemplen som representerar de aktuella matematiska begreppen och de abstrakta regler som undervisningen ska leda fram till. Undersökningsgruppen bestod av universitetsstudenter vilka medverkade i studien som en del i en psykologikurs. Studenterna fick under några timmar genomföra testet enskilt vid en dator, vilket innebar att det konkreta bestod av skisser på föremål eller symboler.

Studien får kritik av Matthew Jones i *Journal for Research in Mathematics Education* (Jones, 2009a, 2009b). Han ifrågasätter studiens uppläggning och anser dessutom att resultatet har övergeneraliserats. David Bressoud, matematiker och president i *Mathematical Association of America* tycker studien är intressant men han är också kritisk (Bressoud, 2008). Han menar att det i studien sätts upp ett motsatsförhållande mellan abstrakt och konkret trots att merparten av den matematikdidaktiska forskningen gör det klart att båda behövs. Han refererar till rapporten *Adding it up* där det framhålls att det finns ett ömsesidigt samband mellan konkret och abstrakt där det ena hjälper till att forma det andra. Det är intressant att notera att studien inte bara har diskuterats i matematikdidaktiska tidskrifter, den har även diskuterats livligt på internet av forskare, lärare och en matematikintresserad allmänhet.

Suydam och Higgins beskriver en studie gjord 1973 av Harold Carney, vilken visar att den elevgrupp som fick arbeta med ett abstrakt tillvägagångssätt gynnades jämfört med den grupp som arbetade med material (Suydam & Higgins, 1977). Till skillnad från många andra studier var det "den abstrakta gruppen" som var experimentgrupp och "materialgruppen" var kontrollgrupp. Då Suydam och Higgins tittade närmare på studien visade det sig att kontrollgruppen i stor utsträckning hade jobbat med arbetsblad istället för laborativa material.

Organisation av laborativa material

Tillgänglighet är förmodligen den faktor som mest påverkar användandet av laborativa material (ERIC Development Team, 1990). Detta kan tyckas självklart, finns inte material är det naturligtvis omöjligt att det blir en del i den ordinarie undervisningen. Det kan ändå vara av betydelse att undersöka orsakerna till varför material inte alltid finns till hands.

Lärare har i undersökningar fått ta ställning till vilka faktorer som hindrar dem att använda laborativa material (Swan, Marshall, Mildenhall, White & de Jong, 1996; Szendrei, 1996). Några lärare var helt enkelt inte intresserade av laborativ matematikundervisning, de ansåg tex att begrepp som har utvecklats via laborativa material aldrig kommer att bli abstrakta för eleven (Szendrei, 1996). Bland de intresserade lärarna var de vanligaste svaren om hinder:

- brist på pengar
- brist på tid
- elevers beteende och uppförande: det blir högljutt och stökigt i klassrummet, eleverna kommer att förstöra materialet
- svårt att hitta en god klassrumsorganisation
- problem med hantering av material: att låna och lämna tillbaka, sortera och ha koll på om delar saknas
- utrymme för laborativa material saknas.

Det framkommer ändå i lärarnas kommentarer att de som tror på att laborativa material är till gagn för elevernas lärande i matematik, de hittar strategier för att komma förbi hindren. Det uttrycks också att det kan skilja mycket mellan skolorna, tex hur laborativa material förvaras och hur det köps in. Jämförelse görs med hur datorer köps in till skolorna, där en mycket mer genomtänkt och långsiktig planering finns (Swan m fl, 1996).

Studier visar att laborativa material ofta används under de första skoloråren men att det sedan snabbt minskar (Swan m fl, 1996). Skälet är inte i första hand att det saknas material, tvärtom finns det i regel mycket på skolorna, men undanstoppat i skåp och lådor. Den minskande användningen kan enligt studien exempelvis bero på att

- en inspirerad lärare köper material som sen blir bortglömt i skåpen när läraren lämnar skolan
- den första entusiasmen inför ett nytt material lägger sig efter ett tag och sedan vet inte andra hur det ska användas
- material köps för att det trendigt och efter ett tag dör trenden ut
- inköp har gjorts när en skicklig försäljare övertygat personalen om att materialet kommer att "lösa alla problem"
- felköp görs när lärarna får veta att de i slutet av en budgetperiod snabbt måste bestämma sig för inköp och förhastade beslut tas.

Laborativt arbete i andra ämnen

Det kan vara intressant att gå över skolans ämnesgränser och se på laborativa arbetssätt i andra ämnen. I kommentaren till den danska gymnasiekursplanen i matematik skrivs det fram att det är viktigt att eleverna får uppleva matematik som ett ämne där experiment är nyttiga, men att matematik inte är ett experimentellt ämne i likhet med de naturvetenskapliga ämnena (Undervisningsministeriet, 2008). I den svenska no-undervisningen i grundskolan är en del av syftet med laborationer själva hanteringen av laborativa material, vilka redskap eleverna väljer och hur säkra de är på att använda dem. Några svenska avhandlingar berör no-ämnet:

Gunilla Gunnarsson har undersökt hur elever i åk 7 arbetar laborativt med elementär ellära (Gunnarsson, 2008). Resultatet visar att lärarens syfte med laborationerna – vad eleverna skulle lära av de olika laborationerna – förblev implicit för eleverna. Det som däremot var explicit för eleverna var det som beskrevs i laborationsinstruktionerna – vad de skulle göra. Gunnarsson skriver att läraren har en central roll när det gäller att rikta elevernas uppmärksamhet på syftet med den laborativa aktiviteten. Läraren behövs som stöd för att eleverna ska se vad som är relevant att urskilja och observera i laborationerna. De behöver också få lärarens hjälp med att benämna det som observerats på ett naturvetenskapligt korrekt språk.

Berit Kurtén-Finnäs har studerat hur elever i åk 7 arbetar laborativt i kemi (Kurtén-Finnäs, 2008). I avhandlingen är de enskilda eleverna, laborationsgrupperna samt läraren i fokus. Resultatet visar att det laborativa arbetssättet som implementerades i undersökningen inverkade positivt på elevernas intresse för kemi. Läraren fungerade som en representant för det naturvetenskapliga samfundet och strävade efter att ge eleverna tillgång till teori och begrepp som de behövde för att kunna förstå och genomföra sina undersökningar. Kurtén-Finnäs betonar vikten av att lärare noggrant tänker igenom syftet med det laborativa arbetet och med varje enskild laboration.

Peter Högström har i sin avhandling beskrivit vilka mål 21 no-lärare som undervisar i grundskolans senare år hade för det laborativa arbetet och hur målen sedan förverkligades i undervisningen (Högström, 2009). Hans huvudresultat var att syftet med laborationerna inte alltid var uppenbart för eleverna. Lärarna beskrev också under intervjuerna ofta fler mål än de som framkom under genomförandet i klassrummet. Utifrån studiernas resultat poängteras vikten av samspel och diskussion mellan läraren och eleverna under laborationerna så att målen blir tydliga för eleverna. De behöver också hjälp att ”se vad som är avsett att se”.

I avhandlingarna konstateras att lärarens roll är central vid laborativa arbetssätt, att läraren måste vara klar över syftet med arbetssättet och kunna kommunicera det med eleverna. Andra avgörande faktorer är att elever behöver få hjälp med att urskilja vad de ska uppmärksamma i laborationen och att deras språk- och begreppsutveckling aktivt stöds inom respektive ämne. Detta stämmer också överens med det som vi tidigare tagit upp om matematikundervisning under rubriken *Didaktiskt perspektiv*.

Slöjd är ytterligare ett ämne där eleverna hanterar olika material och redskap. Slöjdprocessen löper i regel över tidsperioder från några veckor upp till en hel termin och består av fyra faser som beskriver hur en idé omsätts till en färdig slöjdprodukt: idé-, planerings-, genomförande- och värderingsfasen (Skolverket, 2005). I slöjdens kursplan betonas ett helhetsperspektiv där elevers delaktighet och egna initiativ ger dem möjlighet att till hög grad självständigt medverka i en naturlig progression genom att experimentera, lösa problem och göra medvetna val. Slöjdämnet låter eleverna ständigt gå mellan konkret och abstrakt. Även om det ytligt sett är mest praktiskt arbete genom att konkret material omformas till konkreta produkter, är de abstrakta inslagen ständigt närvarande. Bara genom att se på benämningen av de fyra faserna blir det exempelvis uppenbart att elevers dokumentation bör vara ett betydande inslag i slöjdprocessen. Forskningen inom svensk skolslöjd är, åtminstone jämfört med den matematikdidaktiska forskningen, relativt begränsad, men ett exempel är Marlene Johanssons avhandling *Slöjdpraktik i skolan – hand, tanke, kommunikation och andra medierande redskap* (M Johansson, 2003). Titeln kan även ge associationer till andra laborativa arbetssätt t ex i bild, hem- och konsumentkunskap samt matematik. För den som är intresserad av problemlösning i matematik och känner till Pólyas arbetsgång finns också många tydliga beröringspunkter (Pólya, 1970).

Sammanfattning

Litteraturgenomgången sammanfattas i punktform där studier som berört likartade områden har sammanförts:

- Den historiska tillbakablicken visar att bruket av konkreta material inom matematisk tillämpning och matematikundervisning inte är någon ny företeelse (Ball, 1992; Comenius, 1989; Dienes, 1960; ERIC Development Team, 1990; Gattegno, 1979; Kidwell m fl, 2008; Kruse, 1910; Malmer & Rudqvist, 2005; Nationalencyklopedin, 1996; Nordström, 2009; Sowell, 1989; Szendrei, 1996; Thompson, 1991; Wang, 2007).
- De laborativa materialen i sig ger inte eleverna matematiska insikter. Matematik är ett värde som läraren måste tillföra och / eller lyfta fram (Ball, 1992; Baroody, 1989; Clements, 1999; Fennema, 1973; Goldsby, 2009; Löwing & Kilborn, 2002; Meira, 1998; Moyer, 2001; Suydam & Higgins, 1977; Szendrei, 1996; Uttal m fl, 1997). Laborativt material kan med lämplig undervisning spegla de bakomliggande begreppen (Fuson, 1990).
- Aktiviteter kan skapa gemensamma referenser som underlag för den fortsatta matematikundervisningen (P Nilsson, 2006, 2009). Genom att både göra förutsägelser och sedan testa dem får eleverna redskap för att reflektera över sitt sätt att tänka (Battista, 1998; Battista & Clements, 1996; Pang, 2009; Schwarz & Linchevski, 2007). Behovet av kognitivt utmanande frågor och resonemang uppmärksammas (Sahin & Kulm, 2008; Silver m fl, 2009; Sumpter, 2009). Matematikundervisning, såväl laborativ som annan, ska avslutas med någon form av uppföljning och sammanfattning (Kaur, 2009; Ma, 1999).
- Förmågan att kunna hantera olika representationer av samma matematiska förhållanden lyfts fram i många texter. Vägen mellan det konkreta och abstrakta beskrivs ofta som samband mellan skilda representationer (Bruner, 1966; Goldin, 2003; Goldin & Shteingold, 2001; Heddens, 1986; Juter, 2009; Lesh, 1981; McIntosh, 2008; Monk, 2003; Reys & Post, 1976; Skolinspektionen, 2009; Skolverket, 1997, 2003b, 2009b; Smith, 2003; Undervisningsministeriet, 2002). Elever kan ha svårigheter att göra kopplingar mellan representationer (Ainsworth, 2006; Barmby m fl 2009; Clements, 2007). En medveten undervisning med representationer kan underlätta för elevers förståelse och förhindra att svårigheter uppstår (Goldin & Shteingold, 2001; K-8, 2004). Förmågan att uttrycka sig skriftligt ses som en del i elevernas kunskapsprocess (Bergh Nestlog, 2009; Berthold m fl, 2007; Nückles m fl, 2009; Undervisningsministeriet, 2008).
- Laborativ matematikundervisning ger tillfällen till varierande sätt att analysera och bedöma elevernas kunnande, men det är också viktigt att göra begränsade urval när det gäller uppgifter (Heddens, 1997; Ryken, 2009; Skolverket,

2003a, 2009a; van den Heuvel-Panhuizen, 2005). Laborativa material kan fungera som verktyg genom att läraren kan "se" hur eleven tänker (Fennema, 1973; Heddens, 1997). Å andra sidan kan eleven "se" något annat i den laborativa aktiviteten än den matematiska idé läraren hade planerat att de skulle uppmärksamma (Ball, 1992).

- Lärarens roll är avgörande för vilken effekt den laborativa matematikundervisningen får för elevernas lärande (Ball, 1992; Moyer, 2001; G Nilsson, 2005; Suydam & Higgins, 1977; Szendrei, 1996; Taflin, 2007). Lärare måste ges möjlighet att tillsammans få utveckla laborativ matematikundervisning (Ball, 1992; Moyer, 2001; Sowell, 1989; Szendrei, 1996). Även när lärare använder liknande metoder vid laborativ matematikundervisning kan det ändå leda till att eleverna får olika förståelse i matematik beroende på lärarnas ämneskunnande (Ma, 1999). Vid laborativ matematikundervisning är det viktigt att lärarna organiserar arbetet så att eleverna blir medvetna om de yttre ramarna (Moyer m fl, 1998). Hur lång tid det laborativa materialet används påverkar resultatet, bäst resultat ger laborativt material om det används under en längre tidsperiod (Goldsby, 2009; Sowell, 1989; Uttal m fl, 1997).
- Laborativt material kan användas på ett olämpligt sätt (Ball, 1992; Baroody, 1989; Szendrei, 1996). Om målet för matematikundervisningen är att ge elever kunskaper som kan användas i många olika situationer kan det vara bättre att utgå från abstrakta exempel istället för konkreta (Kaminski m fl, 2008).
- De översikter som gåtts igenom och spänner över de senaste 80 åren är samstämmiga, de tar upp både positiva och negativa aspekter av laborativ matematikundervisning (Goldsby, 2009; Sowell, 1989; Suydam & Higgins, 1977).

Kommentarer

Vi vill avsluta med några av våra egna reflektioner utifrån de studier vi tagit del av i förhållande till de erfarenheter vi har inom ämnesområdet. Det som i första hand förvånat oss är att vi inte funnit studier som bättre kan svara på de frågor som vi ställde i början av arbetet med denna översikt. I planeringsstadiet utgick vi ifrån att det skulle finnas många undersökningar som t ex jämförde effekten av elevers lärande då lärare med liknande bakgrund undervisade samma moment och där en elevgrupp använde laborativa material och en annan jämförbar grupp inte gjorde det. Vi tänkte oss en grupp där eleverna långsiktigt fick arbeta med många representationer mellan konkret och abstrakt och där dokumentation spelade en tydlig roll jämfört med en grupp som under samma tidsrymd arbetade mer traditionellt med lärargenomgångar vid tavlan och enskilt arbete i läroboken. I de jämförande studier som vi läst är det snarare olika kategorier av lärare som jämförs: lärare som uppfattar laborativa material som "rolig matte" jämfört med "riktig matte", lärare som har olika grader av strukturerad och lärarstyrd undervisning, amerikanska respektive kinesiska lärare och deras olika lektionsstrukturer samt nyutexaminerade i jämförelse med erfarna lärare.

Vi har sett att det finns skillnader i frågeställningarna beroende på under vilka årtionden som studierna genomförts. I tidigare studier efterfrågades oftare på vilken nivå i en speciell hierarki material skulle användas (ERIC Development Team, 1990; Kieren, 1971; Sowell, 1989) liksom mer detaljerade frågor om vilket material som passar bäst i olika situationer. I senare studier handlar det mer frekvent om vad som händer när laborativa material sätts in i en viss kontext. Detta uppfattar vi som att det ligger i linje med Vygotskijs teorier om att barns utveckling sker i samspel med deras omgivning. Ett exempel på det kan vara de tärningsspel som Nilsson använder vid undervisning om slump och sannolikhet (P Nilsson, 2009). Skillnaderna mellan frågeställningar anser vi höra ihop med olika syn på förhållandet mellan lärande och utveckling, vilket redovisades under rubriken *Kunskap och lärande*. Detta stämmer också med den erfarenhet vi har av frågor från lärare. Allt färre efterfrågar material och aktiviteter på detaljnivå, många fler önskar stöd och råd för att få hög kvalitet och långsiktighet i det laborativa arbetssättet inom den ordinarie matematikundervisningen.

Kritiska synpunkter

Vi har kritiska synpunkter på uppläggningsen av flera studier vi gått igenom och har valt att lyfta fram fyra aspekter:

- *Okänt material och ingen undervisning.* Elever i vissa undersökningar (Cobb, 1995; McNeil m fl, 2009) har ibland fått möta ett för dem okänt material

som de ska arbeta med utan föregående undervisning. Eleverna har själva fått försöka lista ut sambandet mellan materialet och matematiken. Det strider mot vårt sätt att se på laborativ matematikundervisning. Vi menar att eleven, på lämpligt sätt, måste bli medveten om den matematiska idén och syftet med aktiviteterna samt få hjälp att rikta sin uppmärksamhet mot kritiska punkter i det laborativa arbetet. Vi anser att stöd för detta synsätt kan hämtas hos många forskare (Ball, 1992; Moyer, 2001; Szendrei, 1996).

- *Provliknande situationer.* Det förekommer också att undersökningar görs i en situation som kan betraktas som ett provtillfälle (McNeil m fl, 2009) eller som är konstlad för eleverna i de fall då de får sitta ensamma eller tillsammans med ett fåtal kamrater i ett annat rum än det vanliga klassrummet och läraren är utbytt mot en annan person som ansvarar för att undersökningen genomförs.
- *Tidsaspekt.* Det har visat sig att bäst resultat ger laborativt arbete om det får pågå under en längre period, vilket i en metaanalys preciseras till minst ett år (Sowell, 1989). Ett stort antal studier granskar hur elever arbetar laborativt under en i våra ögon kort period, inte ovanligt med 6–10 veckor (Suydam & Higgins, 1977). Kanske en orsak kan vara att det sällan finns ekonomiska och organisatoriska möjligheter till longitudinella studier. Vi har också upplevt att det är svårt som läsare av forskningsrapporterna att avgöra hur elevernas ordinarie undervisning ser ut. Hur vana är de vid att ha laborativa material tillgängliga?
- *Begränsad del – inte hela processen.* Det vanliga är att forskare har valt att se på en begränsad del av elevens lärande eller kunnande (Kaminski m fl, 2008; McNeil m fl, 2009; Sowell, 1989; Suydam & Higgins, 1977) istället för att titta på hela processen utifrån lärarens intentioner med den laborativa aktiviteten, hur de stämmer överens med det praktiska genomförandet, interaktion lärare – elev och elev – elev samt hur de laborativa aktiviteterna uppfattas av eleverna. Inom naturorienterande skolämnen finns flera svenska doktorsavhandlingar som under senare år behandlat hela processen vid laborationer i ett undervisningssammanhang. Vi hoppas att motsvarande är på gång inom den svenska matematikdidaktiska forskningen.

Tillfälle att arbeta med olika representationer

Vi vill påstå, baserat på tidigare erfarenheter och utifrån detta arbete, att en av förtjänsterna med laborativa material är att de ger ytterligare en möjlighet att arbeta med olika representationer i matematik. Detta medför en nyanserad syn

på laborativ matematikundervisning. Det handlar inte om att använda laborativa material på matematiklektioner – eller inte. Det handlar istället om att, där så är lämpligt, ge elever möjlighet att möta olika representationer av matematiska objekt, problem, begrepp eller situationer och att göra kopplingar mellan representationerna i syfte att få ökad förståelse för den abstrakta och generella matematiken. Det finns studier som visar att lärare "tar till" laborativa material i sin ansträngning att utveckla undervisningen, men utan att de reflekterar över hur materialet ska stödja övergången till allt fler och allt mer avancerade representationer (Clements, 1999; Moyer, 2001). Det räcker inte med att "plocka fram" laborativa material på en lektion och låta eleverna "göra" en aktivitet. Den matematiska idén i det laborativa materialet måste ses som en representation, i form av en laborativ modell, som eleverna lär sig att uttrycka med hjälp av andra representationer som tex bilder, omvärldssituationer, talade och skrivna symboler. Syftet är att eleverna ska bli medvetna om sambandet mellan konkret och abstrakt.

Vi har också undrat varför vissa studier har riktat in sig på att ställa olika representationer mot varandra. Sowell (1989) redogör för studier där forskare har jämfört resultat då representationerna konkret – abstrakt, bildmässig – abstrakt och konkret – bildmässig har använts. Den första polariseringen konkret – abstrakt kan vara förståelig, men att sätta in de övriga representationerna i ett motsatsförhållande uppfattar vi som egendomligt då de istället borde berika och stödja varandra (Bressoud, 2008).

Elevdokumentation som kritisk faktor

Enligt vår uppfattning är skriftlig dokumentation – eller snarare brist på skriftlig dokumentation – en kritisk faktor vid laborativt arbete i matematik. Ska laborativt arbete få betydelse i undervisningen, måste dokumentation ses som en viktig del i detta arbetssätt. Motiv för den skriftliga aspekten finns i kursplanen för matematik där det står att skolan i sin undervisning i matematik ska sträva efter att eleven utvecklar sin förmåga att "skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande" (Skolverket, 2009b).

Om läraren vid planering av laborativ matematikundervisning utgår från en enkel trestegsmodell kan dokumentation komma in på flera olika sätt. Här följer två förslag där det första har lånat drag från undervisningen inom naturorienterande ämnen:

- *Gemensam introduktion.* Eleverna skriver ner sina egna antaganden.
- *Laborativ aktivitet.* Eleverna gör anteckningar under arbetets gång.

- *Gemensam diskussion och uppföljning.* Eleverna sammanfattar sitt kunnande genom att tex redogöra för likheter och skillnader mellan begreppen triangel och rektangel. Men allra först får eleverna börja med att "samla ord" i listform: de antecknar individuellt alla ord och begrepp som kan vara bra att använda när trianglar och rektanglar ska beskrivas. I nästa steg arbetar de parvis och kompletterar sina listor med kamratens förslag – om de tycker att de själva glömt eller missat vissa ord. Klassen sammanställer sedan gemensamt alla ord så att de finns tillgängliga när eleverna sedan ska ta itu med den ursprungliga uppgiften. Lärare som arbetar på detta sätt ger eleverna tillfällen till att utveckla sitt språk. Om eleverna hade börjat skriva direkt, skulle de ha uttryckt sig med det språk de redan behärskar. Med denna arbetsgång kan eleverna känna att deras eget språk duger, men genom samarbete i klassen kan deras ordförråd utökas och språket lyftas till en högre nivå än tidigare.

En annan variant är att eleverna någon vecka innan arbetet startar skriver ner vad de redan vet om det aktuella matematiska begreppet, som tex likhetstecknet, cirkeln eller stapeldiagram. Läraren får då en god uppfattning om vilka förkunskaper eleverna har och kan anpassa den kommande undervisningen utifrån deras dokumentation. I slutskedet kompletterar de sin första text med vilket nytt kunnande de fått om det aktuella begreppet. Båda texterna dateras och på så sätt blir lärandet synligt för eleven själv, föräldrar och lärare. Dokumentationen är också möjlig att använda som underlag för IUP och diskussion vid utvecklingssamtal.

Elever och lärare måste också komma överens om huruvida det är det matematiska tänkandet och / eller texten som ska stå i fokus. Det får inte leda till en pålaga för elever som helst vill undvika att skriva texter. Skrivandet ska självklart inte drivas in absurdum och det är upp till lärarens fingertoppskänsla att avgöra när dokumentation kan tillföra något till elevernas lärande.

I den litteratur vi gått igenom har vi inte funnit studier kring elevers egen reflektion i samband med laborativt arbete i matematik och / eller skriftlig dokumentation. Däremot finns ett intressant utvecklingsarbete som varit en del i ett tidigare nordiskt projekt vid namn *Nordlab* (Utdanningsdirektoratet, 2005). I Sverige har det följts upp av PRIM-gruppen i projektet *Min egen Matematik, Mima* (PRIM-gruppen) där elever från skolår 3 till och med gymnasiet ingått. Eleverna har själva värderat sitt eget kunnande och arbetat med en elevbok där de antecknat tankar, ord, begrepp och regler för att få hjälp och struktur i sitt lärande. Elevboken ses som ett hjälpmedel i konceptet "skriva för att lära" och det övergripande syftet är att eleverna ska bli mer medvetna om sitt lärande och matematiska kunnande.

Läraren är viktig

Lärarens roll är central i all matematikundervisning, inte minst vid det laborativa arbetssättet. Det kan alltid finnas en risk för 'hands on – minds off', dvs att för eleven blir aktiviteten något "att göra" och inte något "att förstå". En grundläggande hjälp för läraren kan vara att inför en laborativ aktivitet själv ställa sig och besvara de tre didaktiska frågorna som i detta sammanhang kan formuleras:

<i>Vad</i> ska läras?	Matematikinnehåll
<i>Varför</i> ska det läras?	Mål på kort och lång sikt
<i>Hur</i> ska eleverna få möjlighet att lära?	Metod – hur aktiviteten ska genomföras

Kommuniceras detta med eleverna på lämpligt sätt kan risken för 'hands on – minds off' minimeras.

Läraren behöver vara medveten om hur olika material kan stödja begrepps- bildning (Heddens, 1997) så att en elev som "kört fast" kan gå vidare med hjälp av ett för situationen mer lämpligt material. Ett exempel som vi omnämnt tidigare är följande: Ball beskriver en videoinspelad situation där eleverna undersökte om tal var udda eller jämna (Ball, 1992). En elev hävdade att talet 6 kunde vara både jämnt och udda. Han ritade cirklar och visade hur han tänkte: o o o o o o kan delas ooo | ooo; alltså lika = jämnt i två delar, men också oo | oo | oo. Eftersom det blev tre (udda) grupper om två (jämnt) menade han att talet 6 också kan vara udda. Denna scen har hon visat lärare och många har då hävdat att eleven hade förstått bättre om laborativa material hade använts. Ball visar uppgiften med cirkulära markörer och ifrågasätter om det verkligen hade hjälpt. Detta är ett exempel som kan påvisa vikten av att använda laborativa material "på rätt sätt vid rätt tillfälle". Vi håller med om att de cirkulära markörerna troligen inte hade underlättat förståelsen för just denne elev om de lagts ut i rad på samma sätt som han ritade cirkulärerna. Om han däremot hade lagt de cirkulära markörerna parvis så hade de kunnat ge en bild av begreppet udda – jämnt. Ett kanske bättre sätt att ge eleven stöd i sin begrepps- bildning hade varit att ge honom kuber eller kvadratis- ka markörer. De går att bygga eller lägga samman två och två i allt längre rektangelformer. Det blir tydligt att det varannan gång resulterar i en "snygg" rektangel och varannan gång i en rektangel plus en markör eller kub som "sticker ut". Genom att "bygga tal" och sätta samman dem två och två blir det uppenbart att exempelvis två udda tal alltid resulterar i ett jämnt tal. Med en konstruktion som denna kan även ett generaliserande steg bli åskådligt. Det har ingen betydelse hur långa rektanglarna görs, det är bara de sista kuberna som avgör om talet är jämnt eller udda. I detta fall borde det också vara självklart att både olika laborativa material och fler representationer

ska användas. Här kan det innebära att eleverna leker sista paret ut vid olika tillfällen med ett varierande antal deltagande elever.

Det kan tyckas att det ställs oerhört stora krav på en lärare för att kunna arbeta effektivt med laborativa material. Vår grundinställning är att lärare som har adekvat utbildning i matematik och matematikdidaktik har förutsättningar för att hantera vardagliga undervisningssituationer med laborativa material, men det finns också material som förutsätter att lärarna själva först ägnar tid åt det för att upptäcka dess förtjänster och för att lära sig utnyttja detta på ett korrekt sätt (Szendrei, 1996). Vår erfarenhet är att det många gånger inte är kunskap om material som behövs utan snarare kompetensutveckling som bidrar till en större medvetenhet om hela den laborativa arbetsprocessen med representationer, elevers dokumentation, lärarledda diskussioner samt analys och bedömning i syfte att ge elever möjligheter att utveckla nyanserade begrepp som successivt kan förädlas.

Läroboken

Ibland får vi frågor om lärobokens roll i förhållande till ett laborativt arbetsätt. Ett generellt svar är att det är kursplanen som undervisningen ska utgå ifrån. Matematikundervisningen ska leda fram till att elever får förståelse och vi menar att alla bör få möjlighet att arbeta såväl undersökande som med uppgifter av rutinmässig karaktär för att få ökad säkerhet i sitt kunskande. Vi ser ingen motsättning mellan laborativt arbete och elevernas bruk av lärobok, utan menar att de behöver få möta olika arbetssätt för att få balans i undervisningen. Elever behöver arbeta på olika sätt för att utveckla olika kompetenser. I Skolinspektionens rapport (Skolinspektionen, 2009) uttrycks det så här: "Det finns en stark positiv korrelation mellan användning av läroboken och övning i att hantera procedurer, samt en stark negativ korrelation mellan läroboken och övriga kompetenser" (s 20). Vi ser dock idag, som vi tidigare nämnt, ett stort intresse för laborativ matematikundervisning bland lärare och det är uppenbart att intresset också finns hos blivande lärare. Det är inte ovanligt att lärarstuderande under sina examensarbeten väljer att närmare undersöka möjligheter och hinder med laborativa läromedel och aktiviteter i matematikundervisningen (uppsatser.se).

Mattelådor

ERIC Digest beskriver att det tidigare i North Carolina hade satsats på laborativa material i skolorna och paket hade sammanställts för olika åldersgrupper (ERIC Development Team, 1990). Delstaten såg till att det kom åtminstone en

uppsättning till varje skola. Vid en enkät till 964 lågstadielärare visade det sig att bara 11,2 procent använde materialet frekvent och 9,5 procent visste inte ens att det fanns. Det finns många andra materialuppsättningar eller lådor runt om i världen. Några exempel är aktiviteter från Mathematics Task Centre Project i Australien (Matte gömmor i Sverige), Första hjälpen-lådor från Mattelandet i Helsingfors, Matematikk-koffertar från matematikcentrat i Trondheim och Matematikkasserne från Köpenhamn. I Sverige har Navet, ett science center i Borås, producerat lådor som hör till deras matematikutställning Bagdad. Naturvetenskap och teknik för alla, NTA, tar fram lådor med matematikinnehåll etc. Flera kommuner har sammanställt lådor som introduceras på de egna skolområdena för att inspirera till laborativ matematikundervisning. Vi har inte gjort någon egen fördjupning om detta, men det avgörande tycks vara på vilket sätt lådor implementeras och kanske framförallt *hur* arbetet med de laborativa materialen i lådorna följs upp i klassrummen om det ska leda till resultat i elevers matematiklärande. Skolan måste ordna så att lärarna får tid och möjlighet att själva arbeta med lådornas innehåll och diskutera de didaktiska grundfrågorna i syfte att utveckla skolans matematikundervisning.

Till sist

Lärare och skolledare ställer allt oftare följande fråga om laborativ matematikundervisning: "Vad säger forskningen, ska vi satsa tid och pengar på laborativa material?" Svaret kan ses som en mycket kort sammanfattning av denna kunskapsöversikt: Det handlar inte om att använda laborativa material eller ej i matematikundervisningen – det beror på *hur* och i *vilket syfte* de används.

Referenser

- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183–198.
- Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16(2), 14–18, 46–47.
- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational studies in mathematics*, 70(3), 217–241.
- Baroody, A. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *The Arithmetic Teacher*, 37(2), 4–5.
- Battista, M. (1998). How many blocks? *Teaching Mathematics in the Middle School*, 3(6), 404–411.
- Battista, M. & Clements, D. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258–292.
- Bergh Nestlog, E. (2009). *Perspektiv i elevtexter: Skriftligt argumenterande i grundskolans mellanår*. Växjö universitet, Institutionen för humaniora, Växjö.
- Berthold, K., Nückles, M. & Renkl, A. (2007). Do learning protocols support learning strategies and outcomes? *Learning and Instruction*, 17(oct), 564–577.
- Bressoud, D. (2008). Abstract versus concrete examples in teaching math. (Elektronisk resurs) Hämtad från http://www.maa.org/columns/launchings/launchings_12_08.html Tillgänglig 091209.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, Mass.: Belknap Press.
- Cain-Caston, M. (1996). Manipulative queen. *Journal of instructional psychology*, 23(4), 5.
- Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*, 17(1), 55–66.
- Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Early Childhood*, 1(1), 45–60.
- Clements, D. H. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the building blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 136–159.
- Cobb, P. (1995). Cultural tools and mathematical learning: a case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(4), 362–385.
- Comenius, J. A. (1989). *Didactica Magna – stora undervisningsläran*. Göteborg: Daidalos.

- Cramer, K., Post, T. & delMas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 34.
- Devlin, K. (1997). *The science of patterns*. New York: Scientific American Library.
- Dienes, Z. (1960). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational.
- ERIC Development Team (1990). Experiential learning of mathematics: using manipulatives. ERIC Digest. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://www.ericdigests.org/pre-9217/math.htm> Tillgänglig 091209.
- Fennema, E. (1973). Manipulatives in the classroom. *The Arithmetic Teacher*, 20(5), 350–352.
- Fuson, K. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and instruction*, 7(4), 343–403.
- Gattegno, C. (1979). *Talen i färg, bok 1 och 2*. Nacka: Esselte studium.
- Goldin, G. (2003). Representation in school mathematics: a unifying research perspective. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s 275–285). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.
- Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. I A. Cuoco (red), *The roles of representation in school mathematics* (s 1–23). Reston, VA: NCTM.
- Goldsby, D. (2009). Manipulatives in middle grades mathematics. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://www.nmsa.org/Research/ResearchSummaries/Mathematics/tabid/1832/Default.aspx> Tillgänglig 091209.
- Gunnarsson, G. (2008). *Den laborativa klassrumsverksamhetens interaktioner – En studie om vilket meningsskapande år 7-elever kan erbjudas i möten med den laborativa verksamhetens instruktioner, artefakter och språk inom elementär ellära, samt om lärares didaktiska handlingsmönster i dessa möten*. Norrköping: Linköpings universitet.
- Haara, F. O. & Smith, K. (2009). Practical activities in mathematics teaching: Mathematics teachers' knowledge based reasons NOMAD, 14(3), 33–54.
- Heddens, J. (1986). Bridging the gap between the concrete and the abstract. *The Arithmetic Teacher*, 33(6), 14–17.
- Heddens, J. (1997). Improving mathematics teaching by using manipulatives. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://www.fed.cuhk.edu.hk/~flee/mathfor/edumath/9706/13hedden.html> Tillgänglig 091209.
- Helenius, O., & Mouwitz, L. (2009). *Matematiken – var finns den?* Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.
- Holt, J. (1982). *How children fail*. USA: Dell Publishing.

- Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (red) (2009). *Mathematics education and technology – rethinking the terrain: the 17th ICMI study*. London: Springer.
- Hugener, I., Pauli, C., Reusser, K., Lipowsky, F., Rakoczy, K. & Kliemen, E. (2009). Teaching patterns and learning quality in Swiss and German mathematics lessons. *Learning and Instruction*, 19(1), 66–78.
- Högström, P. (2009). *Laborativt arbete i grundskolans senare år: lärares mål och hur de implementeras*. Umeå: Umeå universitet.
- Japanese Ministry of Education (1998). New mathematics curriculum standards for elementary school. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://www.michinoku.ne.jp/~sugayuki/curricul.htm> Tillgänglig 091209.
- Johansson, B., & Wistedt, I. (1991). Undervisning om problemlösning – ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red), *Problemlösning* (s 13–22). Lund: Studentlitteratur.
- Johansson, B., & Wistedt, I. (1992). Undervisning om geometri och statistik – ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red), *Geometri och statistik* (s 15–25). Lund: Studentlitteratur.
- Johansson, M. (2003). *Slöjdpraktik i skolan – hand, tanke, kommunikation och andra medierande redskap*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Jones, M. (2009a). Examining surface features in context. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 94–96.
- Jones, M. (2009b). Transfer, abstraction, and context. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 80–89.
- Juter, K. (2009). Studenter lär sig gränsvärden. I G. Brandell, B. Grevholm, K. Wallby & H. Wallin (red), *Matematikdidaktiska frågor – resultat från en forskarskola* (s 74–90). Göteborg: NCM och SMDF.
- Jönsson, P., Aasa, S., Svingby, G., Heath, C., Åresund, M. & Gjedde, L. (2009). Matematik och det nya medialandskapet. *Nämnamnaren*, 36(1), 42–48.
- Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M. & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, 320, 454–455. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://www.sciencemag.org/cgi/content/full/320/5875/454/DC1> Tillgänglig 091209.
- Kaur, B. (2009). Characteristics of good mathematics teaching in Singapore grade 8 classrooms: a juxtaposition of teachers' practise and students' perception. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 41(3), 333–347.
- Kidwell, P., Ackerberg-Hastings, A. & Roberts, D. (2008). *Tools of American mathematics teaching, 1800–2000*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.
- Kieren, T. (1971). A forum for researchers: manipulative activity in mathematics learning. *Journal for research in mathematics education*, 2(May), 228–234.

- Kilborn, W. (1981). *Vad vet fröken om baskunskaper?* Stockholm: Liber UtbildningsFörlaget.
- Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.
- Kruse, A. (1910). *Åskådningsmatematik*. Stockholm: Norstedt & Söners förlag.
- Kurtén-Finnäs, B. (2008). *Det var intressant, man måste tänka så mycket. Öppna laborationer och V-diagram i kemiundervisningen*. Åbo: Åbo Akademis förlag.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational studies in mathematics*, 12, 235–264.
- Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.
- Malmer, G. & Rudqvist, M. (2005). *Räkneväskan:Handledning*. Kalmar: Adastraläromedel AB.
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal – en handbok*. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.
- McNeil, N., Uttal, D., Jarvin, L. & Sternberg, R. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance in mathematics. *Learning and Instruction* 19, 171–184.
- Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 121–142.
- Monk, S. (2003). Representation in school mathematics: learning to graph and graphing to learn. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s 250–262). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.
- Moyer, P. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 47, 175–197.
- Moyer, P., Bolyard, J. & Spikell, M. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372–377.
- Moyer, P., Jones, G. (1998). Tools for cognition: Student free access to manipulative materials in control- versus autonomy-oriented middle grades teachers' classrooms. (Elektronisk resurs) Hämtad från http://www.eric.ed.gov:80/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/15/8f/1b.pdf Tillgänglig 091209.
- Myndigheten för skolutveckling (2007). *Matematik – En samtalsguide om kunskap, arbetssätt och bedömning*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Nationalencyklopedin (1996). Höganäs: Bokförlaget Bra Böcker AB.

- Nilsson, G. (2005). *Att äga pi. Praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Nilsson, P. (2006). *Exploring probabilistic reasoning: a study of how students contextualise compound chance encounters in explorative settings*. Växjö: Växjö universitet.
- Nilsson, P. (2009). Elever resonerar om sannolikhet. I G. Brandell, Grevholm, B., Wallby, K., Wallin, H. (red), *Matematikdidaktiska frågor – resultat från en forskarskola*. Göteborg: NCM & SMDF.
- Nordström, S. (2009). *Matematikundervisningen i Sverige för 100 år sedan: redovisningar från folkskole- till universitetsnivå*. Uppsala: Fören. för svensk undervisningshistoria.
- Norton, S. & Windsor, W. (2008). *Students' attitude towards using materials to learn algebra: a year 7 case study*. Paper presented at the The 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Nückles, M., Hübner, S. & Renkl, A. (2009). Enhancing self-regulated learning by writing learning protocols. *Learning and Instruction*, 19(June), 259–271.
- Pang, J. (2009). Good mathematics instruction in South Korea. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 41(3), 349–362.
- Pettersson, A. (2003). Bedömning och betygsättning. *Baskunnande i matematik* (s 60–75). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Pólya, G. (1970). *Problemlösning: en handbok i rationellt tänkande*. Stockholm: Prisma.
- Post, T. (red). (1981). *The role of manipulative materials in the learning of mathematical concepts*. Berkley, CA: National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics.
- PRIM-gruppen. Min egen matematik. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://www.prim.su.se/matematik/nordlab.html> Tillgänglig 091209.
- Reys, R. & Post, T. (1976). *The mathematics laboratory: Theory to practice*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, Inc.
- Runesson, U. (2007). A collective enquiry into critical aspects of teaching the concept of angles. *Nomad*, 12(4).
- Runesson, U. & Ah Chee Mok, I. (2005). The teaching fraction: a comparative study of a Swedish and a Hong Kong classroom. *Nomad*, 10(2).
- Ryken, A. (2009). Multiple representations as sites for teacher reflection about mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(5).
- Sahin, A. & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 221–241.

- Schwarz, B. & Linchevski, L. (2007). The role of task design and argumentation in cognitive development during peer interaction: The case of proportional reasoning. *Learning and Instruction*, 17(5), 510–531.
- SFS 1994:1194 (1994). Grundskoleförförordning 1994:1194.
- Silver, E., Mesa, V., Morris, K., Star, J. & Benken, B. (2009). Teaching mathematics for understanding: an analysis of lessons submitted by teachers seeking NBPTS certification. *American educational reasearch journal*, 46(2), 501–531.
- Skolinspektionen (2009). *Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*. Stockholm: Skolinspektionen.
- Skolverket (1994a). *Läroplan för de frivilliga skolformerna – Lpf 94*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (1994b). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklass och fritidshem, Lpo 94*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (1997). *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2003a). *Analysschema i matematik för skolår 6–9*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2003b). *Lusten att lära – med fokus på matematik. Nationella kvalitetsgranskningar 2001–2002. Rapport 221*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2005). *Slöjd, ämnesrapport till rapport 253 (NU–03)*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2009a). *Analysschema i matematik för åren före årskurs 6*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2009b). *Kursplan med kommentarer till mål som eleverna lägst ska ha uppnått i slutet av det tredje skolåret i ämnena matematik, svenska och svenska som andraspråk*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2009). SIRIS: Ansökan om projektmedel för utvecklingsinsatser i matematik. (Elektronisk resurs) Hämtad från http://siriskolverket.se/portal/page?_pageid=33,114179&_dad=portal&_schema=PORTAL Tillgänglig 091209.
- Smith, S. (2003). Representation in school mathematics: childrens representations of problems. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s 263–274). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.
- SOU 1992:94 Skola för bildning (Huvudbetänkande av läroplanskommittén). Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Sowell, E. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498–505.
- Sriraman, B. & Lesh, R. (2007). A conversation with Zoltan P. Dienes. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(1), 59–75.

- Star, J. & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, 18(6), 565–579.
- Sumpter, L. (2009). *On aspects of mathematical reasoning: affect and gender*. Umeå: Umeå universitet.
- Suydam, M. & Higgins, J. (1977). *Activity-based learning in elementary school: Recommendations from research*. Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Swan, P., Marshall, L., Mildenhall, P., White, G. & de Jong, T. (1996). *Are mathematics manipulatives being used in schools? If so how? If not why not?* (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://www.aare.edu.au/07pap/swa07178.pdf> Tillgänglig 091209.
- Svenska Akademiens ordbok. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://g3.spraakdata.gu.se/saob/> Tillgänglig 091209.
- Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen för lärande*. Umeå: Department of Mathematics and mathematical Statistics.
- The Access Center (2004). Concrete-Representational-Abstract (CRA) Instructional Approach. (Elektronisk resurs) Hämtad från http://www.k8accesscenter.org/training_resources/CRA_Instructional_Approach.asp Tillgänglig 091209.
- Thompson, J. (1991). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- Undervisningsministeriet (2002). *Kompetencer og matematiklæring*. København: Undervisningsministeriets forlag.
- Undervisningsministeriet (2008). *Matematik A – Stx: Undervisningsvejledning*. (Elektronisk resurs) Hämtad från <https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=120566#Bil35> Tillgänglig 091209.
- uppsatser.se. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://www.uppsatser.se/> Tillgänglig 091209.
- Utbildningsdepartementet (2009). *Förordning (2009:313) om statsbidrag för utveckling av matematikundervisning*.
- Utdanningsdirektoratet (2005). *Elevsentrert matematikundervisning med fokus på egenvurdering, Norsk del av Nordlab-prosjektet*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.
- Uttal, D., Scudder, K. & DeLoache, J. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of applied developmental psychology*, 18, 37–54.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 2–9.

- Wang, Y. (2007). Hands-on mathematics: two cases from ancient Chinese mathematics. *Science & Education*. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://www.springerlink.com/content/qu7646080851g342/> Tillgänglig 091209.
- Wigforss, F. (1957). *Den grundläggande matematikundervisningen: översikt av folkskolans kurs i matematik enligt 1955 års undervisningsplan ur metodisk synpunkt*. Stockholm: Bergvalls.
- Wittmann, E. (2005). Mathematics as the science of patterns – a guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood. *Mathematical learning from early childhood to adulthood*. (Elektronisk resurs) Hämtad från <http://irem.u-strasbg.fr/php/publi/Annales/sommaires/11/WittmannA.pdf> Tillgänglig 091209.

