

Dyskalkyli – finns det?

Aktuell forskning om svårigheter att förstå och använda tal

Ingvar Lundberg & Görel Sterner

Nationellt centrum för matematikutbildning



GÖTEBORGS
UNIVERSITET

Layout: Anders Wallby

Illustrationer: Anette Jahnke, Anders Wallby och författarna

Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM

Göteborgs universitet

Box 160

405 30 Göteborg

Beställning:

Fax: 031 786 22 00

e-post: bestallning@ncm.gu.se

webb: ncm.gu.se/bestallning

© 2009 NCM och författarna

ISBN: 978-91-85143-14-6

Upplaga: 1:1

Tryck: Livréna AB, Göteborg, 2009

Innehåll

Förord	1
1 Bakgrund, begreppsanalys och översikt av aktuell grundforskning	3
<i>Dyskalkyli – ett dåligt definierat begrepp</i>	<i>4</i>
<i>Översiktens uppläggning</i>	<i>5</i>
Dyskalkyli	6
<i>Ett försök till definition av dyskalkyli</i>	<i>7</i>
<i>Den mentala tallinjen och SNARC-effekten</i>	<i>8</i>
<i>Hur vanligt är det med dyskalkyli?</i>	<i>9</i>
<i>En fyrstegsmodell för utveckling av talbegreppet</i>	<i>10</i>
<i>Approximativa antalsbedömningar och taluppfattning</i>	<i>12</i>
Stimulans under förskoletiden	14
Några principiella problem vid diagnos av dyskalkyli	16
<i>Diskrepansdefinitionen</i>	<i>16</i>
<i>Mottaglighet för undervisning</i>	<i>17</i>
<i>Finns det olika undergrupper av räknsvårigheter?</i>	<i>18</i>
<i>Screening enligt Butterworth</i>	<i>19</i>
Andra diagnostiska metoder	20
<i>Tallinjens karaktär</i>	<i>20</i>
<i>Att räkna på fingrarna</i>	<i>21</i>
<i>Mer om taluppfattning</i>	<i>22</i>
<i>Snabb benämning</i>	<i>23</i>
Arbetsminnets roll vid räknsvårigheter	24
Samspel mellan arv och miljö när det gäller dyskalkyli	27
Räknsvårigheter och socio-emotionell anpassning	31
Dyskalkyli och dyslexi – hänger det ihop?	33
Några avslutande kommentarer om begreppet dyskalkyli	35
<i>Hur ska man ställa diagnos och vem ska göra det?</i>	<i>36</i>
Sammanfattning	37
2 Undervisning av elever med räknsvårigheter	39
Uppläggningsen av denna del	43
Några allmänna principer	43
<i>Tid för lärande – TOT-principen</i>	<i>44</i>
<i>Övning ger färdighet</i>	<i>45</i>
<i>Motivation och självbild</i>	<i>46</i>
Exempel på metodik i fyra faser	46
Effektiva undervisningsmetoder – en metaanalys	48
<i>Experimentella och kvasiexperimentella studier</i>	<i>49</i>

Satsa på förskolan	51
<i>Förskolebarns spontana lek med matematik</i>	52
<i>Big math for little kids</i>	53
Tallinjen och lineära räknspel	56
<i>"Logaritmisk" och lineär tallinje</i>	57
<i>Betydelsen av att spela spel i förskolan</i>	58
<i>Betydelsen av att spela spel i hemmen</i>	60
Number worlds	62
<i>Number worlds – undervisningsprogram</i>	64
<i>Utvärdering av Number worlds</i>	66
Numeracy recovery intervention program	67
Arbetsminnet och undervisning	68
Textuppgifter i matematik	70
<i>Läsförståelse</i>	72
<i>Förståelse för operationer med tal</i>	72
<i>Förståelse för uppgifters struktur</i>	73
<i>Uppgiftstyper</i>	74
Mottaglighet för undervisning	75
<i>Ett undervisningsförsök</i>	75
<i>Undervisningens innehåll</i>	77
<i>Utvärdering</i>	78
Dyscalculia guidance	79
<i>Råd för undervisning</i>	79
<i>Arbete med tallinjen</i>	81
Kartläggning, analys och åtgärder – några nyare diagnostiska material	83
<i>MIO – Matematikken – individen – omgivningen</i>	83
<i>Diamant</i>	83
<i>Förstå och använda tal – en handbok</i>	84
Sammanfattning – undervisning av elever med räknsvårigheter	84
Några avslutande kommentarer	86
Referenser	88

Förord

Denna forskningsöversikt om barns räknsvårigheter har utarbetats av Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) vid Göteborgs universitet med stöd av Myndigheten för skolutveckling (MSU, Dnr:2007:478). Översikten knyter an till en tidigare översikt som vi genomförde 2002 och som gällde sambandet mellan räknsvårigheter och lässvårigheter. Sedan dess har forskningsfronten flyttats fram i många avseenden och behovet av en ny översikt har uppfattats som stort. Räknsvårigheter är ju ett allvarligt problem i våra skolor och drabbar alltför många elever. Glädjande nog efterfrågar skolan också i allt större utsträckning forskningsbaserade kunskaper.

Många medarbetare på NCM har bidragit till förbättringar av denna översikt. NCM:s föreståndare, Bengt Johansson har fortlöpande inspirerat oss och gett oss värdefull vägledning. Karin Wallby, Lena Trygg, Elisabeth Rystedt och Anders Wallby har läst vårt manus med den erfarna lärarens argusögon men också levt sig in i den vanlige lärarens sätt att läsa en text av detta slag. Günther Dippe, Ola Helenius och Jesper Boesen har med insikt och logisk skärpa slagit ned på alla motsägelser och oklarheter. Marianne Dalemar, bibliotekarie vid NCM har sakkunnigt väglett oss i NCM:s förnämliga bok- och tidskriftssamlingar. Anette Jahnke och Anders Wallby har hjälpt oss med goda illustrationer. Dessutom har vi fått goda kommentarer från Skolverket. Vi har skäl att vara er alla djupt tack-samma för era insatser.

Utan att vi på något sätt försöker komma undan vårt ansvar som författare måste vi ändå säga att det är medarbetarna på NCM som garanterat eventuell kvalitet på denna skrift. Alla ofullkomligheter och oklarheter som ändå kvarstår beror på att vi inte i tillräcklig grad beaktat alla värdefulla synpunkter från våra kritiska granskare. Och detta måste vi naturligtvis vara ansvariga för. Vår förhoppning är att denna översikt ska nå minst lika många läsare som vår förra översikt, lärare på skolor, i lärarutbildning, i fortbildning, specialpedagoger och didaktikforskare.

Göteborg den 10 augusti 2009

Ingvar Lundberg
Professor emeritus

Görel Sterner
Specialpedagog

1

Bakgrund, begreppsanalys och översikt av aktuell grundforskning

För en del år sedan gav vi på uppdrag av regeringen ut en forskningsöversikt om räknsvårigheter och lässvårigheter och hur dessa svårigheter hänger ihop (Sternér & Lundberg, 2002). Översikten bearbetades och gavs senare ut som en lärobok (Lundberg & Sternér, 2006). Under den tid som gått sedan vår forskningsöversikt publicerades av NCM har forskningen på området intensifierats. Det allmänna intresset för specifika räknsvårigheter eller *dyskalkyli* har blivit alltmer påtagligt. Detta kommer till uttryck i larmrapporter i media, i ett växande antal kliniker för utredning av dyskalkyli och inte minst i den nyligen bildade Dyskalkyliföreningen.

Det känns särskilt angeläget att få ge ut denna översikt nu när den nationella läsa-skriva-räkna-satsningen pågår och implementeringen av de nya målen och proven för åk 3 är i full gång. Också arbetet med individuella utvecklingsplaner, skriftliga omdömen och åtgärdsprogram kan få stöd i denna kunskapsöversikt.

Mot bakgrund av den forskning som kommit fram efter vår tidigare översikt och det ökade intresset för räknsvårigheter har vi bedömt det som angeläget att genomföra en ny forskningsöversikt. Denna gång har vi begränsat oss till enbart räknsvårigheter. Vidare har vi inriktat oss på barns tidiga utveckling utifrån antagandet att tidig upptäckt och tidiga insatser kan vara den mest effektiva strategin för att förhindra att allvarliga svårigheter uppstår senare i skolan.

Vilka blir konsekvenserna för dem som har svårt att lära sig räkna? Att misslyckas på ett högt värderat område i skolan kan naturligtvis innebära en psykisk belastning. En knäckt självkänsla kan få spridningseffekter och drabba även andra domäner, som tex läsning eller skrivning. Svårigheter med tal och räkning kan också få konsekvenser utanför skolan. Möjligheterna till ett arbete kan försämrats för den som inte kan räkna. Det förefaller troligt att det finns ett

samband mellan räkneförmåga och senare framgång i livet i fråga om lön och arbetstillfredsställelse (se tex Leuven, Osterbeek & van Ophen, 2004). Men även i vardagslivet kan problem med enklare räkning leda till många bekymmer. Privatekonomin blir svår att hantera rationellt och samhällsinformation som tex presenteras i diagram och kurvor kan bli svåra att tolka.

Orsakerna till en funktionsnedsättning när det gäller att lära sig räkna är långt ifrån klarlagda. På senare år har emellertid genetisk, neurobiologisk, neuropsykologisk och epidemiologisk forskning alltmer börjat intressera sig för räkneshvårigheter. Hur svårigheterna utvecklas över tid, hur vanliga de är och hur de samspelar med sociala och pedagogiska faktorer behöver ytterligare utredas.

Dyskalkyli – ett dåligt definierat begrepp

Trots den ökande användningen av termen dyskalkyli är termen problematisk. Vi kommer att på olika sätt visa att det inte är fråga om något väl avgränsat och entydigt fenomen. Många viktiga företeelser i vår värld har i själva verket en sådan karaktär, vad är egentligen psykisk störning, övervikt, missbruk, fattigdom etc? Några skarpa definitioner finns knappast. Och det måste vi leva med.

Människor kan ha räkneshvårigheter av en rad skäl, som bristfällig stimulans eller dålig undervisning. Men mycket tyder på att det ibland kan handla om en grundläggande och konstitutionell oförmåga att handskas med tal och kvantiteter. Många menar att det är just denna konstitutionella problematik som kan kallas dyskalkyli. Vi avvisar inte begreppet dyskalkyli i en sådan bemärkelse. Däremot vill vi visa att det ännu är mycket svårt att i praktiken avgöra om en individs svårigheter med tal och räkning i första hand är en fråga om denna typ av svårighet eller i vilken utsträckning andra faktorer ligger till grund för problemen.

Inledningsvis redovisar vi hur vi ser på nyckelbegreppen matematiksvårigheter och räkneshvårigheter. Vi menar att matematiksvårigheter är ett överordnat, generellt begrepp som innefattar svårigheter att nå målen i hela grundskolans kursplan i matematik. Den här forskningsöversikten gäller framför allt yngre elever som i första hand uppvisar svårigheter med tal och räkning. De kan ha bristfällig taluppfattning, kan ha svårt att lära sig talfakta och att snabbt hämta fram dem ur minnet, ha svårt att genomföra räkneoperationer. Vi använder genomgående termen räkneshvårigheter som ett uttryck för den här typen av problem, såvida det inte är uppenbart att det handlar om matematik i ett bredare perspektiv. Som vi ska se kan bakgrunden till räkneshvårigheter variera. I det sammanhanget kommer vi också att diskutera begreppet dyskalkyli.

Översiktens uppläggning

Vi har lagt upp översikten så att vi i den första delen går igenom aktuell forskning om räkneshårigheter i tidiga åldrar (fram till ca 10-årsåldern), hur de uppstår, den neurobiologiska och genetiska grunden för svårigheterna samt problem vid diagnostisering. I den andra delen tar vi upp principer för undervisning av barn med räkneshårigheter. Här försöker vi också vara konkreta så att lärare som läser vår framställning ska kunna få direkt vägledning för den egna undervisningen. De flesta pedagogiska exempel som vi tar upp är hämtade från den aktuella forskningslitteraturen och har prövats ut med allmänt accepterade vetenskapliga metoder.

Forskningsöversikten bygger mycket på vår egen förtrogenhet med området och på de forskare som är mest aktiva och tongivande. NCM:s referensbibliotek har kommit till god användning, men vi har också utnyttjat flera databaser på ett systematiskt sätt. De viktigaste databaserna har varit ERIC, Psyclit, Pubmed., Academic Search Elite, Scopus, Web of Science och Google Scholar. Här har vi använt sökbegrepp som *dyscalculia*, *developmental dyscalculia*, *learning disabilities*, *math disabilities*, *arithmetic difficulties*, *mental number representations* och *working memory*. Vi har också regelbundet följt innehållet i ett antal internationella tidskrifter som: Journal of Learning Disabilities, Journal of Learning and Instruction, Developmental Science, Child Psychology, Developmental Psychology, Journal of Experimental Child Psychology, Journal of Child Psychology and Psychiatry, Journal of Educational Psychology, Current Biology, Developmental Neuropsychology, Nature och Science. Den matematikdidaktiska litteraturen inrymmer sällan material som belyser begreppet *dyskalkyli* och har därför inte kommit till så stor användning i denna översikt.

En forskningsöversikt skulle kunna vara en sk meta-analys. Då sammanställer man resultaten från en rad olika undersökningar och försöker med olika beräkningar uppskatta den genomsnittliga effektstorleken av tex en viss typ av undervisning eller behandling. Någon sådan analys presenterar vi inte här. Området är alltför nytt och brett för att kunna ge grund för en sådan. I stället har vi försökt ge en bild av forskningsläget och tagit fasta på sådant som många av de ledande forskarna tycks vara eniga om.

En del barn har stora svårigheter att lära sig räkna, trots god undervisning och trots att barnen kanske inte har så stora svårigheter att lära sig andra färdigheter. En sådan specifik svårighet med räkning har man velat ge beteckningen *dyskalkyli* (Kosc, 1974). Termen är fortfarande mer kontroversiell än *dyslexi*, eftersom avgränsningskriterierna om möjligt är än mer oklara när det gäller räkning jämfört med läsning. Vi har emellertid skäl att vänta oss en ökad användning av termen *dyskalkyli*. I detta första avsnitt ska vi närmare diskutera tänkbara innebörder av begreppet och sedan ta upp frågan om diagnos av *dyskalkyli*.

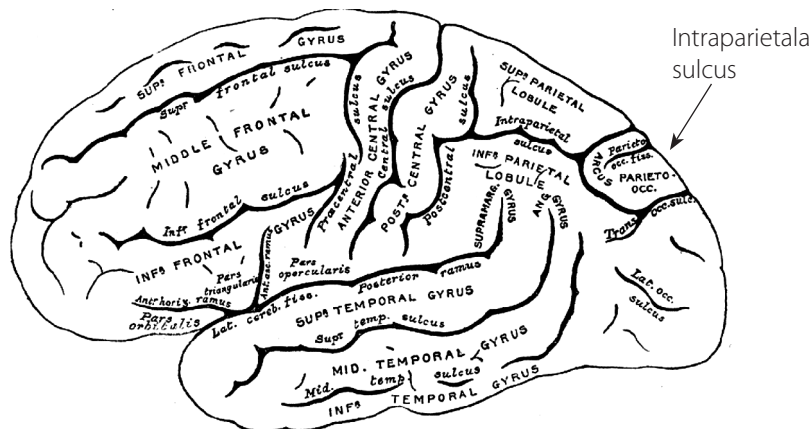
Vi ska också diskutera tänkbara orsaker till det som betecknas som dyskalkyli. I en senare del av denna forskningsöversikt kommer vi in på metoder för att förebygga räknesvårigheter och för att hjälpa elever med sådana svårigheter.

Dyskalkyli

Känslan för antal tycks vara en genetiskt betingad förmåga som spädbarn och många djurarter kan uppvisa, åtminstone om det rör sig om små mängder (Dehaene, 2007). Denna tidiga, icke-verbala känsla för antal har också kommit att kallas *the core systems of number* (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004). Forskarna är ganska eniga om att dyskalkyli innebär en bristfällig taluppfattning som ger sig tillkänna i svårigheter i mycket basala och elementära numeriska färdigheter som att jämföra antal punkter i två avgränsade mängder.

Taluppfattning skulle också kunna röra sig om en förmåga att hantera och manipulera tal eller storheter på en spatialt utspridd tallinje, som man "har i huvudet". Studier med hjälp av funktionell hjärnavbildning (fMRI) har visat att den neurobiologiska basen till denna förmåga är nätverk lokaliserade till den del av hjässloben i båda hjärnhalvorna som kallas "intraparietala sulcus" eller IPS, markerad i figur 1 (Dehaene m fl, 2003; Ashkenazi m fl, 2008).

Det är emellertid inte självklart att spädbarnets tidiga taluppfattning är av samma natur som skolbarnets sätt att representera antal på en tallinje. Von Aster och Shalev (2007) hävdar att den mentala tallinjen är resultatet av en erfarenhetsbaserad utvecklingsprocess som kräver mer än bara fungerande core systems (se också Giaquinto, 2001 samt Siegler & Booth, 2004). Arbetsminnet, språket



Figur 1. Intraparietala sulcus i hjärnans hjässlob.

och den visuella föreställningsförmågan är också faktorer som påverkar utvecklingen av den mentala tallinjen. För att konstruera, automatisera och utvidga en rumslig föreställning av ordningsföljden mellan tal måste barnet alltså länka samman förståelsen av mängd (core systems) med de språkliga och symboliska uttrycken för tal (antalsord och siffror) samt med de spatials och ordningsmässiga relationerna mellan tal. Denna process kräver kognitiva funktioner som utvecklas under förskole- och skoltiden och innefattar bland annat språket och arbetsminnet (Bull & Scerif, 2001).

Utvecklingen av en välfungerande mental tallinje är av avgörande betydelse för utvecklingen av räkneförmåga. Om ett barn av genetiska skäl har bristfälligt utvecklade core systems kan inte en fungerande tallinje komma till stånd. Då skulle man kunna hävda att räkneshvårigheterna är av dyskalkyli-natur. Men verkligheten är sällan renodlad och enkel. Bristfälligt utvecklad tallinje kan handla om störningar i språkförmåga, uppmärksamhet, arbetsminne och visuell föreställningsförmåga. Samspel mellan olika delar av hjärnan och samspel mellan hjärnan och den yttre miljön kommer att ha inverkan på hur barnets taluppfattning kan utvecklas (Paterson mfl, 2006).

Ett försök till definition av dyskalkyli

Brittiska utbildningsdepartementet (Department for education and skills) presenterade år 2001 följande definition av dyskalkyli (vår översättning):

... ett tillstånd som inverkar på förmågan att lära sig aritmetiska färdigheter. Personer med dyskalkyli kan ha svårt att förstå enkla talbegrepp, de saknar en intuitiv förståelse av tal och har problem med att lära sig talfakta och procedurer. Även om de ibland kan komma med ett korrekt svar eller använda en korrekt metod, gör de detta mer eller mindre mekaniskt och utan självtillit.

Denna definition fångar in något väsentligt, men är ändå inte entydig och skarp. Det finns personer som har svårt att lära sig talfakta och procedurer därför att de fått bristfällig undervisning, har kognitiva problem, lider av uppmärksamhetsstörningar eller har bristfälliga fonologiska funktioner. Definitionen tycks alltså handla mer allmänt om räkneshvårigheter.

Ett kärnproblem enligt forskningen om dyskalkyli gäller ändå tydligen uppfattningen av antal. En person med dyskalkyli har svårt att förstå att en mängd innehåller ett visst antal föremål, att man kan kombinera flera mängder, ta bort delar, dela upp mängder etc. De har också svårt att uppfatta om en viss samling har samma antal som en annan, ett större eller ett mindre antal och att förstå att samlingen inte behöver utgöras av synliga, konkreta ting utan att den kan lika gärna bestå av hörselintryck som tonstötar eller mer abstrakta företeelser som år

eller önskningar. Förmågan att uppfatta små antal, upp till fyra, med en enda blick tycks vara medfödd och gäller inte bara spädbarn utan också flera djurarter.

En hypotes är att det finns en modul, en avgränsad funktionsenhet i hjärnan, sannolikt IPS, som är specialiserad för den enkla antalsuppfattningen (Dehaene, 2007), och att dyskalkyli är en funktionsnedsättning som drabbat denna modul hos somliga människor. Man kan tänka sig att det finns vissa gener som kodar för att konstruera specialiserade system i hjärnan för hantering av antal. Vissa individer skulle kunna ha gener som leder till att dessa funktionella system eller nätverk i hjärnan inte blir så väl utvecklade. En analogi skulle kunna vara färgseende. Gener kodar för att bygga upp neurala system så att man kan se världen i färg. De flesta av oss får en sådan förmåga. Men en mindre grupp individer har en variation eller ett "stavfel" i den genetiska koden som leder till färgblindhet eller i varje fall stora svårigheter att skilja på rött och grönt. På samma sätt finns en liten grupp individer med dyskalkyli som har en slags "blindhet" för antal (Butterworth, 2003). Deras räknesvårigheter behöver alltså inte bero på dålig undervisning, låg allmänintelligens eller kaotiska uppväxtvillkor.

Den genetiska forskningen om dyskalkyli har emellertid ännu inte kommit så långt. I tvillingstudier har man dock kunnat visa att det finns en tydlig ärftlighet när det gäller vissa räknesvårigheter (Alarcon mfl, 1997). Molekylärgenetiskt har man emellertid långt kvar innan man kunnat lokalisera var i den mänskliga arvsmassan de kritiska generna finns. Ännu längre lär det dröja innan man får veta vilken uppgift sådana gener kan ha vid utvecklingen av nervsystemet. Vi ska återkomma till dyskalkylins ärftlighet i ett senare avsnitt.

Den mentala tallinjen och SNARC-effekten

En intressant demonstration av att det faktiskt finns något som kan betecknas som en mental tallinje är den så kallade SNARC-effekten, *Spatial numeric association of response codes*, se tex (Gevers mfl, 2006; Daar & Pratt, 2008). Uppgiften är att trycka ned en knapp så fort som möjligt för att markera vilket tal som är störst. Det visar sig då att högerhanden är snabbare än vänsterhanden om talet är stort, medan vänsterhanden reagerar snabbare för små tal. Denna effekt anses vara ett stöd för föreställningen om en mental tallinje som ordnar talen från vänster till höger i storleksordning. En tydlig SNARC-effekt kan man inte se hos barn förrän i 8-årsåldern då en tallinje börjar bli etablerad (Berch mfl, 1999). I början är de höga talen på tallinjen sammanpressade som på en logaritmisk skala. Allt eftersom utvecklingen fortskrider tycks emellertid den mentala tallinjen bli mer och mer lineär (Siegler & Booth, 2004). Mer om detta kommer i ett senare avsnitt.

Forskning med funktionell hjärnabbildning (fMRI) tyder också på att användningen av den mentala tallinjen genomgår en utveckling som är beroende av erfarenheter. Barn i åldern 8–12 år skiljer sig från vuxna i fråga om graden av neural aktivitet i parietala (i hjässloben) och prefrontala (i pannloben) områden när de löser aritmetiska uppgifter. Vuxna aktiverar mest IPS (intraparietala sulcus, se figur 1). Cohen Kadosh mfl (2007) demonstrerade den kritiska betydelsen av IPS genom att, med en teknik som kallas transmagnetisk stimulation, störa aktiviteten i IPS och framkallade därigenom samma osäkra räkneförmåga som utmärker personer med dyskalkyli. Forskarna hade alltså lyckats få till stånd en experimentellt framkallad och högst tillfällig dyskalkyli.

Barn visar signifikant lägre aktivitet i IPS men har större aktivitet i de prefrontala områden som är ansvariga för uppmärksamhet och exekutiva funktioner i arbetsminnet (Kucian mfl 2005). Mönstret ändras under utvecklingen och aktiviteten i IPS ökar samtidigt som aktiviteten i främre (prefrontala) områden minskar (Rivera mfl, 2005).

Barn med dyskalkyli uppvisar ett annat mönster av hjärnaktivitet. För det första kunde man inte se någon SNARC-effekt hos dessa barn (Bachot mfl, 2005). För det andra tycks aktiviteten i både prefrontala områden och IPS vara lägre hos barn med dyskalkyli än hos åldersmatchade jämförelsebarn (Kucian mfl, 2006). Man skulle möjligen kunna tolka detta som att barn med dyskalkyli är drabbade både av en dåligt fungerande tallinje och bristfälliga uppmärksamhetsfunktioner. Men eftersom vi inte har någon entydig avgränsning av dyskalkyli får vi tolka resultat av detta slag med viss försiktighet.

Hur vanligt är det med dyskalkyli?

Dyskalkyli är som vi framhållit ett svärfångat och inte alldeles entydigt fenomen. Med osäkra eller oskarpa avgränsningar blir det svårt att få en uppfattning om hur vanligt det är. Shalev mfl, (2001) har ändå vågat sig på en uppskattning baserad på undersökningar av ett stort antal elever och kom fram till att 4–6 procent av alla elever var drabbade av någon form av dyskalkyli. En stor andel av dessa uppvisade också andra störningar tex ADHD, dyslexi eller ångestsyndrom (Koumoula mfl, 2004).

Troligen finns det en undergrupp med en ganska ren form av dyskalkyli där core systems för kvantitativ kognition är drabbat. Därutöver finns barn med dyskalkyli som är drabbade även av andra störningar som kan bidra till nedsatt räkneförmåga. I en longitudinell studie av en stor grupp barn kom von Aster mfl (2007) fram till att 6 procent av eleverna var drabbade av dyskalkyli. Men bara 1,8 procent uppvisade "ren dyskalkyli". Resten (4,2 %) hade även andra störningar,

där dyslexi var den vanligaste formen. När flera störningar finns samtidigt brukar termen komorbiditet (samsjuklighet) användas.

Man skulle kunna tänka sig att de två grupperna, ren dyskalkyli och dyskalkyli med komorbiditet, har olika utvecklingsbakgrund. Elever med ren dyskalkyli kan ha sina svårigheter grundade i störningar i den mycket tidiga antalsuppfattningen (core systems) vilket i sin tur kan ha en genetisk orsak. Hos barn med komorbiditet kan delvis andra mekanismer verka, t ex försenat språk, störd uppmärksamhet och brister i exekutiva (se figur 7 s24) delar av arbetsminnet (se också Shalev, 2004). Naturligtvis kan även sådana störningar ha en genetisk bakgrund, men sannolikt är andra gener inblandade än vid ren dyskalkyli.

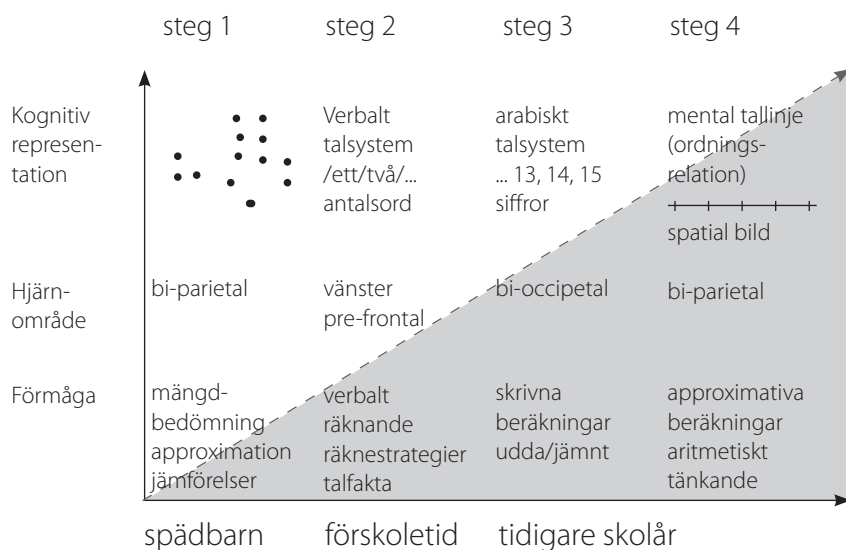
Sammanfattningsvis kan vi konstatera att frågan om hur vanligt det är med dyskalkyli (prevalensen) knappast går att besvara så länge vi inte har skarpare diagnostiska kriterier och instrument (Mazzocco & Myers, 2003). Man får också komma ihåg att många barn med räkningsvärigheter kan ha haft bristfällig undervisning eller försumlig skolgång. Räkning är i viktiga avseenden en färdighet som behöver omfattande övning för att etableras. En elev som inte fått tillräcklig övning och har en outvecklad taluppfattning kan således ha räkningsvärigheter utan att för den skull ha dyskalkyli.

En fyrstegsmodell för utveckling av talbegreppet

Vi har tidigare presenterat en utvecklingsmodell där vi angivit 29 tidiga steg mot god räkneförmåga (Lundberg & Sterner, 2006). Denna modell har huvudsakligen syftat till att ge lärare för de tidiga skolåren ett enkelt verktyg för observation av barns utveckling. Mer teoretiskt ambitiös är den modell som föreslagits av von Aster och Shalev (2007) och som vi redovisar i figur 2, se nästa sida.

Denna modell är flerdimensionell och tar upp den kognitiva representationen av kvantiteter, de hjärnområden som är involverade samt de förmågor som är möjliga på olika utvecklingsnivåer. Därutöver markeras arbetsminnets utveckling. Fyra steg i utvecklingen har särskilt markerats. Detta innebär inte att utvecklingen sker sprängvis. Liksom inom andra områden får man räkna med en gradvis förändring där erfarenheter ackumuleras och möjliggör nya insikter.

Basen för antalsuppfattning är här steg 1. Spädbarn kan uppfatta antal, göra jämförelser av olika antal och göra approximativa bedömningar. Denna medfödda förmåga (core systems) är en nödvändig förutsättning för barn att lära sig associera ett uppfattat antal objekt eller händelser med språkliga uttryck för antal (räkneord) och senare med arabiska siffror. Det språkliga momentet (steg 2) och det arabiska siffermomentet (steg 3) utgör i sin tur förutsättningarna för utvecklingen av en mental tallinje (steg 4) där uppfattningen om



Figur 2. En utvecklingsmodell i fyra steg för numerisk kognition (von Aster & Shalev, 2007). Det skuggade området under den streckade diagonalen betecknar ökningen i arbetsminnets kapacitet. Bi-parietal avser områden i hjässloben i båda hjärnhalvorna. Bi-occipetal betyder synbarkens (nacklobens) båda sidor.

ordningsrelationerna mellan tal kommer in som en andra, förvärvad grundbult för taluppfattningen.

Om steg 1 inte fungerar som det ska, tex till följd av genetisk sårbarhet, kan ändå namn på tal läras in mekaniskt, men dessa namn fungerar mer eller mindre som nonsensord utan innebörd om numerisk kvantitet. Då löper barnet stor risk att drabbas av ren dyskalkyli.

Om det första steget fungerar men språkutvecklingen är störd kan det bli svårt att etablera kopplingen mellan antal och räkneord, steg 2, vilket kan leda till försening i utvecklingen av räknerutiner, räknestrategier och lagring av talfakta. Barn med försenad språkutveckling och dyslexi löper alltså en förhöjd risk att även råka ut för räkneshvårigheter. Svårigheter att koppla antal och räkneord har visat sig kunna förutsäga räkneshvårigheter längre fram i skolan. Aunola m fl (2004) visade att barnets förmåga till uppräknings i förskoleåldern kunde förutsäga hur väl barnen utvecklade räkneförmågan under det första skolåret. Även Passolunghi, Vercelloni & Schadee (2007) visade att hur snabbt ett barn kunde räkna från ett till tio i förskolan hade samband med hur bra han/hon räknade i skolan ett halvår senare. Krajewski & Schneider (2008)

genomförde en undersökning av förskolebarn som de sen följde ända till det fjärde skolåret. Barn som hade försenad utveckling i fråga om att koppla antal till räkneord uppvisade räknsvårigheter i fjärde klass. Barn som också har störningar när det gäller arbetsminnet och förmågan till uppmärksamhet kan få problem med sekvenser eller med långa räkneord (tex trehundra-femtioåtta). Det blir lätt misstag som kan inverka menligt på räkneförmågan (von Aster, 2000).

Många barn med språkförsening, dyslexi eller ADHD kan ha svårt att lära sig hantera siffersystemet säkert med den komplicerade syntaxen för positioner för talen 11–19 (steg 3). Särskilt svårt kan det bli för barn med annat modersmål än svenska, tex danska eller tyska där entalen kommer före tiotalen, (tex fem og tyve i danskan) som måste kastas om till en annan konvention (tjugofem). Detta kan för sårbara individer bli besvärligt och förhindra en snabb automatisering.

När man klart förstått talens ordningsföljd och uppfattat ett tals position i relation till närstående tal, kommer tallinjen att spela allt större roll. De kritiska positionerna på tallinjen (ental, tiotal, hundratal etc) som har sin markering i det arabiska systemet, ger orientering i den inre värld i vilket det aritmetiska tänkandet äger rum.

Vi har inte på ett tillfredsställande sätt kunnat besvara frågan om vad dyskalkyli egentligen är. En lösning skulle kunna vara att reservera termen bara för de fall där steg 1 är allvarligt drabbat. Då kan inte en adekvat taluppfattning utvecklas. Butterworth (1999) har ingående beskrivit ett sådant fall, och han har utformat tester för att upptäcka sådana basala störningar i taluppfattningen (Butterworth, 2003).

Vi skulle också kunna tänka oss att dyskalkyli även handlar om en dåligt utvecklad mental tallinje som allvarligt försvårar aritmetiska operationer. Då skulle den föreslagna fyrstegsmodellen innebära att en störd taluppfattning kan ha både en medfödd sida (steg 1) och en förvärvad sida som gäller semantisk tal-förståelse (steg 4 med tallinje).

Ännu vet man inte mycket om räknsvårigheternas genetik. En konsekvens av modellen skulle kunna vara att de som drabbas av störningar redan i steg 1 skulle vara mindre mottagliga för specialpedagogiska insatser och därmed ha en sämre prognos.

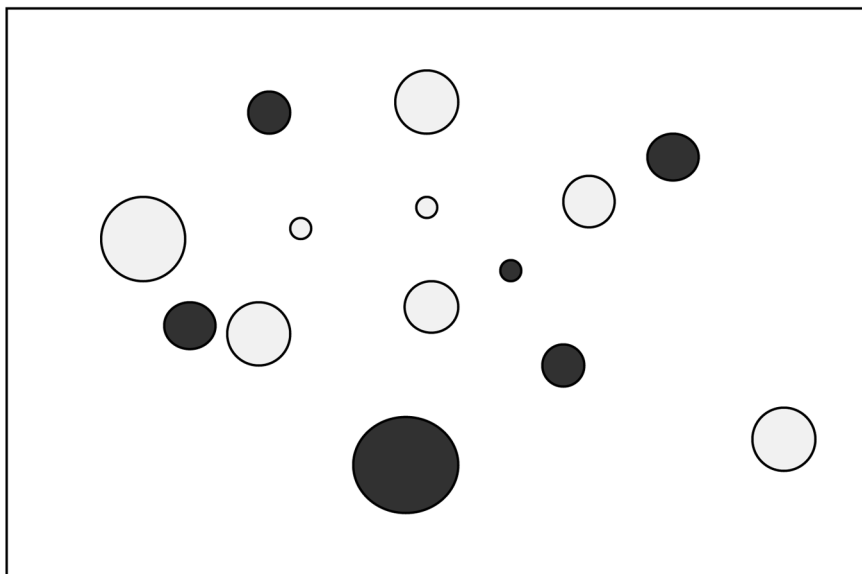
Approximativa antalsbedömningar och taluppfattning

Som vi vid det här laget har kunnat konstatera inrymmer vår kvantitativa förmåga en icke-verbal, icke-symbolisk förmåga att göra approximativa bedömningar av antal eller mängder och en mer precis symbolisk förmåga att genomföra exakta beräkningar. Den senare förmågan är resultatet av planmässig undervisning,

medan den approximativa förmågan är något vi har gemensamt med flera djur och något som man kan observera redan hos spädbarn.

I en nyligen publicerad studie av Halberda, Mazzocco och Feigenson (2008) har man låtit 14-åringar bedöma antal på följande sätt:

På en datorskärm har samlingar av blåa och gula (i figur 3 ljus och mörkt grå) cirklar visats. Uppgiften har varit att avgöra vilka som är flest – de gula eller de blåa cirklarna. En skärm kunde se ut så här:



Figur 3. Exempel på stimulusmaterial som användes av Halberda mfl för att undersöka taluppfattning hos 14-åringar. Uppgiften är att så snabbt som möjligt avgöra vilka cirklar det finns flest av – gula eller blå?

Cirklarna presenterades så snabbt på skärmen (0,2 sek) att det inte fanns någon möjlighet att räkna dem. Om eleverna tyckte att de gula cirklarna var flest tryckte de på en gul knapp och sa "gula" och på motsvarande sätt för blå. Förhållandet mellan antalet cirklar som var i majoritet och de som var i minoritet varierade. Ibland kunde det vara dubbelt så många cirklar av den mest frekventa sorten. Ibland var förhållandet bara 8:7 och däremellan 4:3 eller 5:6. Det totala antalet cirklar varierade också från exponering till exponering. Forskarna såg dessutom till att den totala yta som respektive färg täckte på skärmen var

densamma. Därmed kunde eleverna inte vägledas av något ovidkommande när de gjorde sina bedömningar. Det avgörande var antalet.

Nu visade det sig att de 64 elevernas förmåga att göra antalsbedömningar varierade högst avsevärt. Måttet på precisionen i diskrimineringsförmågan kunde relateras till olika mått på elevernas kunskande i aritmetik och algebra under tidigare skeden i deras skolgång. I testen ingick, beroende på ålder, uppgifter som att räkna högt, talfakta, bedömning av tals relativa storlek, de fyra räknesätten med hela tal, rationella tal samt algebra. Forskarna hade också tillgång till flera mått på elevernas kognitiva förmåga, arbetsminne och snabbhet att benämna färger. Då kunde de med statistiska metoder kontrollera för (konstanthålla) dessa faktorer och se om korrelationen mellan antalsdiskriminering och olika sidor av förmåga att förstå och använda tal var statistiskt signifikant, vilket den var. Elever som var bra på antalsdiskriminering var också bra på olika aritmetikuppgifter. Omkring 20 procent av variationen i räkneförmåga kunde förklaras av variationen i förmågan att diskriminera antal, även sedan man kontrollerat för en lång rad kognitiva faktorer.

Undersökningen har alltså visat att den basala förmågan att hantera kvantiteter (core systems) är betydelsefull för en god utveckling av den symboliskt baserade beräkningsförmågan. Den intuitiva, omedelbara och approximativa bedömningen av antal skulle alltså kunna vara ett uttryck för den biologiskt baserade "core"-förmågan. Eftersom individer tycks ha den förmågan i varierande grad, kanske vi inte har någon skarp gräns för att kunna avgöra om någon har dyskalkyli eller inte. Variationen är kontinuerlig och varje gränsdragning blir godtycklig.

Vi har redogjort för denna undersökning ganska noggrant, eftersom den är ovanligt välgjord och på ett mönstergillt sätt har kontrollerat ovidkommande faktorer. Den har också välförtjänt fått plats i den högt ansedda tidskriften *Nature*, som har en extremt noggrann granskning av insända artiklar.

Eftersom denna undersökning var retrospektiv (vilken framgång eleverna haft i tal och räkning registrerades i efterhand) får man vara försiktig med tolkningen. I princip skulle det kunna ha varit så att de elever som hade god taluppfattning tränade upp sin förmåga att göra antalsbedömningar.

Stimulans under förskoletiden

När barn kommer till skolan är de påfallande olika i fråga om hur långt de har kommit i sin utveckling när det gäller talbegreppet. En del kan utan vidare räkna till hundra eller mer, de känner igen alla siffrorna och kan utföra enkla additioner och subtraktioner. Andra har långt kvar till denna nivå. De har ingen klar taluppfattning och kan inte många siffror. En orsak till denna stora variation

i utveckling kan vara att en del barn har en dyskalkylisk läggning. Men det kan också vara bristfällig stimulans under förskoleåldern. Duncan mfl (2007) har visat att förskolebarns matematiska kunnande har starkt samband med senare färdigheter i skolan. Man kan rentav med viss säkerhet förutsäga hur det ska gå i matematik på högstadiet och gymnasiet. Sambandet mellan tidiga kunskaper och senare förmåga är större när det gäller matematik än när det gäller läsning.

I amerikanska studier har man visat att barn från ekonomiskt och utbildningsmässigt mer gynnsamma miljöer får mer numerisk stimulans än barn som växer upp i mindre privilegierade familjer (Clements & Samara, 2007; Starkey mfl, 2004). De uppmuntras att räkna föremål, att öva räkneramsor, att räkna från ett givet starttal uppåt eller nedåt, känna igen skrivna siffror, addera, subtrahera och jämföra numeriska storheter.

Siegler och Booth (2004) hävdar att talbegreppet innefattar förmågan att approximera numeriska storheter. Man ska kunna avgöra på ett ungefär hur lång en linje är eller ungefär hur många barn som kom till lekparken eller ungefär hur mycket $24 \cdot 94$ är. Sådana uppskattningar bör kunna användas i diagnostiskt syfte men bör också ha en pedagogisk potential. Att öva barnen att göra ungefärliga numeriska bedömningar kan vara en väg att utveckla talbegreppet.

En typ av bedömning av barns utvecklingsnivå i fråga om numeriska begrepp kan göras på en tallinje. Horisontellt på ett papper finns en tallinje utritad med ändpunkter, t ex 0 och 10. Så får barnen ett tal, t ex 7 och uppgiften är att med ett streck på linjen markera var 7 bör ligga. Sådana bedömningar blir naturligtvis svårare om tallinjen går från 0 till 100. Var ligger 67? Kvotegenskaperna hos tal kommer till uttryck på tallinjen. Om talet 40 ligger på en viss punkt bör 80 ligga på dubbla avståndet från 0. Om man har ett korrekt talbegrepp bör man kunna bedöma att avstånden mellan talen ökar lineärt med storleken på dem. Men många barn är långt därifrån i sin utveckling. En del barn klarar i slutet av förskolan inte att rangordna talen mellan 1 och 10 (Ramani & Siegler, 2008). Något äldre barn kan kanske klara rangordningen mellan tal men förstår inte att avståndet mellan talen 1 och 2 är lika stort som avståndet mellan 7 och 8. Snarare tenderar de att använda en "logaritmisk" representation av numeriska storheter så att tal på skalans nedre del ligger längre ifrån varandra än tal på den övre delen. En majoritet av barnen i förskolan och ungefär hälften av barnen i första klass tror att avståndet mellan 12 och 20 är mycket större än avståndet mellan 72 och 80 på en tallinje från 0 till 100. Inte förrän efter ett eller två år i skolan tror de flesta barnen att dessa avstånd är lika stora.

Hur ska man stimulera barn så att de utvecklar en mer lineär uppfattning av tallinjen? Naturligtvis spelar räkneerfarenheter i skolan en avgörande roll. Siegler & Ramani (2008) hävdar att man kan stimulera taluppfattningen redan hos förskolebarn så att underprivilegierade barn kommer i kapp sina mer

gynnade kamrater och därmed får en god start i räkneinlärnigen i skolan. I del II av denna översikt ges exempel på framgångsrika försök att stimulera förskolebarns taluppfattning.

Några principiella problem vid diagnos av dyskalkyli

Den vanligaste avgränsningen av inlärningsproblem har varit att man konstaterar att ett barn presterar under en viss gräns på ett standardiserat prov. Visserligen har man vetat att sådana gränser alltid har ett visst godtycke, men det har ändå varit uppenbart att de barn som hamnat under gränsen har svårare än de flesta andra att klara kraven.

Diskrepansdefinitionen

Ett annat vanligt sätt att avgränsa inlärningsproblem har varit att utgå från en diskrepans, en avvikelse mellan prestationen på ett färdighetstest t ex i aritmetik och poängen på ett intelligenstest. Man skulle också kunna tala om underprestation. Resonemanget har då varit att en individ med ett gott resultat på intelligenstestet borde förväntas ha ett bra resultat på färdighetstestet. Om barnet ändå, trots hög intelligenspoäng, har presterat dåligt på färdighetstestet, så måste det föreligga en specifik problematik som inte har med intelligensen att göra.

Diskrepansdefinitionen av inläringssvårigheter inrymmer emellertid en rad problem (Lundberg, 2008). Vilken aspekt av intelligens ska vi ta i beaktande? Det vanligaste intelligenstestet för barn, WISC, brukar sammanfatta resultatet dels i en fullskalepoäng, FSIQ, och dels i en språklig del, VIQ, och en utförandedel "performance", PIQ. Vilket ska man nu ta i beaktande? FSIQ eller bara VIQ eller bara PIQ? Utfallen kommer att skifta beroende på vad vi väljer. Vidare är det oklart vilka typer av svårigheter man beaktar i matematiktesten. Är det både talfakta och problemlösning? Finns geometri med? Hur väger man ihop olika färdigheter?

Rent psykometriskt eller statistiskt är diskrepansdefinitionen också problematisk. Hur stor ska diskrepansen vara för att vi ska kunna tala om underprestation? Om man, som en del har föreslagit, använder en avvikelse på en standardavvikelse utgår resonemanget från att IQ och räkneförmåga är nästan perfekt korrelerade. Det är de inte. Alltså måste man utgå från regressionen och fastställa ett konfidensband (en statistisk teknik att undersöka samband mellan olika variabler) under vilket den kritiska regionen finns avgränsad. En sådan diskrepansdefinition ser vi emellertid ytterst sällan i litteraturen.

På det empiriska planet har man också problem. Fyra kriterier bör egentligen vara uppfyllda för att vi ska kunna hävda att diskrepansdefinitionen har giltighet.

1. När det gäller tex räkning måste man kunna visa att det mönster av informationsprocesser som ligger till grund för räkneproblemen hos elever med låg IQ är annorlunda än för dåliga räknare med hög IQ. Detta har inte kunnat visas.
2. Man måste kunna visa att de neuroanatomiska avvikelser (handlar bla om hur utvecklade förbindelserna är mellan olika områden i hjärnan) som ligger till grund för inlärningsproblemen är olika för olika IQ-nivåer, att den karakteristiska signatur i hjärnans aktivitet som kan observeras vid inlärningsproblem är olika för olika IQ-nivåer, tex aktivitetsnivån i prefrontala områden och IPS. Detta har inte heller kunnat visas.
3. Att dåliga räknare med hög eller låg IQ kräver olika pedagogiska insatser för att få hjälp med svårigheterna. Det har man inte kunnat visa.
4. Att det finns olika genetiska grunder för problemen beroende på IQ-nivå. Inte heller detta har visats.

Om nu varken en godtycklig gräns på ett prestationstest eller ett diskrepanskriterium duger, hur ska då inlärningsproblemen avgränsas? Är en definition överhuvudtaget nödvändig?

På många håll kräver man en formell diagnos för att en elev ska få särskilda hjälpinsatser. Detta betyder inte nödvändigtvis att det är ett berättigat krav. Varje elev har rätt att få den pedagogiska hjälp han eller hon behöver alldeles oberoende av formell diagnos. Men en god pedagogisk insats kräver att man har kartlagt elevens svårigheter så att hjälpen verkligen kan avpassas till elevens behov.

Mottaglighet för undervisning

På senare år har intresset ökat för en metodik som innebär att man vid diagnostisering försöker ta reda på hur mottaglig eleven är för en pedagogisk insats. Låt oss föreställa oss två elever med samma låga prestationsnivå i räkning under de första skolåren. Så sätter vi in en väl beprövad undervisning. De flesta är eniga om att denna undervisning är effektiv. Efter en tid mäter man elevernas framgång. En av eleverna uppvisar påtagliga framsteg. Räkningen går fortare och säkrare och förståelsen blir allt bättre. Den andra eleven visar föga framgång. Osäkerheten och långsamheten är lika stor som tidigare. Uppenbarligen är denna elev mindre mottaglig för dessa pedagogiska insatser.

Man kan misstänka att den första eleven som visar mottaglighet har svårigheter av en annan natur än den andra eleven. Den mottagliga eleven har kanske haft en olycklig start på sitt lärande, varit frånvarande eller sjuk vid viktiga

genomgångar, har saknat kompenserande stöd hemifrån, har fått en bristfällig undervisning som skapat problem för flera elever, eftersom progressionen varit för snabb, abstraktionsnivån för hög eller systematiken för dålig. Egentligen har denna elev inte någon påtaglig grundläggande problematik med räkning. Med god undervisning bör denna elev ha goda möjligheter att uppnå en acceptabel nivå.

Den andra eleven som inte visat mottaglighet för undervisningsinsatserna kan ha mer fundamentala problem. Det kan handla om neurologiska avvikelser med genetisk grund som lett till fundamentala problem med taluppfattningen, bristfälliga exekutiva funktioner eller bristfälligt arbetsminne. Uppenbarligen har de två eleverna olika problemprofiler som rimligen kräver olika insatser.

Den strategi för diagnostisering som bygger på mottaglighet för undervisning (Response to Intervention, RtI) har, trots den klara logiken, emellertid sina problem. För det första är det inte helt lätt att avgöra vad som är en god, och allmänt accepterad undervisning. I processen ingår ju alltid en lärare, som trots adekvat uppläggning av undervisningen ändå kan ha en negativ inverkan på eleven. En kall och avvisande hållning, en brist på engagemang kan ödelägga det bästa undervisningsupplägg. Ett annat problem är mätningen av framstegen. Den förutsätter att vi har reliabla och valida instrument. Dessa två problem är mer praktiska än principiella och på sikt bör man kanske kunna komma tillrätta med dem.

En viktig poäng med idén om mottaglighet för undervisning är att den inrymmer kravet på att en diagnos måste ske vid flera tillfällen. Vid återkommande kartläggningar kommer man att finna att somliga elever inte längre har några betydande svårigheter. Att då behöva gå omkring med en dyskalkylietikett kan inte befrämja den fortsatta utvecklingen.

Finns det olika undergrupper av räkningsvärigheter?

Som vi tidigare konstaterat finns det anledning att utgå från att elever med räkningsvärigheter utgör en heterogen grupp. Somliga har basala problem med taluppfattningen och förtjänar kanske diagnosen dyskalkyli. Andra svårigheter har en annan bakgrund som behöver redas ut. Ofta är det frågan om komplicerade blandformer. När det gäller läs- och skrivsvårigheter har frågan om avskilda undergrupper varit föremål för många studier. Delvis har nog inspirationen kommit från medicinen där man har olika undergrupper av sjukdomar som kräver olika behandlingar. Problemet är att subgrupperingarna sällan står sig någon längre tid (för en kritisk metodologisk diskussion, se Lundberg, 1985).

Vi får nog leva länge med ovisshet i frågan om subgruppering. Vi kan förstås konstatera att olika individer har olika profiler på sina svårigheter. I en del fall domineras inlärningsproblemen av sociala och emotionella problem, ångslan,

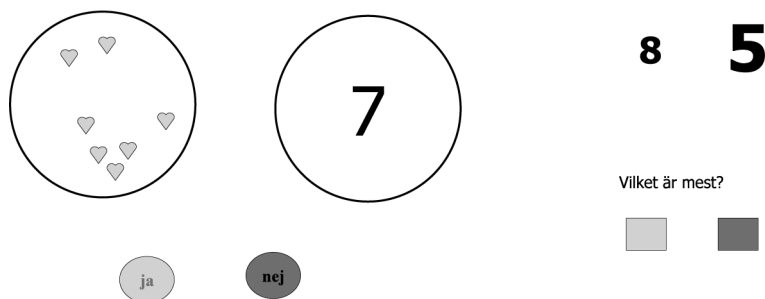
depression, ångest, aggressivitet, bräcklig självbild, bristfällig uppgiftsorientering eller oförmåga till självreglerad inläring. I andra fall är det fråga om mer avgränsade störningar i arbetsminnet eller i förmågan till kvantitativ begreppsbildning. En god kartläggning går ut på att identifiera dominerande faktorer och problemprofiler i syfte att få direktiv för utformningen av de pedagogiska insatserna.

Vad ska man svara en rektor eller annan ansvarig i skolan som kräver dyskalkyli diagnos för att avsätta resurser? Som vi ser det måste man säga att det ännu inte finns någon tillräckligt skarp definition av dyskalkyli och inte heller tillräckligt skarpa mätinstrument som gör det möjligt att i enskilda fall säkert avgöra om det är fråga om dyskalkyli. Det är för det mesta inte svårt att avgöra om en elev har stora svårigheter i skolan. Oavsett vad dessa svårigheter beror på måste eleven uppenbarligen ha extra stöd. Det är detta den ansvarige måste förstå. En kvalificerad utredning behövs för att avgöra vilken typ av hjälp eleven i första hand bör ha.

Screening enligt Butterworth

Ett intressant försök att ringa in den mer renodlade formen av dyskalkyli har gjorts av Butterworth (2003). Han har utvecklat ett datorbaserat screening-instrument där han försöker komma åt den basala svikten i förmågan att uppfatta antal (core systems). I ett deltest visas en bild med en mängd fyllda cirklar eller andra figurer i datorskärmens vänstra del och en siffra i den högra delen. Uppgiften är helt enkelt att avgöra om det är lika många föremål som anges av siffran eller om det är ett annat antal. Eleven markerar detta genom att trycka ned en av två knappar, och tiden mellan bildpresentation och knapptryckning registreras med millisekundprecision. Butterworth menar att korrekta svar inte säger tillräckligt. Det kan eleven komma fram till genom att räkna punkterna en efter en. Reaktionstiden avslöjar om han/hon med ett enda ögonkast kan uppfatta antalet direkt. En person med renodlad dyskalkyli klarar inte detta enligt Butterworth. Förmågan att direkt se antalet tycks inte ha med undervisning att göra.

En annan uppgift består i att snabbt avgöra vilken av två siffror, tex 7 och 9 som betecknar den största kvantiteten. Om siffran 7 är typografiskt mycket större än siffran 9, ska eleven ändå markera att 9 är större än 7 och således bortse från siffrans fysiska storlek. Vad som mäts är snabbheten och säkerheten i abstraktionen där man kan bortse från en irrelevant aspekt och inrikta sig på siffrornas kvantitativa innebörd.



Figur 4. Exempel på Butterworth-uppgifter

I Butterworths batteri ingår också aritmetiska testuppgifter där resultatet är mer beroende av att eleven har fått undervisning och träning. Om resultaten på de två första typerna av uppgifter är påtagligt sämre än resultaten på aritmetikuppgifterna har man enligt Butterworth anledning att misstänka dyskalkyli. I en undersökning av 60 elever i årskurs 3 kunde vi inte finna en enda elev med en sådan resultatprofil (Lundberg & Sterner, 2006) vilket kan tyda på att von Asters (2007) uppskattning att ren dyskalkyli sällan förekommer (1,8%) har fog för sig. När Butterworth talar om dyskalkyli tar han inte upp fallen med komorbida störningar.

Andra diagnostiska metoder

Tallinjens karaktär

Eftersom dyskalkylins kärnproblem gäller taluppfattning och förmågan att utveckla en mental tallinje, har det varit naturligt att utforma diagnostiska uppgifter där man vill komma åt dessa basala problem. Som vi redan nämnt är den spontana och naturliga tendensen att logaritmiskt placera ut talen på en tallinje – ju högre talen är desto större är benägenheten att packa ihop dem så att intilliggande tal ligger tätare på varandra än tal i början av skalan. Det är först efter några år med formell undervisning i matematik som skalan börjar bli lineär.

I en typ av test (Lonnemann m fl, 2008) får eleven se tre tal, t ex 26, 37, 82. Hon/han ska så snabbt som möjligt avgöra vilket avstånd i fråga om kvantitet som är störst, avståndet mellan 26 och 37 eller mellan 37 och 82. Det fysiska avståndet mellan de tre talen varierar på olika sätt. I en betingelse markeras ett litet avstånd mellan 26 och 37 samt ett stort avstånd mellan 37 och 82:

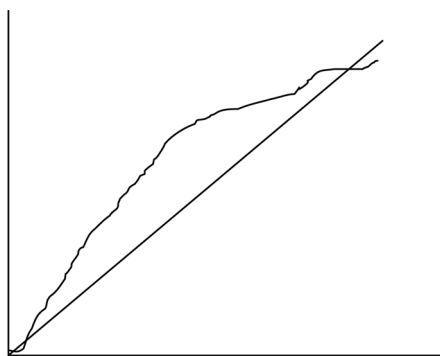
(26.....37.....82).

Här är det alltså kongruens mellan talens storleksskillnad och det fysiska avståndet mellan talen. I en annan betingelse har man inkongruens:

(26.....37.....82).

För den som utvecklat en lineär tallinje blir uppenbart den inkongruenta betingelsen svårare (längre reaktionstid och fler fel), medan uppgifterna blir mer likartat svåra för den som ännu inte har någon funktionell tallinje. Elever med dålig räkneförmåga blev alltså inte lika belastade av den inkongruenta betingelsen.

Tallinjens karaktär kan också enkelt bestämmas i en uppgift där eleven på en horisontell linje ska markera var ett givet tal bör placeras. Linjen kan ha 0 och 100 markerade i ändpunkterna. För varje markering som eleven gör mäts avståndet till den korrekta placeringen. I ett diagram kan man pricka in elevens alla markeringar och jämföra mot den lineära placeringen och beräkna hur mycket av variansen som en lineär funktion kan förklara och i vilken grad en logaritmisk funktion kan karakterisera elevens markeringar. Ju mer lineär funktionen är desto mognare är taluppfattningen och desto mindre är risken för svårigheter med tal och räkning (Opfer & Siegler, 2007).



Figur 5. Perfekta markeringar på tallinjen leder till den räta linjen. Avvikelser från denna visar att eleven inte uppfattar relationen mellan olika tal på rätt sätt.

Att räkna på fingrarna

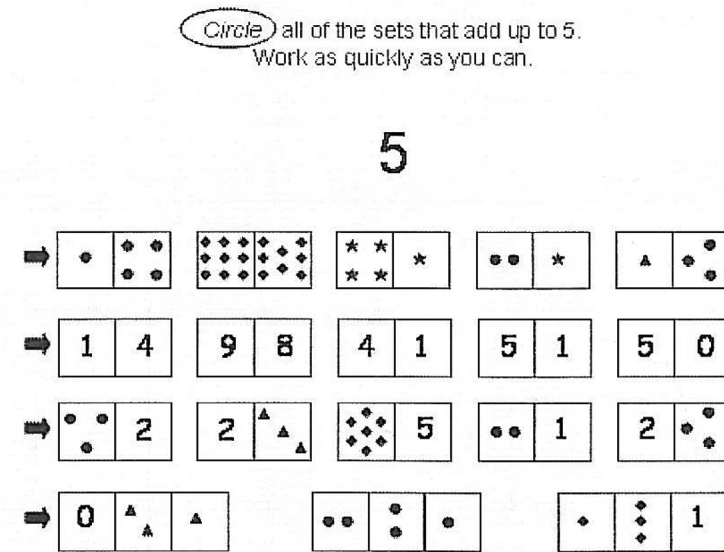
Kaufmann (2008) menar att räkning på fingrarna underlättar utvecklingen av en funktionell tallinje och att det finns en neurofunktionell koppling mellan fingrar och taluppfattning. I en studie av Rusconi m fl (2005) kunde man visa att man genom sk transkranial stimulering av vänstra hjässloben hos vuxna kunde hämma

försökspersonernas förmåga att röra fingrarna och att genomföra kvantitativa bedömningar. Uppenbarligen ligger områdena för fingerrörelser och taluppfattning nära varandra. Det har också kunnat visas att *fingeragnosi* kan vara kopplad till bristfällig räkneförmåga (Noël, 2005). Fingeragnosi innebär svårigheter att identifiera de egna fingrarna. Man kan t ex med ett vanligt A4-papper dölja handen för elevens åsyn. Handen ska ligga på bordet och testledaren petar på nageln till ett finger och eleven ska tala om vilket finger det var som berördes. Ett annat sätt är att peka på två olika fingrar efter varandra och be eleven visa vilka fingrar det var och i vilken ordning de vidrördes. Fingeragnosi innebär alltså att ha särdeles svårt att hålla reda på sina fingrar och att klara uppgifter av denna typ.

Sambandet mellan fingeragnosi och räkneförmåga har lett till att man väckt tanken på att ett träningsprogram för att hålla rätt på fingrarna skulle kunna förbättra räkneförmågan (Gracia-Baffaluy & Noël, 2008). Deras studie behöver dock upprepas innan metoden kan rekommenderas. Barns benägenhet att räkna på fingrarna verkar i alla fall vara en mycket naturlig tendens som man nog inte ska försöka undertrycka. Dels ger fingrarna den spatiala (rumsliga) utspridningen av talen, och dels blir kopplingen till 10-bassystemet naturlig. Fingrarna blir konkreta representationer av talens storlek (se även Neuman, 1989). Efter hand utvecklar barn i de flesta fall en mer abstrakt symbolisk representation av talen, och beroendet av fingerstöd minskar.

Mer om taluppfattning

Ytterligare en testtyp (Number sets test) för att komma åt taluppfattningen har utvecklats av Geary, Baily och Hoard (2009). Barnen får se rutor som ligger intill varandra. I varje ruta finns en siffra eller ett antal prickar (stjärnor, trianglar e dyl). Många sådana par eller tripletter av rutor presenteras. Uppgiften är att så snabbt som möjligt ringa in de rutpar som har kvantiteter som tillsammans blir 5 (se figur 6 på nästa sida). Det kan vara en ruta med två trianglar och en intilliggande med tre trianglar eller en ruta med siffran 1 och en närliggande med siffran 4. Ibland bildar rutparen högre summor än 5. Då ska barnet inte ringa in dessa. I en annan uppgift ska summan uppgå till 9, vilket naturligtvis är lite svårare. Testet kan genomföras i grupp och tar högst 10 minuter. Detta test kunde i början av det första skolåret identifiera två av tre elever som under årskurs 3 fick diagnosen allvarliga räkningsvårigheter samt i 9 fall av 10 avgöra vilka som inte var i riskzonen för räkningsvårigheter.



Figur 6. Ett exempel på uppgift i "Number set test". Det gäller att så snabbt som möjligt ringa in alla par eller tripletter av rutor som bildar summan 5.

Snabb benämning

En vanlig metod vid diagnostisering av inlärningsproblem har varit att eleven så fort som möjligt ska benämna en räkka bokstäver, siffror eller bilder (RAN, rapid automatized naming). Personer med dyslexi har ofta svårt med sådana uppgifter och man har velat tolka detta som en grund för deras bristfälliga flyt i läsningen. Nu är RAN-uppgifter egentligen ganska komplicerade. Det handlar om att snabbt kunna identifiera något, att från minnet plocka fram ett namn, att snabbt få igång talapparaten och att högt kunna uttala namnet, att snabbt skifta uppmärksamheten till nästa objekt etc.

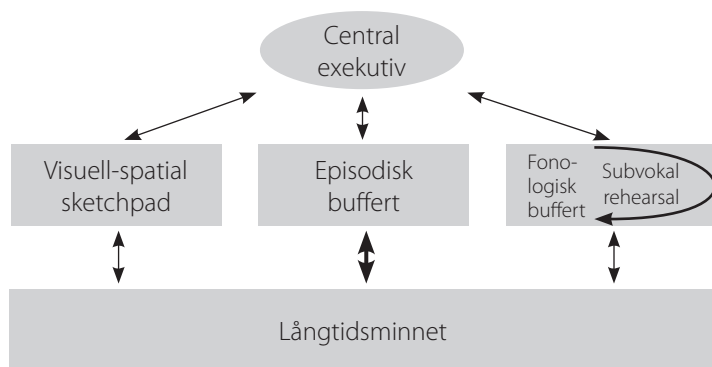
I en undersökning av Willburger m fl (2008) jämfördes fyra grupper av elever i 9-årsåldern: elever med renodlad dyslexi, elever med renodlad dyskalkyli (enlig forskarna), elever med både dyslexi och dyskalkyli samt elever med typisk utveckling utan problem på något av områdena. Man var också noga med att utesluta elever som hade ADHD-liknande symptom. Det visade sig att elever med renodlad dyskalkyli var särskilt dåliga på en av uppgifterna av RAN-typ, nämligen då en räkka med olika kvantiteter presenterades i form av små geometriska figurer som varierade i antal från ett till fyra (i princip på detta sätt: *, ***, **, ***, ***, *, **, **, etc). Uppgiften var alltså att så fort som möjligt ange hur många element som ingick i varje grupp.

Elever med dyslexi hade framför allt problem med benämning av bokstäver och siffror. Elever med både dyskalkyli och dyslexi hade också problem med sådana uppgifter men var dessutom dåliga på kvantitetsbenämning. Denna additiva effekt av problemen tolkades som att dyslexi och dyskalkyli är delvis oberoende problem. Vi återkommer till denna fråga.

Arbetsminnets roll vid räknesvårigheter

Det är uppenbart för var och en att vi måste hålla saker i huvudet när vi räknar. Om uppgiften är att addera 37 och 18 måste vi, om vi förenklar genom att öka 18 till 20, komma ihåg att det var 37 som vi utgick ifrån som då måste minskas till 35, och då gäller det att komma ihåg att vi hade fått fram 20. Samtidigt som vi genomför aritmetiska operationer måste vi alltså hålla tal i minnet. Vid vissa textuppgifter i matematik är det ofta fråga om flera steg. Vi kommer fram till ett delresultat som vi måste hålla i minnet när vi går vidare. Alla har upplevt att denna minneslagring har sin begränsning. I synnerhet vid huvudräkning kan vi känna att vi måste mobilisera allt vad vi har av koncentration och uppmärksamhet.

Den mest populära och mest utforskade teorin om arbetsminnet har formulerats av Baddeley (2007). Enligt hans modell kan man urskilja fyra komponenter i arbetsminnet: den fonologiska bufferten, det visuella skissblocket (sketchpad), den episodiska bufferten och den centrala exekutiven (se figur 7).



Figur 7.
Arbets-
minnet enligt
Baddeley
(2007).

Den fonologiska bufferten, korttidslagringen, av information kommer tydligt till uttryck om vi tex slår upp ett telefonnummer i katalogen och har ett stycke att gå till telefonen. Då måste vi hålla siffrorna i minnet. Vanligen överför vi dem till verbal form och går tyst och upprepar siffrorna i grupp eller en i taget, tills vi ska slå numret. Det förargliga är att vi ibland missar någon siffra eller kastar om

dem. Den fonologiska komponenten inrymmer således lagring och tyst repetition (rehearsal), vilket hindrar den avklingande inre ljudmässiga och språkliga representationen att helt dö ut.

Det visuellt-spatiala skissblocket är av annan natur. Här ser vi för vår inre syn en slags bild av det vi ska komma ihåg. För att klara sig i tex memory-spel blir en sådan minneslagring ofrånkomlig. När det gäller matematik har man skäl att räkna med en koppling mellan det visuella-spatiala skissblocket och den mentala tallinje som vi diskuterade tidigare.

Den episodiska bufferten har till uppgift att integrera information från arbetsminnets olika delar och från långtidsminnet där man har sin kunskap och sina erfarenheter lagrade mer beständigt. I denna buffert, eller tillfälliga upplagring, binds informationsbitar som kommer från olika källor ihop och integreras till en sammanhängande episod.

Den centrala exekutiven utövar reglerande kontroll över de andra komponenterna, koordinerar, övervakar, riktar in uppmärksamheten och hämmar ovidkommande impulser.

Det förefaller rimligt att anta att bristfälligt arbetsminne och räknesvårigheter hänger ihop. Frågan är bara på vilket sätt. Innan vi går in på olika studier som belyst denna fråga, ska vi säga något om hur man mäter arbetsminnets kapacitet.

Kapaciteten i det visuella-spatiala skissblocket försöker man ofta komma åt genom en uppgift med ett rutnät där det finns prickar utsatta på ett oregelbundet sätt. Eleven får betrakta rutnätet i en minut. Sedan får han/hon ett tomt rutnät där de rutor som innehöll prickar ska fyllas i. En annan typ av uppgift består av labrynter. Ritningar av labrynter presenteras, med en väg markerad från mitten av labrynten och ut. Varje labrynt visas under tre sekunder då testledaren spårar vägen med sitt finger. Sedan får eleven på ett eget papper med tomma labrynter markera vägen med sin penna. Den kanske vanligaste metoden för att mäta visuellt-spatialt arbetsminne är att använda klotsar, sk *Corsi blocks* (Milner, 1971). 9 klotsar ligger slumpmässigt utsprida på en bricka. Testledaren pekar på några klotsar och uppgiften är att upprepa pekandet i rätt sekvens. För varje gång ökar antalet klotsar som eleven ska peka på.

Den fonologiska slingans kapacitet mäter man ofta genom att eleven får upprepa en sekvens av enstaviga nonsensord som presenterats muntligt ett i taget i jämn takt. Den exakta ordningsföljden ska bevaras vid återgivningen. Sifferrepetition är också en vanlig metod för att komma åt den fonologiska komponenten i arbetsminnet.

Den centrala exekutiven kan man delvis komma åt genom att eleven får arbeta med två uppgifter samtidigt. I en variant (Lundberg & Wolff, 2003) lät man eleverna höra på en mening som antingen kunde vara sann (S) eller falsk (F) och

uppgiften var att avgöra vilket (tex "kanariefåglar tycker om att simma under vatten" S/F?). Efter varje mening presenterades en bokstav. I slutet av omgången av sanna eller falska meningar fick eleverna återge bokstäverna i korrekt ordning. Här måste alltså eleven försöka hålla fast bokstäverna i minnet samtidigt som det gällde att bedöma sanningsvärdet av meningarna.

En enkel variant för att bedöma den centrala exekutivens kapacitet är att presentera en sekvens siffror och be eleven att återge siffrorna i omvänd ordning. Då är det inte bara fråga om att mekaniskt "spela upp" det man hört utan man måste göra något med siffersekvensen vilket tycks kräva en insats av den centrala exekutiven.

En allt vanligare metod för att mäta arbetsminnets kapacitet är den sk *n-back*-metoden. Den innebär att stimuli presenteras ett i taget med intervall på 2–3 sekunder. För varje ny stimulus som kommer upp ska man avgöra om denna stimulus är densamma som den som presenterades tex tre (*n*) stimuli tillbaka. Ofta använder man dator i denna metod och registrerar inte bara rätt-fel utan också beslutstiden i millisekunder. En fördel är att man kan presentera nästan vilka slags stimuli som helst (tex siffror, bokstäver, ord, ansikten, figurer). Man måste alltså både identifiera det som dyker upp och hålla stimuli i minnet. Denna metod har använts i kombination med mätning av hjärnaktivitet med hjälp av en teknik, funktionell MRI (se s6).

Den centrala exekutiven inrymmer också en hämningsmekanism, där ovidkommande impulser stängs ute, inhiberas. Om man tex av en nybörjare får svaret att $4 + 5$ är 6, så kan det bero på att den starkaste associationen till sekvensen 4, 5 är 6. Men denna association är ovidkommande och måste hämmas så att man plocka fram det rätta svaret.

I en studie (Barrouillet, Fayol & Lathulière, 1997) fick något äldre elever multiplikationsuppgifter där de skulle välja vilket av fyra alternativ som var det rätta. Man fann att eleverna oftare gjorde fel om de felaktiga alternativen var multiplar av ett av talen som skulle multipliceras (tex $4 \cdot 6 = 18, 24, 28$ eller 30) än om de inte var det (tex $4 \cdot 6 = 21, 24, 25$ eller 27) eller när de falska alternativen inte alls kom från multiplikationstabellen (tex $4 \cdot 6 = 22, 23, 24$ eller 26).

Vilket empiriskt stöd finns det för att bristfälligt arbetsminne karakteriserar elever med allvarliga räkneshämmningar? I åtskilliga undersökningar har man under senare år kunnat konstatera att elever med räkneshämmningar har sämre arbetsminne än typiska elever (se tex Geary, 1993; Gathercole & Alloway, 2006; Andersson & Lyxell, 2007; Schuchardt mfl, 2008; Swanson & Jerman, 2006; Swanson, Jerman & Zheng, 2008). Frågan är emellertid hur man ska tolka dessa skillnader.

I princip skulle det kunna vara så att orsaksriktningen går andra vägen. Om en elev med dyskalkyli har svårt att handskas med tal eller antal, skulle detta

kunna reducera minnesomfånget när det gäller siffror. Som en jämförelse kan man tänka på hur det är att minnas en räkka ord. Om orden är väl kända och ingår i det egna språket har man mycket lättare att återge dem än om orden är på ett främmande språk som man ännu inte lärt sig så bra. Siffrorna kan alltså upplevas som främmande för en individ med dyskalkyli.

Resultat av aktuella fMRI-studier har lett till att man börjat ifrågasätta Baddeleys modell med olika komponenter i arbetsminnet. I stället tänker man sig att arbetsminnet är den aktiva delen av långtidsminnet, vilket är en mer dynamisk och funktionell modell där uppmärksamhet är den centrala faktorn (se tex Conway mfl, 2009). Tyvärr har forskningen om räknesevårigheter inte beaktat dessa nya tendenser i forskningen om arbetsminnet.

Samspel mellan arv och miljö när det gäller dyskalkyli

För en vuxen betraktare är olikheterna mellan barn påfallande. I en skolklass ser vi genast stora variationer mellan eleverna i fråga om utseende och kroppskonstitution. Efter en tid ser vi också hur olika eleverna kan vara i fråga om temperament, läggning och talanger. En del av dessa olikheter förefaller medfödda eller ärftliga och andra kanske betingas av uppväxtvillkor eller miljöförhållanden. Frågan om arvets respektive miljöns relativa betydelse har naturligt nog dragit till sig ett betydande intresse från forskarnas sida.

En ofta använd metodik är tvillingmetoden, där man jämför enäggstvillingar och tvåäggstvillingar. Tanken är att enäggstvillingar i stort sett har identiska gener, medan tvåäggstvillingar är precis som vanliga syskon, dvs ungefär hälften av de särskiljande generna är gemensamma. Om tvillingarna i ett en-äggspår uppvisar klart större likheter i något avseende, tex matematisk förmåga eller oförmåga, än tvillingarna i ett tvåäggspår, har man anledning att räkna med att egenskapen har ett ärftligt inslag. Stort upplagda tvillingstudier av matematikförmåga (tex Plomin & Kovas, 2005) har visat att ärftligheten är påtaglig. Detta gäller såväl svårigheter som matematisk förmåga i allmänhet. Alarcon m fl (1997) fann att 58 % av enäggstvillingarna och 39 % av tvåäggstvillingarna i en studie av räknesevårigheter fick samma diagnos. I en undersökning av familjer fann Shalev m fl (2001) att ungefär hälften av alla syskon till barn med dyskalkyli också var drabbade av dyskalkyli, vilket innebär att syskon löper 5–10 gånger högre risk att drabbas jämfört med barn i allmänhet.

När det gäller dyslexi har forskningen om arvets betydelse varit avsevärt mer intensiv. Man har visat att mer än 50 % av variationen i läsförmåga kan förklaras med variationer i arvsanlag. Men man har också med nya tekniker kunnat ringa in var i arvsmassan kritiska gener kan vara lokaliserade. Människan har ungefär 22 000 gener i sin arvsmassa. Dessa är förpackade i 23 kromosompar i varje

kroppscell. Molekylärgenetikens snabba framsteg har nu gjort det möjligt att med sk kopplings- eller associationsstudier ringa in de kromosomer där avvikande gener kan finnas. När det gäller dyslexi har man hittills kunnat identifiera åtminstone 6 kromosomer med avvikande gener. I några fall tror man sig tom ha fångat in exakt vilken gen det kan vara fråga om. Det är först då som den verkligt intressanta möjligheten öppnar sig, nämligen att se efter vilken funktion genen har i utvecklingen av nervsystemet och hur en avvikelse kan störa ett utvecklingsförlopp. Den slutsats man hittills kan dra av den genetiska forskningen om dyslexi är att det sannolikt är många gener inblandade, gener som inbördes påverkar varandra och i samverkan svarar för de funktionsnedsättningar som är typiska vid dyslexi, t ex fonologiska problem.

Forskarna har också börjat förstå att gener inte är allt. De är som klaviaturen på ett instrument i våra celler. Men själva melodin spelas upp från noter som anges av epigenesen (icke-genetiska eller miljöbetingade faktorer påverkar generna så att de kommer till uttryck på olika sätt). På samma klaviatur kan således olika melodier spelas upp beroende på faktorer utanför själva den genetiska koden. Epigenesens noter som delvis skrivs av erfarenheten eller miljön anger alltså när och om en gen ska bli aktiv i en viss typ av cell. Denna typ av komplexitet måste den molekylärgenetiska forskningen kunna handskas med.

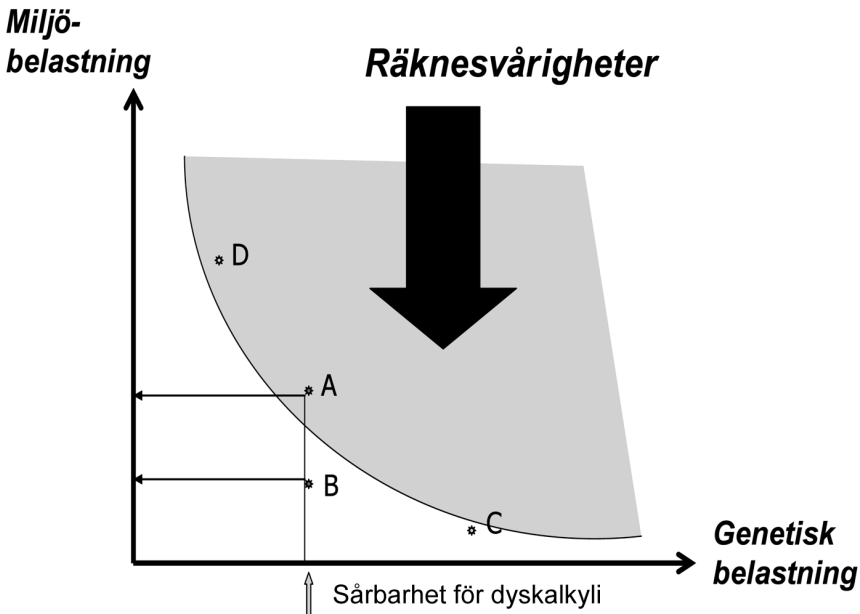
När det gäller matematik och räknsvårigheter har den genetiska forskningen inte alls kommit lika långt. Det man hittills kan säga är att det tycks finnas ett ärftligt inslag. Man har också konstaterat att den ärftliga faktorn gäller hela skalan av matematisk förmåga. Någon speciell dyskalkyli-gen har inte identifierats. Det tycks alltså vara samma ärftliga och miljömässiga faktorer som svarar för variationen inom hela variationsområdet.

Även när man undersökt olika sidor av räkneförmågan, t ex numeriska begrepp, icke-numeriska processer och beräkningsförmåga, har ärftlighetsmönstret varit likartat. Pojkar och flickor visar också upp likartat mönster (Kovas m fl, 2007a). De faktorer som gör att pojkar är olika är desamma som gör att flickor är olika. Ett sådant resultat pekar kanske på att man inte behöver ge pojkar någon annan form av stödundervisning än flickor.

Kovas m fl (2007b) har också studerat det genetiska inflytandet på både räknsvårigheter och lässvårigheter och kommit fram till att det också finns anledning att räkna med "generalistgener" som svarar för svårigheter inom båda områdena. Det lär emellertid dröja innan man lyckas identifiera dessa gener. Men resultaten stämmer ändå väl med det samband vi observerat i praktiken mellan svårigheter på båda områdena (Sternér & Lundberg, 2002).

Även om man så småningom kommer att kunna identifiera mer exakt vilka gener som är inblandade i räknsvårigheter lär man inte kunna hoppas på att problemen ska lösas med genmanipulation. För det första är det sannolikt många

gener involverade. För det andra lär samspelet mellan dessa gener vara oöverstigit komplicerat. För det tredje är miljöfaktors inverkan på generna olika från gen till gen. För det fjärde finns det ingen känd teknik för hur arvsmassan ska kunna påverkas i en bestämd riktning utan att det blir biverkningar på andra områden. Och när allt kommer omkring är undervisning och andra miljöfaktorer av så stor betydelse att det är där vi måste lägga ner vår energi för att åstadkomma förbättringar. Komplexiteten i samspelet illustreras i figur 8.



Figur 8. En sårbarhetsmodell för dyskalkyli.

På den horisontella axeln markeras graden av genetisk belastning. Sårbarheten för att en individ ska drabbas av dyskalkyli varierar alltså kontinuerligt. På den vertikala axeln har vi markerat graden av miljöbelastning. En hög miljöbelastning kan innebära särdeles dåliga uppväxtvillkor ända sedan spädbarnstiden, kanske tom skador från fosterstadiet, omsorgssvikt, försummelse, vanvård, miss-handel, övergrepp mm. Uppväxten kan ha varit mer eller mindre kaotisk med många flyttningar, olika vårdnadshavare, brist på trygg och stabil anknytning, stress och oro. I skolan kan frånvaron ha varit omfattande, undervisningen bristfälligt och hemarbetet försummat. En rad faktorer av detta negativa slag ackumuleras till en nivå som gör att eleven kan få stora svårigheter med matematik även om den genetiska sårbarheten är mycket låg (individ D).

Somliga individer (C i figuren) kan vara mycket sårbara, ha en tung genetisk belastning, men kan ändå klara sig undan manifesta problem, medan andra individer (D) kan ha en liten grad av genetiskt betingad sårbarhet men ändå hamna i manifesta svårigheter markerat av den skuggade regionen. I praktiken finns det ingen skarp gräns av det slag som antyds i figuren. Det är snarare en diffus gräzon som gradvis övergår i tydliga svårigheter.

Miljöbelastningen skulle kunna ses som nettoeffekten i balansen av ackumulerade riskfaktorer och skyddsfaktorer. Till skyddsfaktorerna måste man räkna med tidig och trygg anknytning, goda näringsförhållanden, god och stimulerande förskolemiljö, goda syskonrelationer och möten med signifikanta andra förebilder och identifikationsfigurer. God undervisning i tidiga faser av inläringen är naturligtvis en särskilt verksam skyddsfaktor.

I figuren kan vi också se hur två individer med samma nivå på sårbarhet eller genetisk belastning ändå hamnar på olika sidor av den kritiska zonen. Individ A har en större övervikt av riskfaktorer som gör att miljöbelastningen blir så stor att han/hon drivs in i svårigheter. För individ B är skyddsfaktorerna så starka att inga svårigheter uppstår.

Denna modell är i själva verket en stark förenkling av en betydligt mer komplex härva av samspelande faktorer både när det gäller neurobiologiska och psyko-sociala mekanismer. Men den ger ändå en idé om vad som gäller. Vi kan med största sannolikhet aldrig ändra den genetiska sårbarheten. Den ligger till grund för förklaring av en del av de individuella variationer vi kan observera. Men vi kan med större förhoppning bidra till att minska miljöbelastningen, dels genom att verka för att barns uppväxtvillkor förbättras och dels genom att införa arbetssätt och metoder i skolans matematikundervisning som leder till att de allra flesta elever lär sig det de behöver oavsett vilken genetisk sårbarhet de är drabbade av.

Ytterligare en komplikation vid tolkningen av samspelet mellan arv och miljö bör nämnas. Generna bestämmer inte direkt hurdana vi blir, men generna bestämmer mycket av vilka erfarenheter vi gör, *genes drive experience*. Generna ger oss alltså en läggning som gör att vi väljer nischer i tillvaron som passar vår läggning. Om man har ett naturligt bollsinnel brukar detta upptäckas tidigt och man dras till bollekar och senare bollsporter. Tvärtom blir det om man saknar bollsinnel. Då undviker man sorgfälligt bollspel där man ändå bara misslyckas. Något liknande skulle kunna gälla beträffande matematiken. Ett barn som har en sådan läggning att det har svårt att handskas med kvantiteter undviker lekar och spel som kräver att man räknar. Därmed får barnet inte den stimulans som skulle kunna ha hjälpt det över viktiga trösklar i utvecklingen av taluppfattning och räkneförmåga.

Det komplicerade samspelet mellan arv och miljö som vi diskuterat i detta avsnitt innebär att det inte kan vara lätt att urskilja en grupp med ren dyskalkyli som är ärftligt betingad. Den uppenbara svårigheten att ställa diagnosen dyskalkyli innebär dock inte att man bör ge upp ambitionen att noggrant kartlägga en elevs inlärnings svårigheter och mer exakt ta reda på vilka de starka sidorna är, vilken typ av fel som ofta uppträder, om det finns problem med arbetsminnet, eller om det är fråga om koncentrations- eller uppmärksamhetsstörningar, problem med automatiseringen eller uppgiftsorienteringen. Ja, det är en lång rad frågor som kan behöva utredas närmare utan att målet behöver vara en formell dyskalkyli diagnos. Det avgörande är om vi kan genomföra en kartläggning som ger vägledning för fortsatta pedagogiska insatser som kan förebygga, avhjälpa eller åtminstone lindra svårigheterna.

Räknesvårigheter och socio-emotionell anpassning

Som vi redan inledningsvis antydde innebär svårigheter att lära sig viktiga saker i skolan alltid en psykologisk belastning. Det handlar mycket om självbild. Hur ser man på sig själv som lärande varelse? Hur uppfattar andra en själv? Känslan av otillräcklighet kan inrymma känslan av värdelöshet, att man inte duger. De övermäktiga svårigheterna kan ge ångest och förtvivlan. Men man kan också utveckla strategier för att undvika dem. I ett försök att bevara självkänslan kan matematik nedvärderas till något ovidkommande och meningslöst som man inte alls behöver kunna. Forskningen om de negativa emotionella konsekvenserna av räknesvårigheter är emellertid ganska blygsam jämfört med motsvarande forskning om lässvårigheter.

I en studie av Auerbach mfl (2008) undersökte man elever som i 11-årsåldern fått dyskalkyli diagnos. Man följde dem till 16–17 års ålder och kunde då konstatera vilka som haft bestående räknesvårigheter och vilka som hade förbättrats under tiden. Föräldrar och senare eleverna själva fick fylla i formulär där de kunde markera vilka beteendeproblem och emotionella problem de hade. Genom den longitudinella uppläggnings hoppades man få svar på frågan om det är inlärningsproblemen som ger upphov till de socio-emotionella problemen eller om det är tvärtom. Något klart svar på den frågan fick man inte, men man kunde konstatera att de elever som hade bestående räknesvårigheter hade flera indikatorer på utagerande problem. Även uppmärksamhetsproblem var vanliga i dyskalkyli gruppen. I övrigt var det inte så stora skillnader i förhållande till elever utan räknesvårigheter.

Även Lundberg och Sterner (2006) ville komma åt orsaksmekanismer. Frågan gällde kopplingen mellan räknesvårigheter och uppgiftsorientering. Vi följde elever från årskurs 3 till årskurs 4 och testade deras utveckling i räkneförmåga

under detta år. Samtidigt lät vi lärarna bedöma barnen i fråga om uppmärksamhet, koncentration och motivation. Ett sammanfattningsmått på dessa tre dimensioner kom vi att benämna "uppgiftsorientering". Nu hade vi mått på räkneförmåga samt uppgiftsorientering i årskurs 3. Mätningarna och bedömningarna gjordes om ett år senare.

Då fanns underlag för en bedömning av orsakssamband. Är det så att dålig uppgiftsorientering ger upphov till dålig förmåga att räkna, eller är det den dåliga räkneförmågan som leder till bristfällig uppgiftsorientering? Det troliga är att orsakspilarna går i båda riktningarna samtidigt, men det kan ändå vara så att en faktor har en starkare verkan. Utan att gå in på statistiska detaljer om hur man räknar ut det, kan vi här konstatera att sambandet (korrelationen) mellan uppgiftsorientering i årskurs 3 och räkning i årskurs 4 var mycket starkare än sambandet mellan räkning i årskurs 3 och uppgiftsorientering i årskurs 4. Tolkningen av detta förhållande är att bristfällig uppgiftsorientering är ett större hot mot räkneförmågan än tvärtom. Här behövs emellertid mycket mer forskning med större undersökningar som börjar tidigt i förskoleåldern och som har mer allsidiga mått på uppgiftsorientering.

I en studie av Lundberg & Kolovos (2007) jämförde man tre grupper av elever i årskurs 3: Elever med enbart räknesevårigheter, elever med enbart lässvårigheter samt elever med den dubbla problematiken. Kartläggningen av den psykiska anpassningen var betydligt mer omfattande än i den tidigare studien. Man fann att elever med både lässvårigheter och räknesevårigheter uppvisade det sämsta psykiska välbefinnandet och den sämsta uppgiftsorienteringen. De visade också flest tecken på ångest och depression.

Inte heller här kunde man egentligen uttala sig om orsaksriktningen men man pekade på behovet av ett mycket bredare perspektiv på räknesevårigheter än vad den dominerande kognitiva och neurobiologiska forskningen brukar utgå från. Utan insikt i elevernas socio-emotionella problematik kan vi inte nå framgång i vårt svåra och viktiga arbete med elever som har stora svårigheter att lära sig räkna.

För en del elever har matematiken en starkt negativ emotionell laddning. Siffror kan framkalla panik och ångest, vilket naturligtvis inte befrämjar förmågan att lösa uppgifter. Den närmast fobiska skräcken för matematik är naturligtvis ofta följden av en lång historia av misslyckanden och upplevelser av värdelöshet. Chinn & Ashcroft (2007) och Chinn (2009) har belyst matematikängslans omfattning och negativa konsekvenser.

Dyskalkyli och dyslexi – hänger det ihop?

I en undersökning (Sternér & Lundberg, 2002) lät vi ett antal speciallärare göra en uppskattning av hur vanligt det var att elever hade både lässvårigheter och räkningsvårigheter. I genomsnitt kom de fram till att så mycket som 12 procent av alla elever hade denna kombinerade svårighet. Nu har naturligtvis speciallärare extra skärpt uppmärksamhet på elevers inlärningsproblem och det finns en risk för att de överdriver problemens omfattning. Å andra sidan har många speciallärare lång erfarenhet och vet vad som är rimligt att kräva av eleverna i fråga om läs- och räknefärdigheter.

I en mer testbaserad studie av 799 elever i 9–10 årsåldern i Holland kom man fram till att 7,6 % av eleverna uppvisade den kombinerade svårigheten (Dirk m fl, 2008). Så länge vi inte har strikta och allmänt accepterade kriterier för gränsdragning får vi nog ändå ta prevalensuppskattningarna med en nypa salt. Det viktiga är att vi kan konstatera att lässvårigheter och räkningsvårigheter ofta hänger ihop.

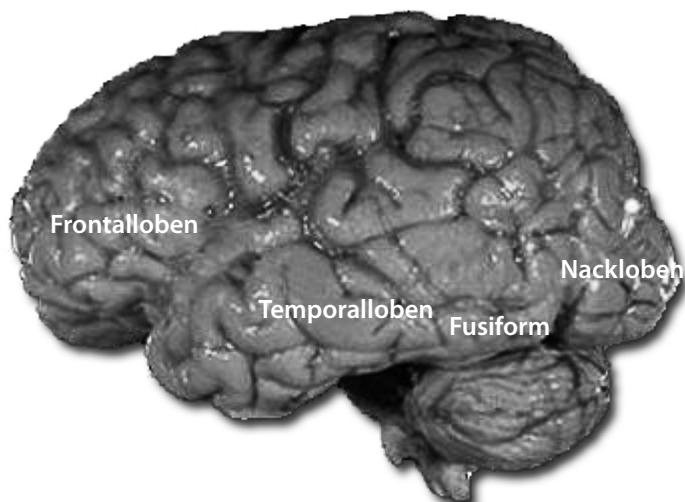
Nu finns det en rad skäl till att en del elever måste brottas med den dubbla problematiken. Det mest uppenbara är kanske att både matematik och läsning är kognitivt krävande verksamheter och att somliga elever har en sådan förse- nad kognitiv utveckling att deras resurser helt enkelt inte räcker till för att de ska uppnå godtagbara färdigheter på båda områdena. En viktig sida av de kogni- tiva krav som de båda områdena ställer är att vara uppmärksam, koncentrerad, uthållig och ha ett gott arbetsminne. Båda färdigheterna inrymmer också krav på abstrakt tänkande. Brister i dessa avseenden drabbar således både matematik och läsning.

En del elever med störningar i uppmärksamhet och arbetsminne har haft kaotiska uppväxtvillkor. De kan ha varit utsatta för misshandel, övergrepp, omsorgssvikt, vanvård, försummelse, täta flyttningar, byten av fosterhem och skolbyten. Man kan inte vänta sig att sådana elever visar tålamod, koncentration och intresse för skolarbetet. Svårigheter på krävande områden är alltså inte så förvånande.

Att lässvårigheter och räkningsvårigheter kan hänga ihop har också en annan tydlig grund. Elever med lässvårigheter har ofta svårt att lära sig nya ord och begrepp, och matematiken inrymmer sannerligen en hel del ord och begrepp som måste läras in ordentligt.

Textuppgifter i matematik, där ett problem finns inbäddat i ett naturligt sammanhang som beskrivs verbalt i skrift, kan innebära oöverstigliga svårigheter för en som har svårt att identifiera de skrivna orden och förstå textens innebörd med villkorsbeskrivningar och uppgift som ska lösas. Även en elev med ganska god taluppfattning och beräkningsförmåga kommer här tillkorta om lässvårigheterna är stora.

Dyslexi innebär påtagliga svårigheter att snabbt och automatiskt identifiera skrivna ord, svårigheter att få upp flyt i läsningen samt påfallande bristfällig stavning. Som en sekundär konsekvens av dessa svårigheter uppstår också problem med att förstå texter. Dyslexi anses ha sin viktigaste grund i bristfällig förmåga att handskas med språkets ljudsystem (fonologi). Ett starkt ärftligt inslag tycks finnas, och man tror sig också ha funnit en typisk neurobiologisk signatur för dyslexi, där vi finner en låg aktivitet i områden i den vänstra hjärnhalvans temporallob och i ett område längre bak mot nackloben (fusiform) som anses vara av kritisk betydelse för snabb igenkänning av skrivna ord. Vidare uppvisas förhöjd aktivitet i vänster frontallob, antagligen som följd av det extra pådrag som en svår uppgift kräver. Hos enskilda individer är det emellertid ännu omöjligt att identifiera den neurobiologiska grunden för dyslexi.



Figur 9. Vänstra hjärnhalvans olika lober inklusive fusiform-området som antas vara involverad vid ordigenkänning.

Vi ser alltså att det liksom när det gäller dyskalkyli är svårt att ha en skarp och entydig definition av dyslexi. Vi har en oklar gränzon. I många fall får vi också erkänna att läs- och skrivsvårigheter liksom räknetsvårigheter kan förvärras av sociala och emotionella faktorer. Bristfällig undervisning kan naturligtvis också förvärra problemen.

Finns det då ingen direkt komorbiditet (samsjuklighet) mellan dyskalkyli och dyslexi? Som vi har sett tycks den neurobiologiska grunden vara olika vid de två störningarna. Vi vet också att det finns individer som läser och skriver alldeles

utmärkt men som har stora svårigheter att räkna. Ibland finner vi också individer som har lätt för matematik men som läser och skriver med stora svårigheter. En sådan dissociation stödjer tanken att dyslexi och dyskalkyli är av olika natur och har olika genetisk och neurobiologisk bakgrund.

I nästa huvudavsnitt av denna översikt går vi in på studier och utvecklingsarbeten för undervisning av elever med räkningsvärigheter. De bygger i stor utsträckning på den teoretiska grund som vi försökt beskriva i denna första del. Vi ger också en rad konkreta exempel på hur man kan arbeta i den pedagogiska vardagen och hoppas därigenom att denna handledning förenar fördjupad insikt om räkningsvärigheternas natur med praktiska och handfasta idéer för hur man kan genomföra den vardagliga undervisningen i skolan. Men innan vi går in på detta område vill vi gärna ge några avslutande reflektioner om dyskalkylibegreppet som gäller svenska förhållanden.

Några avslutande kommentarer om begreppet dyskalkyli

Som framgått av denna forskningsöversikt är fenomenet dyskalkyli inte så lätt att fånga in. Socialstyrelsens klassifikation av sjukdomar och hälsoproblem (2008) inrymmer en kategori som benämns specifik räkningsvärighet (klassifikation F81.2). Här sägs att det gäller

en specifik försämring av matematiska färdigheter som inte kan skyllas på psykisk utvecklingsstörning eller bristfällig skolgång. Räkningsvärigheterna innefattar bristande förmåga att behärska basala räknefärdigheter såsom addition, subtraktion, multiplikation och division snarare än de mer abstrakta matematiska färdigheter som krävs i algebra, trigonometri, geometri och komplexa beräkningar.

Denna beskrivning säger strängt taget att en individ med räkningsvärigheter har svårt att räkna. Men man antyder att det har skett en försämring i räkneförmågan. Exklusionskriterierna är utvecklingsstörning och bristfällig skolgång. Det senare uttrycket för tankarna till omfattande frånvaro och täta skolbyten. Den säger ingenting om undervisningens kvalitet. Med denna oklara specificering av räkningsvärigheter får man inte mycket vägledning om hur man ska ställa en diagnos. Något försök att förklara uppkomsten av specifika räkningsvärigheter finns inte.

I grundskoleförordningens kapitel 7 § 8 om betyg sägs:

Om det finns särskilda skäl får läraren vid betygssättningen bortse från enstaka mål som eleven skall ha uppnått i slutet av det nionde skolåret. Med särskilda skäl avses funktionshinder eller andra liknande personliga förhållanden som inte är av tillfällig natur och som utgör ett direkt hinder för att eleven skall kunna nå ett visst mål.

En liknande formulering finns för gymnasieskolan. Socialstyrelsens definition av funktionshinder när det gäller matematik blir inte lätt att tillämpa.

När det gäller högskoleprovet får individer med intyg om dyslektiska svårigheter vid läsning längre provtid. Antagandet är att läsproblemen är ett sådant funktionshinder som gör att deras faktiska förmåga inte kommer till sin rätt inom den föreskrivna provtiden. I princip skulle man kunna tänka sig att personer med speciella räkneshårigheter skulle få längre provtid åtminstone på det delprov som gäller kvantitativa resonemang (Nog-provet). Men eftersom detta prov inte direkt kräver att provtagaren genomför några matematiska operationer kanske längre provtid inte är befogad.

Hur ska man ställa diagnos och vem ska göra det?

Vi har alltså konstaterat att både grundskolan och gymnasieskolan har bestämmelser som ger läraren utrymme att ta hänsyn till funktionshinder vid betygsättning. Men socialstyrelsens definition av räkneshårigheter ger otillräcklig vägledning. Än så länge är begreppet specifika räkneshårigheter eller dyskalkyli ett tämligen oklart och svåravgränsat begrepp. Att en elev har svårt att följa med är inte så svårt att se. Men vad beror det på? Har undervisningen varit bristfällig med alltför snabba genomgångar, för mycket abstraktion eller med dåliga förklaringar som bottnar i lärarens egna brister i matematik? Saknar eleven uthållighet och koncentrationsförmåga? Blir eleven uttråkad och vill hellre göra något annat än att räkna? Har eleven särskilt stora svårigheter att läsa och därför inte kan klara textuppgifter? Har eleven bristfälligt arbetsminne? Har eleven fått för litet stimulans under förskoletiden? Är det fråga om en kraftig emotionell reaktion närmast av fobisk natur inför siffror? Är det en konstitutionellt betingad oförmåga att handskas med kvantiteter? Eller är det en kombination av många olika faktorer?

Någon metod att komma åt räkneshårigheternas genetiska och neurobiologiska bas finns kanske inte. Men som kapitlet om diagnos visat finns det diagnostiska strategier som kan göra det möjligt att ringa in de områden som vållar problem. Någon enkel, entydig och pålitlig dyskalkyli diagnos finns så vitt vi vet inte tillgänglig och är nog inte heller lätt att få fram. Och det kanske egentligen inte är så viktigt. Det avgörande måste vara att man kan kartlägga och analysera problemen så att eleverna får adekvat hjälp i skolan.

Den hållning till diagnos som vi redovisar här innebär att vi också finner det svårt att bedöma hur vanligt det är med dyskalkyli. När det med säker övertygelse hävdas att 6,5% av populationen är drabbad av dyskalkyli finns det skäl att vara kritisk. Det är säkert minst så många som har svårigheter med räkning, men

hur stor andel är det som har en ren och konstitutionellt betingad dyskalkyli? Det kan vi med nu tillgängliga metoder inte veta.

Mot den bakgrund vi skisserat här blir frågan om vem som ska ställa diagnos inte helt lätt. Om det gäller att kartlägga vilka slags svårigheter en elev har med räkning borde en välutbildad *speciallärare* kunna genomföra detta.

Om en elev har stora koncentrationsproblem och en allmänt dålig skol- och hemsituation kan säkert *skolpsykologen* göra en viktig insats. Särskilda terapeutiska åtgärder kan bli nödvändiga då det rör sig om starkare emotionella blockeringar som också innefattar ren fobi mot siffror och räkning.

En neuropsykologisk kartläggning kan ibland bli nödvändig. Då undersöker man kognitiva funktioner, långtidsminne och arbetsminne, mental snabbhet, uppmärksamhet och dylikt för att komma åt funktioner som kan ligga bakom problemen. Inom *barnneuropsykiatri* kan man utreda komorbiditet med ADHD eller autism eller Turners syndrom och andra avvikelser.

Logopeder är i första hand utbildade för att handskas med språkstörningar. På senare tid har emellertid flera logopeder börjat intressera sig för räkneshvårigheter. Genom sin allmänna kliniska erfarenhet och kunskap om utredningar i kombination med fortbildning kan de säkert också uppnå nödvändig kompetens för att kartlägga räkneshvårigheter. Vi vill alltså inte markera någon speciell yrkesgrupp som skulle ha monopol på att utreda räkneshvårigheter. Ofta kan det vara bra om företrädare för olika specialiteter kunde samarbeta när det gäller diagnos av särskilt komplicerade fall av räkneshvårigheter.

Sammanfattning

Vi har i detta avsnitt försökt visa att begreppet dyskalkyli är problematiskt att avgränsa. Med utgångspunkt från vår analys föreslår vi att begreppet reserveras för en neurobiologiskt baserad avvikelse som kan leda till ett dåligt utvecklat talbegrepp. Detta bristfälliga talbegrepp kommer till uttryck på olika sätt. Föreställningen om tallinjen kan vara förvrängd på så sätt att man inte har klart för sig att avstånden mellan tal är ekvidistanta, dvs att avståndet mellan 10 och 20 är detsamma som mellan 70 och 80. Ett annat uttryck för ett dåligt utvecklat talbegrepp är svårigheten att göra approximativa bedömningar av antal eller kvantiteter. Svårigheter av det här slaget leder till problem att göra beräkningar och att lära sig talfakta som man snabbt kan hämta fram ur minnet.

Dyskalkyli förefaller inte vara ett allt-eller-inget-fenomen av det slag vi kan finna inom medicinen, som att en kvinna antingen är gravid eller inte. Man kan inte vara nästan gravid. Antingen har en person mässlingen eller inte. När det gäller dyskalkyli får vi nog räkna med en gradvis övergång, som tex vid fetma.

När är man för fet? Det blir till slut ett godtycke för gränsdragningen. Sociala, kulturella och historiska traditioner kommer att styra gränsdragningen.

Vi har också diskuterat problem i samband med diagnos och funnit att man måste göra en allsidig kartläggning som också inrymmer sociala och emotionella sidor. Vikten av att följa upp diagnoserna över tid har också framhållits.

I nästa huvudavsnitt ska vi gå in på den pedagogiska behandlingen av tidiga räknesevigheter. Vi ska ta upp exempel på tillvägagångssätt som prövats vetenskapligt och befunnits effektiva. De metoder vi tar upp är i första hand exempel. Antagligen kan listan på effektiva insatser göras längre åtminstone om man nöjer sig med god beprövad erfarenhet och inte ställer krav på vetenskaplig evidens. Våra exempel kan måhända inspirera till vidareutvecklingar.

2

Undervisning av elever med räknesvårigheter

Denna kunskapsöversikt inleddes i del I med en kritisk granskning av begreppet dyskalkyli. Översikten visar att svårigheter inom området tal och räkning ofta har sin bakgrund i olika faktorer i miljön men att det också i vissa fall kan finnas en neurobiologisk grund till problemen. I den här delen tar vi upp idéer till utveckling av det praktiska arbetet med hänsyn till olika faktorer. En viktig pedagogisk hållning till undervisning är att i första hand sträva efter att tidigt förebygga att svårigheter uppstår och att göra barns möten med matematik i förskolan och tidiga skolår meningsfulla, lustfyllda och inspirerande. Det innebär också att utveckla en god klassrumsundervisning för alla elever, men med hänsyn till elever i behov av särskilt stöd. Även om vi lyckas väl med våra förebyggande och tidiga insatser måste vi räkna med att en del elever därutöver kommer att behöva särskilda stödåtgärder. Enligt grundskoleförordningen ska misstanke om att en elev behöver särskilda stödinsatser leda till att behoven utreds och att det, när sådana behov föreligger, upprättas ett åtgärdsprogram. I detta sammanhang är det angeläget att påpeka att stödinsatser bör vara evidensbaserade, dvs ordentligt utprovade med vetenskaplig metodik och beprövad erfarenhet.

Ansaret för upprättande av åtgärdsprogram ligger hos rektor. Det är betydelsefullt att samtidigt beakta flera faktorer på olika nivåer inom skolans organisation som kan påverka elevens kunskapsutveckling i matematik. På skolnivå kan det tex handla om nödvändigheten av kompetensutveckling för vissa lärargrupper, arbetslag eller hela skolans personal för att komma till rätta med problemen både på lång och kort sikt. På klassrumsnivå kan det innebära att lägga om undervisningen från i huvudsak enskilt tyst räknande i böckerna till en mer explicit lärarledd undervisning med utforskande aktiviteter, gemensam problemlösning, matematiska samtal och där eleverna är införstådda med

vilka mål de arbetar mot. Det kan också handla om hur instruktioner ges, hur läxor förbereds och följs upp och hur samarbetet mellan special- och klassrumsundervisning kan utvecklas. På individnivå kan det innebära att en kartläggning av elevens starka och svaga sidor görs, att kartläggningen analyseras och att klasslärare tillsammans med speciallärare eller specialpedagog ger förslag på lämpliga åtgärder som också diskuteras med elev och vårdnadshavare.

Skolverket (2008a) skriver i *Allmänna råd för arbete med åtgärdsprogram*:

Det är en rad faktorer som påverkar en elevs förutsättningar i skolan. Det handlar såväl om skolans kunskap om att anpassa undervisningens innehåll och arbetssätt som om lärarens kompetens att möta eleven och om den enskilde elevens förmågor. Alla elever kan exempelvis inte tillgodogöra sig sådan undervisning som bygger på en stor del eget arbete och ansvar. Även skolans fördelning av elever i klasser och grupper liksom elevernas arbetsschema är faktorer som påverkar förutsättningarna och som därför kan behöva ses över. (s 9)

Även om skolan erbjuder en god lärandemiljö finns det elever som är i behov av särskilt stöd under kortare eller längre perioder av sin skolgång. Skolverksamheten kan behöva anpassas till elever med olika typer av funktionsnedsättningar. (s 10)

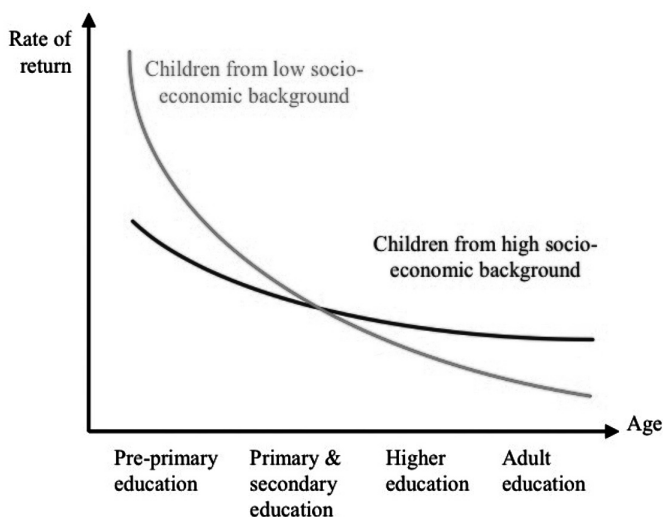
Även förskolan har enligt skollag och läroplan särskilt ansvar för barn i behov av särskilt stöd. Skolverket (2005) skriver i *Allmänna råd och kommentarer för kvalitet i förskolan*:

En viktig princip som gäller i förskolan är att barns behov av särskilt stöd ska tillgodoses i den ordinarie verksamheten hellre än genom särskilda lösningar. För många barn är en generellt god kvalitet den viktigaste insatsen. För andra kan det vara nödvändigt med särskilda stödinsatser som komplement. Stödet kan ges som personalförstärkning, antingen till barngruppen generellt eller till det enskilda barnet, eller i form av konsultation och handledning till personalen. Ofta kan konsultation inom det specialpedagogiska, medicinska eller psykologiska området behövas. En minskning av antalet barn i barngruppen eller anpassning av lokalerna är andra stödformer. (s 33)

Inom den matematikdidaktiska forskningen (SOU, 2004; Council of Chief State School Officers (CCSSO), 2008; McIntosh, 2008) betonas lärarens nyckelroll för elevernas lärande och nödvändigheten av att lärare ges kontinuerligt stöd och kompetensutveckling såväl i ämnesteorier som i didaktik. Lärares kunskaper om hur elever lär (Nunes mfl, 2009) och om vanliga svårigheter och missuppfattningar som elever kan ha med matematiska begrepp och procedurer kan leda till förebyggande åtgärder och underlätta elevers lärande ytterligare (McIntosh, 2008).

Forskning om orsaker till räknsvårigheter och utveckling av forskningsbaserade undervisningsmetoder för arbetet med elever i behov av särskilda stödåtgärder i matematik är begränsad i jämförelse med forskning på läsningens område. De senaste årens omfattande forskningsbaserade publikationer visar dock på ett växande intresse bland forskare att försöka utreda orsaker till räknsvårigheter och att utveckla empiriskt prövade undervisningsmetoder. I det arbetet har förskolan under senare år kommit att uppmärksammas allt mer bland annat av EU. Som en del av arbetet mot målen i Lissabonöverenskommelsen har Europakommissionen utarbetat en rapport om effektivitet och lika rättigheter och möjligheter till utbildning inom EU (2006). Omfattande studier visar enligt rapporten att insatser i förskola och tidiga skolår ger långsiktiga effekter även upp i vuxen ålder. Särskilt stor betydelse har sådana insatser bland barn från socioekonomiskt utsatta familjer och bland barn som riskerar att utveckla skolsvårigheter (figur 10). Den övre kurvan visar att effekterna av tidiga insatser är mycket stor för barn från låginkomst-familjer.

Returns to investment at different levels of lifelong learning



Source: Cunha et al (2006) adapted by EENEE⁸

Figur 10. (Commission of the European Communities, 2006). Verkningsgraden (rate of return) på gjorda insatser för olika grupper från förskola till och med vuxen ålder.

Nationellt centrum för matematikutbildning har sedan 1999 regeringens uppdrag att stödja utveckling av svensk matematikutbildning från förskola till högst skola. Ett viktigt område är barns möten med matematik i förskola och tidiga skolår. Inom ramen för projektet *Matematik från början*, genomfördes under åren 2002–2003 ett pilotförsök med kompetensutveckling för lärare till barn i åldrarna 1–5 år (Doverborg & Emanuelsson, 2006). Syftet var att testa och utprova en kompetensutvecklingsmodell som skulle kunna användas tillsammans med lärare i förskolan. Projektet byggde på forskning och beprövad erfarenhet och lades upp för att vidga och fördjupa det kunnande i matematik och matematikdidaktik som lärare behöver för att kunna fullgöra sitt uppdrag enligt Lpfö 98. Projektets syfte var att:

- uppmärksamma barns möte med matematik och dess betydelse för fortsatt lärande
- ge erfarenhetsutbyte, reflektion och inspiration kring tidig matematikutveckling
- ge kompetensutveckling i hur barns kunnande iaktas, analyseras och utvecklas
- initiera och stödja diskussion i arbetslag om hur barns kunskapsutveckling kan kommuniceras
- visa matematikens spännande, kreativa och utvecklande sidor
- lyfta fram variationen i barns erfarenheter och tänkande och dess betydelse för lärande
- ge ökade möjligheter att tidigt hjälpa barn i behov av särskilda stödinsatser
- stödja nätverk i kompetensutveckling även efter den aktuella satsningen.

Matematikområden som togs upp var bl.a. *sortering och klassificering, räkneord, uppräknings- och taluppfattning, rumsuppfattning, former och mönster*.

Skolverkets nationella utvärdering av förskolan (2008b) visar att matematik fortfarande tio år efter att förskolan fick sin läroplan ofta har en undanskymd plats i verksamheten. Forskning visar också att det finns barn i förskolan som inte spontant fokuserar på innehåll som har med matematik att göra (Hannula & Lehtinen, 2005) och att en del barn har få erfarenheter av att ha sysslat med aktiviteter med matematikinnehåll när de börjar skolan (Siegler & Ramani, 2008). Om vi på allvar vill förebygga svårigheter redan i förskolan måste vi skapa en verksamhet anpassad efter enskilda barns behov. Längre fram ska vi återkomma till förskolans verksamhet med matematik.

Uppläggningsen av denna del

Vi presenterar först några allmänna principer för undervisning av yngre elever med räknsvårigheter. Dessa har vi funnit i vårt arbete med kunskapsöversikten (se t ex Griffin, 2007; Fuchs & Fuchs, 2008; McIntosh, 2008). I avsnittet därefter beskriver vi mer specifika strategier som bygger på en omfattande metaanalys av ett stort antal studier av undervisningsmetoder genomförda främst i USA (Gersten mfl, 2008).

Förskolans verksamhet med matematik uppmärksammas särskilt i ett avsnitt och därefter ger vi exempel på senare års empiriskt utprovade metoder för undervisning av elever i behov av särskilda stödåtgärder i grundskolans tidiga år.

Vi presenterar en interventionsstudie genomförd i USA med fokus på undervisning av textuppgifter i matematik. Textuppgifter i matematik kan vålla problem för elever med både lässvårigheter och räknsvårigheter, men även för elever med enbart räknsvårigheter.

Ett engelskt projekt som tar upp arbetsminnets roll och hur undervisningen kan organiseras för att underlätta för elever med begränsningar i arbetsminnets funktion och kapacitet beskrivs kort. I avsnittet därefter ger vi exempel på aktiviteter och spel framtagna med särskild hänsyn till elever med dyskalkyli.

Slutligen ger vi exempel på nyligen publicerade diagnostiska material i matematik som är framtagna för förskola och grundskola.

Några allmänna principer

All pedagogik bör vara ett meningsskapande arbete. Elever med räknsvårigheter måste, kanske i större utsträckning än elever utan svårigheter, få möta uppgifter som upplevs som personligt angelägna, som berör och engagerar och som uppfattas som relevanta. Men dessa elevers väg in i det formella arbetet med tal och räkning måste också bli mer systematisk, mer strukturerad och mer genomtänkt än vad de flesta andra elever har behov av.

Inför uppläggningsen av undervisningen behöver vi således begrunda innehållet i det vi undervisar om, den sociala och fysiska miljö i vilken undervisningen ska äga rum samt hur kommunikationsprocessen ska gestalta sig.

Elever med räknsvårigheter behöver mer direkt och mer konkret undervisning om antal och räkneoperationer. Utan sådan direkt undervisning kan eleven lätt fastna i helt felaktiga och förvirrande hypoteser om hur talsystemet fungerar och används. Här behöver eleverna snabb och korrigerande återkoppling från en lyhörd lärare.

Matematik kan ses som ett nätverk av sammanlänkade begrepp och idéer, fakta och processer. Arbete med tal och räkning är mycket rikt på sådana samband.

Lärare måste mycket tydligt koppla samman det kunnande eleverna ska utveckla med det de redan kan och förankra det i elevernas verklighet och hur det kan användas utanför skolan (McIntosh, 2008).

Viktigt är också lärarens kritiska hållning till den egna undervisningen med tillhörande uppföljning och utvärdering. Fokuserar jag på rätt innehåll? Utnyttjas undervisningstiden på ett bra sätt? Fungerar samarbetet med vårdnadshavare tillfredsställande?

Tid för lärande – TOT-principen

För att kunna ha en vägledande dialog och effektiv återkoppling samt tillräckligt med tid för elever med svårigheter behöver man ofta skapa en annan social och fysisk miljö än vad de flesta klassrum kan tillhandahålla. Många studier har visat att den gamla sanningen håller, nämligen att ju mer tid som ägnas åt en uppgift, ju mer man övar, desto större är chansen att bli bra på att klara av den (TOT-principen, "Time on task"). Samtidigt är det viktigt att uppmärksamma *vad* eleven övar så att övningen befäster sådana kvaliteter i kunnandet som stöder progressionen i elevens lärande och inte blir en missriktad färdighetsträning där omständliga och icke utvecklingsbara strategier befästs.

Studier visar att oroliga och stökiga klassrumssituationer kan bidra till att reducera den effektiva tiden (TOT) för elevernas matematikarbete (se tex OECD, 2003; Sjöberg, 2006) vilket kan vara förödande för många elever och i synnerhet för elever med inlärningssvårigheter. Många av dem lär sig dessutom smarta strategier för hur de ska undvika matematik när verksamheten är laddad med nederlagets bittra smak och inte ger något personligt utbyte eller inrymmer någon mening. Då är det bättre att vässa pennan, bråka med bänkgrannen, titta ut genom fönstret eller be att få gå på toaletten. Längre fram i skolan kan det bli mycket skolk. Elevers svaga prestationer i matematik på högstadiet är troligen oftare kopplat till bristande TOT än till dyskalkyli (se Sjöberg, 2006).

Genom en-till-en undervisning (en elev får enskild undervisning av en lärare) har man möjlighet att uppnå nödvändig och effektiv TOT. I en del fall ges sådan undervisning efter eller före ordinarie skoltid, men vanligast är att eleven lämnar klassundervisningen en eller några lektioner i veckan för att arbeta enskilt tillsammans med en speciallärare eller specialpedagog. Flera undersökningar har visat att intensiv en-till-en undervisning under en begränsad period kan vara särdeles effektiv (tex Wasik och Slavin, 1993; Torgesen, 2001; DCSF, 2008). I en-till-en-undervisning kan man öka elevens engagemang under längre tid, dvs mer och effektivare TOT än i klassrummet. Man kan fånga elevens uppmärksamhet och finna just de ögonblick då beredskapen för lärande är på topp. Arbete med tal och räkning kräver ibland en sådan kraftsamling av koncentration att stöd

av en vuxen blir nödvändigt för en del elever. Eleven kan med denna undervisningsform också få omedelbar bekräftelse eller korrigerande vilket innebär effektiv vägledning för bruk av goda strategier och undvikande av felaktiga arbetssätt. Elever med bristfällig uppgiftsorientering får genom denna undervisningsform möjlighet att utveckla uppmärksamhet och koncentration på uppgiften. Man bör dock vara medveten om risken att förstärka beroendet av vuxenbegräddelse och stöd.

Pågående studier i England (DCSF, 2008, 2009) visar att stöd i form av en-till-en undervisning har goda effekter på läsning, skrivning och matematik för 7–11 åringar och i läsning och skrivning men inte i matematik för 11–14 åringar. Orsaker till att även äldre elever drar nytta av en-till-en undervisning i läsning och skrivning men inte i matematik är för närvarande inte utrett.

Elever med svårigheter är inga robotar som genom effektivare arrangemang ska programmeras så att deras matematiska förmåga fungerar bättre. Det är fråga om människor som kommit tillkorta på ett av skolans viktigaste områden och som behöver mänskligt stöd, mycket uppmuntran, tillit och bekräftelse. Det är i det personliga mötet med en annan människa som nya vägar för utvecklingen kan öppnas, en människa som vill en väl, som visar respekt, kanske tycker om en – den personliga närvarons magi kan inte ersättas av text elektronik, hur sofistikerad den än är. Samtidigt står vi alltså inför ett balansproblem. Det gäller att eleven inte blir alltför beroende av den vuxne. Ett mått av självständig uppgiftsorientering måste till. Pedagogiken är alltid avvägningarnas svåra konst.

Övning ger färdighet

Datorbaserade övningar kommer fram i allt snabbare takt. Vi avstår här från att namnge och rekommendera särskilda program men vill ändå gärna peka på det stora behovet av en sakkunnig utprövning av programmen. Vi vill också betona att datorbaserade övningar aldrig kan ersätta den direkta lärarledda undervisningen. En viktig egenskap hos många program är att de i spelform kan ge goda möjligheter till den överinlärning eller automatisering som är så nödvändig för god räkneförmåga. De mentala resurserna för räkneprocesser måste minimeras så att all kraft kan ägnas åt problemlösning. När det gäller räkning handlar det om omedelbar tillgång till en rik repertoar av talfakta, omedelbar igenkänning av problemtyp och en automatiserad hantering av symbolspråket. Övning måste dock alltid utgå från att eleven förstår och arbetar utifrån en riktig begrepps-bildning. Ett själlöst, mekaniskt övande kan aldrig rekommenderas.

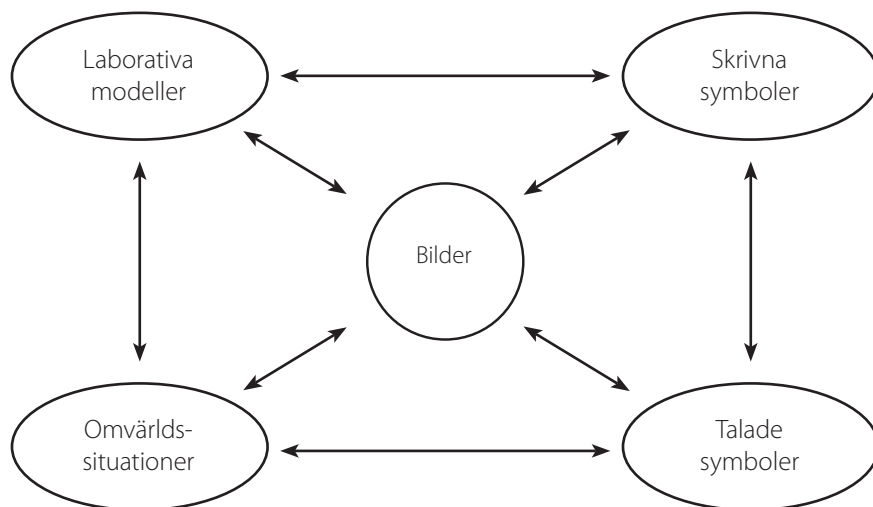
Motivation och självbild

Elever med svårigheter i räkning behöver stöd för att utveckla sitt talbegrepp; de behöver hjälp och stimulans för att utveckla sitt matematiska ordförråd, de behöver lära sig att aktivera sitt förhandsvetande, att bilda inre föreställningar vid mötet med räkneuppgifter etc. Men med en passiv och uppgiven hållning utan vilja och engagemang kommer denna inlärn timer inte till stånd. Dessa elever behöver mer än andra tidigt få erfara att de är på väg att bemästra något som de inte kunde förut, de behöver uppleva känslan av kompetens, de behöver känna att räkneuppgifterna är intressanta för dem, de behöver bäras fram av föreställningen att "jag har något att komma med". Kort sagt, det handlar om elevens tillit till sin egen förmåga, elevens bild av sig själv som lärande varelse, som en person som duger. Dessa elever behöver alltså goda möten med vuxna människor som bryr sig om eleven, som närmar sig eleven som en unik och rik medmänniska snarare än som en schablonbild av en elev med räknings svårigheter.

Exempel på metodik i fyra faser

Att tillägna sig förståelse i matematik är en ständigt pågående och kumulativ process, där man stegvis får tillgång till fler och mer stimulerande, avancerade uttrycksformer och representationer. Det handlar om fruktbara sätt att uttrycka idéer, att resonera och att lösa problem. (Skolverket, 1997, s 16)

Eleverna ska vara aktiva och få reflektera över och sätta egna ord på sina handlingar. Undan för undan kan läraren föra in det matematiska språkets uttryck, först muntligt och senare i skrift. Fokus ska ligga på elevers utveckling av begreppslig förståelse, språklig förmåga och procedurkunskaper. Att lära sig matematik handlar om att se sammanhang och att kunna föra logiska resonemang genom att känna igen, granska och pröva olika sätt att dra slutsatser med hjälp av flera representationsformer (Skolverket, 1997). Det är betydelsefullt att undervisningen bidrar till att en matematisk idé eller ett problem tydliggörs och att översättning mellan de olika representationsformerna diskuteras så att eleverna förstår sambanden däremellan (figur 11). För elever med inlärn timer svårigheter kan det vara särskilt betydelsefullt att undervisningen rör sig från det mer konkreta till det abstrakta (Minskoff & Allsopp, 2003; McIntosh, 2008).



Figur 11. Transformationer mellan olika uttrycks- och representationsformer i matematik.

Den laborativa fasen

Genom att arbeta muntligt i kombination med att använda åskådligt material som räknebrickor, knappar, "plockisar", tiobasmaterial osv ges eleven möjlighet till multisensoriska erfarenheter som kan bidra till att matematiska begrepp och idéer blir begripliga. Det ger också kinestetiska (rörelse) och taktila (röra vid) erfarenheter som kan bidra till att underlätta vid arbetsminnesproblem. När eleven klart och tydligt med egna ord kan berätta om det aktuella begreppet, är det dags att lägga undan det åskådliga materialet och börja arbeta på den representativa fasen.

Den representativa fasen

Eleven arbetar med att rita bilder eller göra representationer av matematiska begrepp och som lösningar på textuppgifter, åtföljt av matematiska resonemang. I den här fasen utnyttjar eleven sina erfarenheter och den förståelse som har utvecklats genom arbetet på den konkreta nivån. Enkla bilder, streck, cirklar osv kan användas så att eleven kan lösa uppgifter utan åskådligt material. Genom att lära sig att rita lösningar får eleven tillgång till tre viktiga redskap för sitt lärande:

1. De kan utvidga sin konkreta förståelse till en nivå som är mer abstrakt, men inte så abstrakt att den blir meningslös.
2. Att rita lösningar är en utmärkt problemlösningsstrategi som kan generaliseras och användas i många olika situationer.
3. Eleven har alltid en strategi att kunna använda och gå tillbaka till, om hon "fastnar" i arbetet på den abstrakta nivån.

Den abstrakta fasen

När eleverna har en klar och säker konkret och representativ förståelse för ett begrepp kan de fördjupa och utvidga sin förståelse till den abstrakta nivån där de använder matematikens symbolspråk. I den här fasen av arbetet börjar eleverna lösa problem och utföra operationer "i huvudet".

Återkopplingsfasen

Lärarens roll i den fjärde fasen är att hjälpa eleven att befästa och återkoppla idéer och färdigheter och att lyfta fram samband med andra begrepp och idéer som eleven har arbetat med. Detta utgör sedan grund för fortsatt lärande.

I McIntosh (2008) och i Lundberg och Sterner (2006) ges åtskilliga praktiska exempel på hur man kan arbeta i dessa faser.

Effektiva undervisningsmetoder – en metaanalys

För att ge en övergripande bild av forskning som handlar om undervisning av elever i behov av särskilda stödåtgärder i matematik sammanfattar vi resultaten från en metaanalys över området (Gersten mfl, 2008). En metaanalys är enligt Socialstyrelsen termbank (2008)

... en statistisk metod som använder resultaten från ett antal sinsemellan oberoende studier för att belysa till exempel effekten av en viss insats. Genom att kombinera resultaten från många studier reducerar man slumpens inflytande på resultaten. Därmed minskar man också risken för felaktiga slutsatser om insatsens effekter.

I den aktuella metaanalysen (Gersten mfl, 2008) sammanfattas cirka femtio experimentella och kvasiexperimentella (se nedan) forskningsstudier om effektiv undervisning för elever med räknesvårigheter. Så gott som samtliga studier var inriktade på lösning av textuppgifter (word problems). I svensk litteratur förekommer parallellt uttrycken "ordproblem", "benämnda tal", "textproblem i matematik" eller "textuppgifter i matematik". Vi använder här *textuppgifter (i matematik)*.

Experimentella och kvasiexperimentella studier

En experimentell studie innebär i det här sammanhanget att man prövar om en undervisningsåtgärd ger bättre effekt på elevers lärande jämfört med vissa andra undervisningsåtgärder alternativt inga åtgärder alls utöver den ordinarie verksamheten.

I experimentgruppen provas under en period en åtgärd. I en eller flera kontrollgrupper sätts vanligen en annan typ av åtgärd in. Sedan beräknar man med statistiska mått på grupp-nivå graden av förbättrade resultat, tex lösningsfrekvensen i ett matematiktest, och jämför dessa mellan grupperna. Skillnaden mellan grupperna måste vara signifikant, dvs större än att den kan förklaras med slumpen, för att man ska kunna säga att någon metod haft bättre effekt. Ju större experiment- och kontrollgrupp som ingår i en studie desto större är möjligheten att se eventuella tydliga skillnader.

En kvasiexperimentell studie är en typ av experimentell studie där man inte fördelar personer till experiment- och kontrollgrupp genom slumpmässigt urval. I kvasiexperimentella studier användes begreppet *jämförelsegrupp* istället för kontrollgrupp. Forskarna försöker då kontrollera för jämförelsegruppernas eventuella olikheter genom statistiska bearbetningar eller matchning. Den aktuella metaanalysen innefattar båda typerna av studier genomförda i skolformer som motsvarar grundskolan och gymnasieskolan. De undervisningsmetoder som har prövats och utvärderats är:

Explicit undervisning: Läraren presenterar inledningsvis en modell för en specifik lösningsstrategi. Läraren "tänker högt" och visar och förklarar steg för steg hur lösningen kan genomföras. Elev och lärare byter sedan roller och eleven löser problem (vanligtvis textuppgifter) och beskriver undan för undan lösningsstrategin. Eleven får kontinuerlig återkoppling på sitt arbete och vid behov är läraren återkommande modell för lösningsprocessen. Explicit undervisning har i en del studier använts i syfte att låta elever klassificera olika textuppgifter som ett led i att lära sig känna igen olika typer av problem och att kunna välja relevant lösningsprocess. Studier som använde explicit undervisning visade bland de bästa resultaten.

Verbalisering: En del elever är impulsiva i sitt sätt att arbeta. Istället för att metodiskt och strategiskt försöka finna en lämplig lösningsstrategi kan de slumpartat kombinera tal som ingår i uppgiften. När elever fick hjälp att verbalisera sina tankar genom att "tänka högt", skriva och illustrera de strategier som de använde gav det genomgående goda effekter. Detta kan delvis förklaras med att en sådan strategi hjälper till att hålla tillbaka en impulsiv hållning.

Visuell representation: Visuella representationer som bilder, grafer och diagram är vanligt förekommande i matematikundervisningen. Effekten av att använda sådant material är beroende av hur specifikt det lyfts fram och används. Effekten blev större när läraren valde vilken representation som var lämplig i den aktuella situationen, jämfört med om eleven själv valde representation. Resultatet blev också mer positivt när visuella representationer var en tydlig del i en undervisningsstrategi. Visuella representationer hade bättre effekt när lärare och elever arbetade med dem tillsammans, jämfört med om endast eleven använde dem.

Sekvens av textuppgifter i matematik: En väl genomtänkt lektionsserie med omsorgsfullt utvalda uppgifter presenterade i en strukturerad sekvens, hade god effekt på elevernas förmåga att lösa textuppgifter i matematik. En sådan strategi kan vara särskilt betydelsefull när syftet med undervisningen är att eleven ska utveckla förståelse för nya matematiska begrepp och idéer. Utveckling av förmågan till transfer, dvs att kunna använda kunskaper i nya situationer, gynnas av att elever får arbeta med en rad varierade problem som representerar samma matematiska idé. Läraren väljer exempel som fokuserar på kritiska skillnader mellan olika problem och procedurer och olika Lösningstrategier diskuteras och prövas.

Multipla/heuristiska strategier: Denna strategi tycks vara en viktig del av eller ett komplement till explicit undervisning. Ordet "heuristisk" kommer av grekiskans *heuriskein* och betyder "att finna". Eleverna får en uppgift inklusive förslag till flera möjliga Lösningstrategier. Sedan får eleverna under lärarens handledning pröva och resonera sig fram till en lämplig strategi. Ett exempel är när elever och lärare undersöker olika strategier för multiplikation. Multiplikationen $9 \cdot 5$ har samma värde som $5 \cdot 9$, så det är fritt att välja om man vill lösa uppgiften på det ena eller det andra sättet. Strategierna $5 \cdot 10 - 5 \cdot 1$ och $5 \cdot 5 + 4 \cdot 5$ ger också samma resultat. Eleverna får pröva olika strategier och tillsammans med läraren diskutera deras för- och nackdelar. Resultaten från studier som använde multipla/heuristiska strategier ger stöd för idén att låta elever med räknefärdigheter i samspel med lärare och kamrater möta och pröva fler än ett sätt att lösa en uppgift eller ett problem.

Återkoppling till lärare: Information från forskarna till lärarna om elevernas dokumenterade framsteg ledde till förbättringar i elevernas kunskapsutveckling. Ännu starkare effekt observerades när lärare inte bara informerades om elevernas framsteg utan även fick stöd och råd av forskarna i diskussioner om frågor som: "Vad ska undervisas om?", "När kan ett nytt begrepp eller en ny strategi introduceras?", "Hur kan eleverna grupperas?"

Återkoppling till elever: När elever fick återkoppling av forskarna på sin kunskapsutveckling i matematik gav det liten effekt på deras lärande. Inte heller hade möjligheten för eleven att själv sätta upp mål för sitt arbete utifrån den feedback de hade fått någon signifikant effekt. Positiv respons från lärare på elevernas ansträngningar att göra goda insatser i skolarbetet hade däremot positiva effekter.

Elevassisterad undervisning: Resultaten av undervisning där klasskamrater fick hjälpa elever i behov av särskilt stöd, gav bland de lägsta effekterna. God effekt gav det däremot när några år äldre elever fick undervisa sina yngre kamrater, efter att de själva först hade fått instruktioner om hur de kunde förklara begrepp och procedurer för sina yngre kamrater.

Resultaten av studierna indikerar att *multipla strategier, explicit undervisning* samt *elevens verbalisering* gav de bästa resultaten. Explicit undervisning har ibland kritiserats för att bara vara användbar för undervisning om mycket elementära begrepp och procedurer, som addition med ensiffriga tal. I den här metaanalysen ingick endast ett fåtal studier med den inriktningen. Aktuella studier behandlade tex textuppgifter som krävde lösningar i flera steg, operationer med flersiffriga tal, de fyra räknesätten och bråkbegreppet.

Satsa på förskolan

En god pedagogisk hållning är att satsa på förebyggande åtgärder i syfte att i så stor utsträckning som möjligt förhindra att svårigheter inom ett område uppstår. I det här avsnittet ger vi exempel på utvecklingsarbeten som bygger på forskning och beprövad erfarenhet och som är genomförda i förskolan.

Betydelsen av tidiga insatser för barn som riskerar att utveckla svårigheter på läsningens område är väl belagd i forskning och utvecklingsarbeten (Torgesen, 2001; Lundberg och Herrlin, 2003; Lundberg, 2007; Myrberg, 2007). Matematikdelegationen påpekar i sitt betänkande (SOU 2004:97) att barns tidiga erfarenheter av matematik kan vara avgörande för attityder, föreställningar och senare studieframgångar. Det är betydelsefullt både för enskilda individer och för samhället att tidigt upptäcka och aktivt förhålla sig till starka och svaga sidor i barns och ungdomars kunskapsutveckling i matematik.

Förskolebarns informella kunskaper i matematik och läsning samt deras förmåga till uppmärksamhet har starka samband med den senare kunskapsutvecklingen i matematik och läsning. Detta visar sex longitudinella studier av sammanlagt 36000 barn i åldrarna 5–14 år i Canada, USA och England (Duncan mfl, 2007; Cross mfl, 2009). Sambanden är starkare för matematik än för läsning. Barn från låginkomstfamiljer kommer generellt sett till skolan med mer begränsade kunskaper

än kamrater från utbildningsmässigt och ekonomiskt mer gynnade familjer när det gäller grundläggande färdigheter såsom räknearmsan, att kunna bestämma antalet föremål i mängder, att räkna framåt eller bakåt från ett givet tal, att känna igen skrivna siffror, att addera och subtrahera och att jämföra talmängder.

Melhuish mfl (2008) visar att hög kvalitet i förskoleverksamhet och undervisning under tidiga skolår kombinerat med en god och stimulerande hemmiljö har stor betydelse för senare skolprestationer i matematik. Starkast samband fann man mellan barns kunskapsnivå i matematik vid 10 års ålder och moderns utbildningsnivå. I studien följde man kunskapsutvecklingen hos 3 000 barn i åldrarna 3–10 år. Detaljerad information samlades in om de förskolor och skolor som barnen tillhörde, familjernas socioekonomiska bakgrund samt barnens hemmiljö. Att leka med tal och former, att läsa högt för barnen och att ta med dem till biblioteket betyder mycket för barnets senare skolframgång. Forskarna påpekar att vad föräldrarna faktiskt gör med sina barn spelar större roll än socioekonomisk bakgrund och utbildningsnivå.

Sammantaget visar studien att en kombination av god hemmiljö, god förskoleverksamhet och god undervisning i tidiga skolår är betydelsefullt för senare skolresultat. Länder som vill höja kunskapsnivån bland befolkningen bör enligt Melhuish mfl (2008) satsa på att utveckla förskoleverksamhet av hög kvalitet. Kina lyfts fram som exempel. Där görs omfattande satsningar på förskolan därför att regeringen inser att det är en betydande del av infrastrukturen för en framgångsrik ekonomi i den moderna världen.

I det följande avsnittet presenterar vi exempel på forskningsbaserade studier och utvecklingsarbeten som har genomförts i förskolan och i tidiga skolår.

Förskolebarns spontana lek med matematik

Med hjälp av videokamera, mikrofon och direkta observationer kartlade Seo och Ginsburg (2004) 90 st 4–5-åringars spontana matematikaktiviteter under den fria leken i förskolan. Barnen delades in i grupper utgående från föräldrarnas inkomstnivåer, låg-, medel- och höginkomstgrupp. Totalt samlades nittio 15-minuters videosekvenser in. Analysen av filmsekvenserna visar att 79 av barnen (88 %) var engagerade i åtminstone en matematikaktivitet dagligen under "fria leken". Hur ofta enskilda barn var engagerade i sådana aktiviteter var varken relaterat till inkomstgrupp eller kön. De aktiviteter som förekom oftast var *mönster och form* (21 %) samt *storlek* (13 %). Därefter följde *räkning* (12 %), *förändring* (5 %), *spatiala relationer* (4 %) samt *klassificering* (2 %).

Äldre barn engagerade sig oftare i matematiska aktiviteter än yngre barn. Två typer av aktiviteter, *mönster och form* samt *räkning*, var relaterat till ålder. Det fanns inga samband mellan inkomstgrupp och typ av matematikaktivitet som

barnen deltog i med undantag av *spatiala relationer*. Barnen i låginkomstgruppen ägnade sig aldrig åt den typen av innehåll. Eftersom barn i medel- och höginkomstgrupperna ägnade väldigt liten tid (4 %) åt sådana aktiviteter menar Seo och Ginsburg dock att resultaten måste tolkas med försiktighet.

Graden av komplexitet i aktiviteterna som barnen deltog i var inte heller kopplad till inkomstgrupp. Resultaten visar enligt Seo och Ginsburg att förskolebarn är engagerade i mer avancerad matematik än vad vi vanligtvis tror och att förekomst av komplexitet och mönster i barns engagemang i matematik i förskolan är likartad oavsett föräldrars inkomstnivå.

De 12 % av barnen som inte ägnade sig åt några matematikaktiviteter diskuteras dock inte i rapporteringen av studien vilket innebär att vi inte får veta något om eventuella samband med socioekonomisk bakgrund eller om möjliga orsaker till att dessa barn inte intresserade sig för aktiviteter med matematikinnehåll. Aunio mfl (2009) påpekar att forskning om utvecklingen av små barn matematiska förmågor sällan har följt upp och intresserat sig för de barn som tycks vara i behov av särskilt stöd. Ett undantag är Hannula och Lehtinen (2005) som visar att en del förskolebarn inte spontant fokuserar på att uppmärksamma antal och att räkna (spontaneous focusing on numerosity, SFON) och att det finns ett ömsesidigt samband mellan SFON och utvecklingen av räkneförmåga. Barns räkneförmåga vid 3,5 års ålder var relaterat till SFON vid 4 års ålder vilket i sin tur var antingen direkt eller indirekt relaterat till deras räkneförmåga vid 5 och 6 års ålder. Hannula och Lehtinen menar att angelägna frågor för forskningen är att undersöka i vilken mån vi kan förebygga räknesvårigheter genom tidiga insatser för att stärka barns förmåga till spontan uppmärksamhet mot tal och räkning. En annan viktig fråga är huruvida skillnader i SFON är relaterade till den medfödda förmågan att uppfatta små antal.

Big math for little kids

Big math for little kids (Greenes mfl, 2004) är ett undervisningsprogram med spel och aktiviteter utarbetat i USA och avsett för barn i åldrarna 4–5 år. Programmet utgår från sju principer och bygger på resultaten av den ovan redovisade studien (Seo och Ginsburg, 2004). För att barnen ska få utveckla idéer om *tal, form, mönster, logiska resonemang, mätning, operationer med tal* samt *rumsuppfattning* används sagor och aktiviteter. Ett syfte är att i lekens form introducera betydelsefulla matematiska idéer på ett väl strukturerat sätt. Ett annat syfte är att utformningen av aktiviteterna ska stimulera barns nyfikenhet och vilja att lära och att använda matematik. Barnen uppmuntras att tänka och att ge uttryck för sina tankar. Aktiviteterna och lekarna har en stark betoning på

utveckling av barns matematiska ordförråd och kommunikativa förmåga. De bygger på följande principer:

Bygg på barnens kunskaper och intressen

Redan i treårsåldern har barn i allmänhet informella kunskaper om matematik som är mer komplexa och sofistikerade än vad man tidigare trott. Detta tas dock sällan till vara i förskoleverksamheten. Små barn kan och vill lära sig intressanta och komplexa matematiska idéer och metoder, oberoende av kön, etnicitet eller socioekonomisk bakgrund.

Integrera matematik i vardagliga aktiviteter

I förskolans vardagliga verksamhet ingår aktiviteter där barn kan utforska, diskutera och använda viktiga matematiska idéer i samspel med varandra och med sina lärare. Sagor och sånger tas som utgångspunkt för att utveckla språkliga och matematiska förmågor och när barnen till exempel ställer upp på led för att gå på promenad kan man tala om ordningstal. Enbart vardagsrutiner ger ändå inte tillräcklig grund för de matematiska erfarenheter som barn behöver göra i förskolan. De ger i sig inte de systematiska och strukturerade erfarenheter som kan leda till att barnen utvecklar förståelse för centrala sammanhang eller till att de kan befästa sitt lärande.

Introducera och berika idéer på ett lekfullt sätt

Matematiska idéer bör introduceras, fördjupas och berikas på ett lekfullt sätt. Genom att utvidga redan kända aktiviteter får barnen arbeta med en och samma idé under längre tidsperioder. Detta kan särskilt gynna barn med en långsam inlärningstakt och barn som riskerar att utveckla räknesvårigheter.

Utveckla komplexa matematiska idéer

Med hjälp av vuxna kan barn utveckla djupare och vidare förståelse än vad de kan göra på egen hand. När barn arbetar med former uppmuntras de att känna igen och namnge formerna men även att undersöka deras symmetrier. I andra aktiviteter får barnen lära sig att räkna till hundra eller till det stora favorittal som de vill lära sig räkna till.

I en lek, *Räkneramsan till hundra*, stod barn och vuxna i en ring och räknade tillsammans i kör. De klappade, stampade, knäppte med fingrarna mm i takt med räknandet. Vid talen 9, 19, 29, 39 osv gjordes ett kort uppehåll i räknandet och alla barn fick fundera över vilket tal som skulle komma närmast. På det viset uppmärksammades barnen på de jämna tiotalen. Vid "oregelbundna tal" som elva och tretton (som borde heta tio-ett, tio-tre) gjorde barnen grimaser eller skojiga ljud. Barnen fick också lära sig att matcha tal i räkneramsan med motsvarande

magnetsiffror på väggen. Många fyra-åringar lärde sig att räkna åtminstone till 100 och en del äldre barn lärde sig att räkna längre. Forskarna antar att det muntliga räknandet underlättades av åtföljande kroppsrörelser och rytmiska ljud. Aktiviteten verkade mycket motiverande på barnen vilket förmodligen också bidrog på ett positivt sätt till utvecklingen av räkneförmåga.



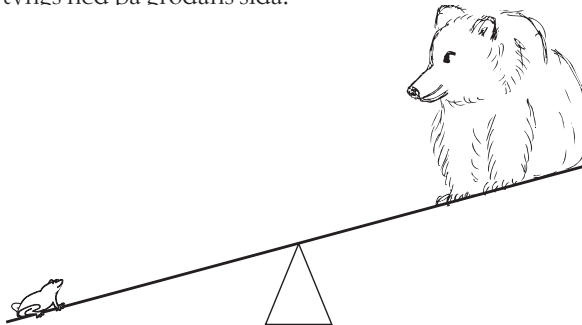
Räkneramsan till hundra

Stöd språkutveckling och reflektion

Barnen får undersöka matematik på sätt som gör att de inte behöver riskera att misslyckas. Miljön bör vara rik på möjligheter att möta nya matematiska idéer som kan utforskas av barn och vuxna. Barnen stimuleras att diskutera och reflektera över sina upptäckter. Att lära sig att tänka och att ge uttryck för sina tankar om matematik är av kritisk betydelse för lärandet. När barnen deltar i diskussioner får de öva sig i att lyssna på sina kamrater, följa någon annans tankegång och att ställa frågor.

Uppmuntra till att tänka som en matematiker

Barnen uppmuntras att komma med hypoteser baserade på gemensamma observationer. När ett begrepp diskuteras letar barnen efter exempel och motexempel. De identifierar likheter och skillnader i objekts egenskaper, letar efter mönster och testar sina hypoteser. En typ av aktivitet går ut på att finna vad som är fel i en bild. Ett exempel är att barnen får titta på en bild av en gungbräda med en groda på ena sidan och en stor björn på den andra sidan. Gungbrädan är i obalans och tvngs ned på grodans sida.



I gemensamma samtal får barnen berätta vad de ser och vad som är tokigt med bilden. De får förklara hur de kan veta det och hur de skulle kunna rätta till bilden. Erfarenheter visar att typiska förklaringar som barn ger visar deras förståelse för begrepp som *lättare*, *tyngre* samt *balans*. Seo och Ginsburg (2004) rapporterar från ett av sina besök i förskolan att när barnen ombads fantisera om situationer där bilden skulle kunna vara sann föreslog ett barn att "björnen är en ballong, så grodan är tyngre" (s 161).

Tid för att lära

Tid lyfts fram som en kritisk faktor för barns lärande. Barnen behöver och tycker om att repetera aktiviteter och spel likaväl som de tycker om att höra samma saga eller sjunga samma sång många gånger. Materialet är utformat så att när en aktivitet har genomförts några gånger kan den utvecklas och utvidgas på olika sätt. Detta gynnar de barn som är i behov av att få göra samma sak flera gånger men på ett varierat sätt, för att befästa och för att minnas vad de lärt sig.

Big math for little kids beskriver ett strukturerat och kreativt arbete med matematik på små barns premisser – i deras vardag och i lekens form. Sådant arbete pågår och håller på att utvecklas på förskolorna runt om i vårt land. I vår strävan att förebygga räknsvårigheter är det angeläget att redan i förskolan särskilt uppmärksamma de barn som sällan eller aldrig intresserar sig för aktiviteter med matematikinnehåll.

Tallinjen och lineära räknospel

Vi har tidigare i denna översikt (del 1, s 6–9) beskrivit forskning som tyder på att en del barn har en bristfälligt fungerande tallinje och att detta i en del fall kan vara kopplat till en lägre aktivitet i ett specifikt område av hjärnan, IPS (intraparietala sulcus). Forskning visar också att redan i förskoleåldern har barn från låginkomstfamiljer generellt sett färre erfarenheter än barn från medelinkomstfamiljer av att leka med tal, använda räknearmsan, jämföra mängder, utföra enkla additioner och subtraktioner och att uppmärksamma siffersymboler (Duncan mfl, 2007; Siegler, 2008). Det är betydelsefullt att analysera orsakerna till skillnader i barns kunskapsutveckling i aritmetik för att adekvata och tidiga insatser ska kunna göras. Vad sådana insatser bör innehålla är en fråga för både forskare och lärare. Forskning visar att det finns samband mellan inre representation av tallinjen och kunskaper och färdigheter som rör talfakta, aritmetisk uppskattning, basal addition och subtraktion, beräkning med flersiffriga tal, textuppgifter i matematik, räknestrategier (Jordan mfl, 2006; Andersson, 2008; Ramani & Siegler, 2008), representation av koordinatsystemet i geometri och algebra (NCTM, 2006). Elever med räknsvårigheter i åk 1 och 2 hade sämre förmåga att

göra korrekta bedömningar om tals storleksförhållanden och att korrekt placera tal på en tom tallinje (Geary, Hoard, Nugent & Byrd-Craven, 2008). Skillnader i elevernas prestationer var bl a relaterade till avsevärda brister i arbetsminnets centrala exekutiv (se del 1, s 24–27).

Med tanke på den mentala tallinjens betydelse för utvecklingen av taluppfattning bör ett mål för undervisning vara att ge barn och elever optimala möjligheter att utveckla funktionella inre representationer av tallinjen (Ramani & Siegler, 2008). Att spela spel som innehåller en eller flera lineära tallinjer kan bidra till en sådan utveckling. De lineära relationerna mellan tals storlek och barns

- visuospatiala (har att göra med synen och den rumsliga utspridningen),
- kinestetiska (rörelse)
- auditiva (hörsel) och
- temporal (tidsomfång)

erfarenheter bildar en bred multisensorisk bas för förmågan att utveckla en inre lineär representation av tal, en mental tallinje (Ramani & Siegler, 2008).

"Logaritmisk" och lineär tallinje

I forskning om utvecklingen av inre representationer av tallinjen används ofta uttrycket "logaritmisk" tallinje. Det som avses med "logaritmisk" i sammanhanget är att avståndet mellan exempelvis talen 3 och 4 och talen 8 och 9 uppfattas lineärt dvs avståndet mellan talen är lika stort, medan avståndet mellan tex talen 33 och 34 eller 88 och 89 uppfattas som mindre. Bilden nedan visar inledningsvis en lineär tallinje vilken efter hand övergår i en "logaritmisk" tallinje. När vi i den följande framställningen använder ordet "logaritmisk" är det i denna betydelse.



Övergången från logaritmisk till lineär representation av tal sker vid olika tidpunkter för olika talområden. Förskolebarn har i huvudsak en logaritmisk uppfattning av hela tallinjen medan elever i åk 2 oftast har en lineär uppfattning av tal inom talområde 0–100. Samma elever i åk 2 kan samtidigt ha en logaritmisk uppfattning av talområdet 100–1000, ett talområde som elever i åk 4 i sin tur

vanligtvis har en lineär uppfattning om. Men det finns också elever ända upp till årskurs 4 som visade helt och hållet logaritmiska uppfattningar på uppgifter som rörde tallinjen, antal och mätning, (Ramani & Siegler, 2008). Barnen fick i uppgift att bedöma tals placering på tallinjen, att uppskatta N prickar på en dataskärm och att rita en linje som var N "zip" lång (en mycket kort längd kallad 1 zip hade visats). Elever som hade en lineär uppfattning om tals storleksförhållanden presterade genomgående bättre på samtliga matematikuppgifter jämfört med elever som hade en logaritmisk uppfattning. Det fanns ett starkt samband mellan logaritmisk respektive lineär uppfattning och elevers prestationer på grundläggande standardiserade test i aritmetik i tidiga skolår (Booth & Siegler, 2006).

Betydelsen av att spela spel i förskolan

Exakt vilka numeriska erfarenheter som kan leda till utvecklingen av en lineär uppfattning av tallinjen inom talområdet 0–10 är oklart (Ramani & Siegler, 2008). Erfarenheter av att använda räkneramsan och att räkna antal föremål i olika situationer kan bidra, men är knappast tillräckligt för att skapa lineära representationer av tals storleksförhållanden. En vanlig aktivitet bland många barn i förskolan och i hemmen är att spela spel där talen är ordnade lineärt med på varandra följande tal. Vanligtvis går spelen ut på att slå en tärning och sedan flytta en spelpjäs så många steg som tärningen anger. Sådana spel ger barnen erfarenheter av tals ordning i sekvenser och tals storleksförhållanden. Ju större tal som tärningen visar desto större är:

- avståndet som barnet ska flytta sin spelpjäs
- antalet förflyttningar som ska göras
- antalet räkneord som ska uttalas
- antalet räkneord som barnet får höra samt
- mängden tid som går åt för att flytta spelpjäsen.

The great race

Siegler och Ramani (2008) genomförde en studie bland 124 barn från *Head start program*. Head start är ett projekt i USA vars syfte är att stötta barn och föräldrar i låginkomstfamiljer. Det innefattar bland annat utbildning, hälsovård och föräldrasamverkan. Barnen som deltog i studien var 4–5,5 år gamla. Ett syfte med studien var att undersöka effekten av att spela spel kopplade till

- lineär representation av tallinjen inom talområdet 1–10
- att kunna jämföra tals storlek
- att kunna räkna från 1 till 10
- att känna igen skrivna siffror 1–10

Ett annat syfte var att kontrollera stabiliteten i barnens kunskapsutveckling över tid. Barnens tidigare erfarenheter av att spela spel i hemmen relaterades till deras numeriska kunskaper vid inledningen av den aktuella studien.

Hälften av barnen som deltog i studien spelade ett tärningsspel, *The great race*, tillsammans med en försöksledare ca 20 gånger under en period om två veckor. Den version av räkn-spelet som experimentgruppen spelade innehöll talen 1–10 arrangerade i tio rutor i en sekvens från vänster till höger.

Start	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Barnen skulle flytta sin spelpjäs det antal steg som tärningen visade. Om de stod på "3" och tärningen visade "2", skulle barnet räkna "fyra, fem" samtidigt som spelpjäsen flyttades.

I det andra tärningsspelet fick barnen flytta pjäsen på precis samma sätt. Men där fanns inga siffror. På tärningen angavs i stället färger och de skulle flytta till den närmaste ruta som hade samma färg som tärningen angett. Spelen var således identiska i alla avseende utom ett – i det ena fanns siffror, i det andra fanns bara färger. För att kontrollera barnens numeriska kunskapsutveckling fick samtliga barn som deltog i studien genomföra ett förtest, ett eftertest och ett uppföljande test. Efter ett 20-tal spelomgångar under en period på två veckor kunde forskarna konstatera att barn från låginkomstfamiljer som spelat sifferspelet på ett dramatiskt sätt förbättrat sin förmåga att placera in tal på tallinjen. De barn som spelat färgspelet uppvisade ingen förbättring av den numeriska förmågan.

De barn som spelat sifferspelet blev även bättre på andra uppgifter än tallinjemarkeringar. De kunde snabbare och säkrare avgöra vilket av två tal som var störst, de kunde räkna till 10 snabbt och korrekt och de kunde identifiera alla skrivna tal mellan 1 och 10.

Denna undersökning är mönstergillt kontrollerad, har en teoretisk bas och resultaten är särdeles intressanta. De tyder på att förskolebarn som får rikliga tillfällen att spela spel som innefattar tal kan utveckla sitt talbegrepp till en nivå där skolans matematikundervisning blir framgångsrik. Man skulle kunna misstänka att en del barn som misslyckas tidigt i matematik inte har nödvändig beredskap eller mottaglighet för undervisningen och att de därför lätt kan hamna i onda

cirklar där nederlag föder nya nederlag. Deras tillkortakommanden behöver inte ha med dyskalkyli att göra utan återspeglar huvudsakligen bristfällig stimulans under tidiga formbara förskoleår. Längre fram ger vi fler exempel på goda aktiviteter och övningar som kan stimulera förskolebarns och elevers kvantitativa begreppsbildning.

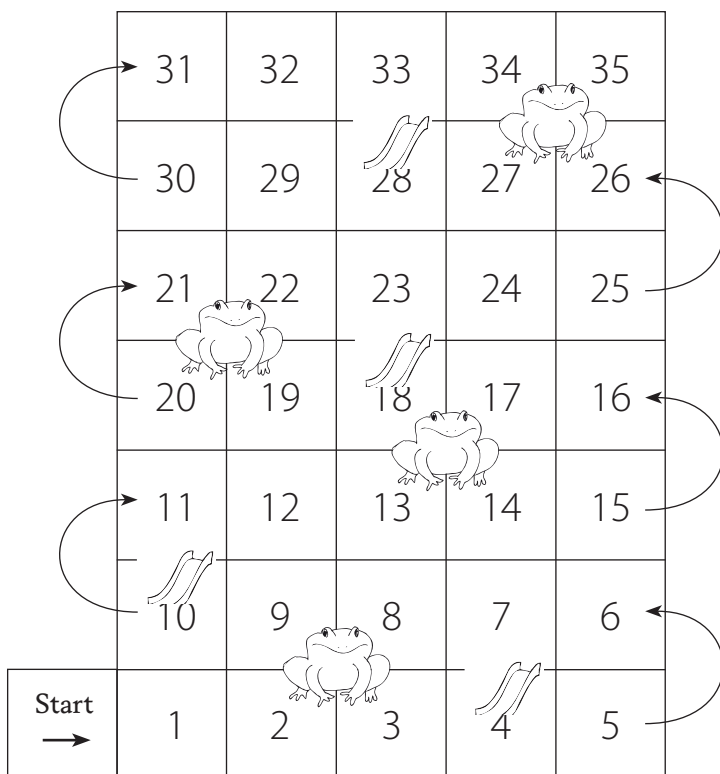
Betydelsen av att spela spel i hemmen

Ramani och Siegler (2008) undersökte också sambanden mellan förskolebarns erfarenheter av att spela spel i hemmen och deras numeriska kunskaper och förmågor samt om skillnader i erfarenheter hade samband med familjers socioekonomiska bakgrund. I denna studie deltog 145 barn med en genomsnittsålder på 5 år. Av dessa 145 barn kom 30 från en universitetsdriven förskola i ett medelklassområde och 115 barn kom från förskolor i områden med i huvudsak låginkomstfamiljer. 80 % av barnen från medelinkomstfamiljer uppgav att de hade spelat ett eller flera slags räknospel hemma, 87 % hade spelat ett eller flera slags kortspel och 30 % hade spelat ett eller flera typer av videospel. Bland låginkomstgruppens barn uppgav endast 47 % att de hade spelat ett eller flera slags räknospel, 61 % hade spelat ett eller flera kortspel och 66 % hade spelat videospel. Barnen från medelinkomstfamiljerna uppgav alltså en större variation av spel och kortspel som de hade erfarenhet av medan barn från låginkomstfamiljer nämnde ett större antal videospel.

Barnens resultat på ett numeriskt förtest jämfördes med deras erfarenheter av att spela nämnda typer av spel. Antalet räknospel som barnen uppgav att de hade spelat hade ett positivt samband med områdena *lineär representation av tallinjen inom talområdet 1–10, jämförelse av tals storlek, att kunna räkna från 1 till 10 samt att känna igen skrivna siffror 1–10*. Starkast samband fanns mellan barnens numeriska förmågor och erfarenheter av att spela räknospel där spelplanen utgjordes av en eller flera lineära tallinjer. Erfarenhet av kortspel och videospel hade endast svaga samband med de numeriska kunskaper och förmågor som undersöktes. Resultaten av denna och andra liknande studier, se t ex Whyte och Bull (2008), visar att barns erfarenheter av att spela lineära räknospel hemma och i förskolan kan bidra till dramatiska förbättringar av deras förståelse för grundläggande matematiska begrepp och särskilt för tals storleksförhållanden.

Ett spel som förekommer i tidiga skolår i England är *Snakes and ladders*. Här kommer en variant av det spelet som lätt kan konstrueras. Det enda som sedan krävs är en tärning och ett par spelmarkörer. Det är dock viktigt att lärare förvisar sig om att barnen redan har erfarenheter av att spela enkla varianter av lineära räknospel. I den här versionen är tallinjen bruten vilket kan skapa problem om eleven inte förstår idén eller om eleven inte har tillräckliga erfarenheter

av att arbeta med tallinjer. Då kan det vara bättre att konstruera ett spel där tallinjen inte är bruten. Detta spel som är en variant av Snakes and ladders har barn i årskurs 1 och 2 spelat.



Material: En spelplan numrerad från 1 och så långt som det passar de barn som ska använda spelet, en spelpjäs till varje deltagare samt en sifvertärning.

Aktivitet: Spelare A slår tärningen och räknar högt under tiden som spelpjäsen flyttas det antal steg som tärningen anger. Om spelpjäsen står på exempelvis 5 och tärningen visar 3, räknar eleven högt, "6, 7, 8". Varje gång man hamnar med sin spelpjäs på ett tal uppe på en rutschkana ramlar man ned en våning. När det blir ens tur nästa gång fortsätter spelet därifrån. Den som kommer först i mål har vunnit.

Eftersom barns erfarenheter av att spela lineära räknspel tycks vara betydelsefulla för utvecklingen av inre representationer av lineära tallinjen och grundläggande förståelse för tal och räkning borde den här typen av aktivitet förekomma ofta både i förskolans och i skolans verksamhet.

I kommande avsnitt ger vi exempel på interventionsstudier som riktar sig både till förskola och tidiga skolår.

Number worlds

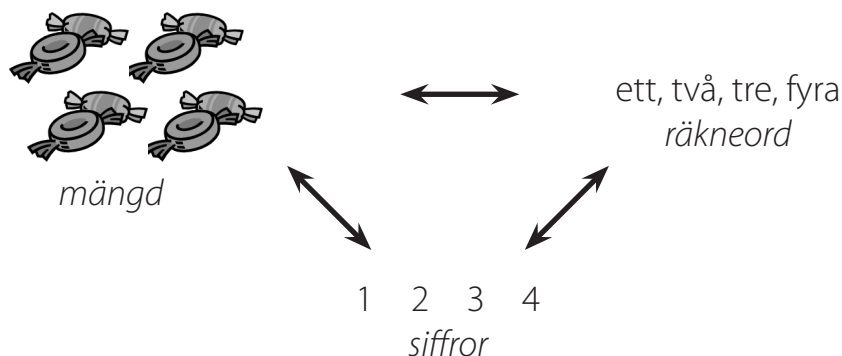
Flera vetenskapsområden har under lång tid uppmärksammat frågor om hur små barn utvecklar taluppfattning. Studier av samspelet mellan faktorer i miljön och hjärnans utveckling har bidragit till att man har kunnat göra vissa antaganden om hur begreppsliga talstrukturer utvecklas i tidiga år (Gelman & Gallistel, 1978; Griffin, 2004, 2007; Sousa, 2008; Siegler, 2008). Med stöd i Piagets forskning och integrerat med forskning om informationsprocesser och socio-kulturella teorier utvecklade Griffin i samarbete med lärare i USA ett undervisningsprogram för utveckling av taluppfattning och räkneförmåga. Programmet innehåller lärarhandledning, tester och förslag på undervisningsaktiviteter och riktar sig till förskola och tidiga skolår.

För att kartlägga barns generella kunskapsutveckling kopplat till taluppfattning i förskoleålder och i tidiga skolår utvecklades också *The number knowledge tests*. Dessa test avser att mäta kunskaper och förmågor relaterat till tal, tid och pengars värde och prövades ut bland stora grupper av barn 3–11 år (Griffin, 2004, 2007). Utifrån de insamlade testresultaten gjordes vissa antaganden om den generella utvecklingen av begreppsliga talstrukturer inom den aktuella åldersgruppen.

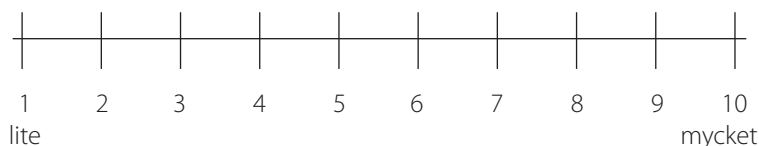
Vid ca fem års ålder sker en betydande omorganisering i barns tänkande. Kognitiva strukturer som utvecklades i yngre år integreras nu på ett hierarkiskt sätt. Viktiga förändringar i kognitiva strukturer sker med ungefär två års mellanrum under den undersökta utvecklingsperioden. Progressionen i den beskrivna utvecklingen är typisk för ca 60 % av barnen. Hos cirka 20 % sker utvecklingen i en snabbare takt och hos cirka 20 % sker utvecklingen i en långsammare takt (Griffin, 2004).

Utifrån denna teoretiska bas och empiriska forskning har Griffin skapat en modell för utveckling av den tidiga taluppfattningen. Utvecklingen sker, enligt denna modell, huvudsakligen i fyra faser. Barn kan tidigt med hjälp av den medfödda förmågan att uppfatta antal avgöra i vilken av två mängder det finns flest föremål. Genom erfarenheter och samspel med omvärlden lär de sig med tiden att det finns särskilda ord som beskriver kvantiteter och som svarar på frågan "hur många". Barn lär sig också vissa grundläggande räknepprinciper såsom att

det sist sagda räkneordet i räknesekvensen talar om det totala antalet föremål som finns i mängden (Gelman & Gallistel, 1978). Med fler vardagserfarenheter av att använda tal och genom undervisning utvecklas också förståelse för siffror och andra matematiska symboler.



Utvecklingen av den mentala tallinjen sker när uppfattningen av mängd kopplas samman med räkneord, de matematiska symbolerna för tal samt med de ordningsmässiga relationerna mellan tal. Detta kallar Griffin (2007) för *den centrala begreppsliga strukturen för hela tal*. Även om ett litet barn inte uppfattar tals exakta storleksförhållanden inom exempelvis talområdet 0–10 kan det ändå med hjälp av denna struktur visa förståelse för att talen 9 och 10 har ett högre värde än talen 1 och 2.



Den mentala tallinjen kan utvecklas till ett betydelsefullt redskap för att förstå och använda tal i många olika situationer utan att verkliga objekt behöver finnas till hands. Vi har tidigare redovisat att barns mentala tallinje till en början är logaritmisk och att utvecklingen av en linjär tallinje är beroende av undervisning. Fosnot (2007) pekar på betydelsen av att elever utvecklar förståelse för att tallinjen är en modell som representerar tals relativa storlek. En del elever missförstår modellen och uppfattar tal enbart som "punkter" på tallinjen och inser inte att t ex talet 30 representerar hela avståndet mellan 0 och 30. Att lära

sig att genomföra additioner och subtraktioner genom att göra "hopp" framåt och bakåt på en synlig eller konkret tallinje kan i sådana fall bli en rutinmässig och meningslös aktivitet. En mental tallinje kan vi bland annat utnyttja för att jämföra tals storleksförhållanden och göra rimliga uppskattningar, lära oss tal-kombinationer, utveckla talkänsla och effektiva räknestrategier och göra generaliseringar. En mental tallinje kan med andra ord fungera som ett kraftfullt redskap för tänkande men det krävs undervisning för att den ska utvecklas (Fosnot, 2007). Studier av tex Anderson (2008) indikerar att elever i tidiga skolår generellt får för lite erfarenheter av att undersöka tals storleksförhållanden med hjälp av konkreta tallinjer.

Number worlds – undervisningsprogram

I undervisningsprogrammet *Number worlds* ingår aktiviteter, tester och lärarhandledning som har utarbetats i samarbete mellan forskare och lärare (Griffin, 2004, 2007). Målgruppen är barn i förskola upp till årskurs 6 och materialet kan användas både i klassrumsundervisning och i specialundervisning. Syftet är att barnen ska utveckla förtrogenhet med tal och räkning. Undervisningsprogrammet bygger på fem grundläggande principer för matematikundervisningen:

1. Starta undervisningen i den verkliga världen med verkliga kvantiteter

Introducera nya matematiska begrepp med hjälp av verkliga objekt som finns i barnens vardag. Upplägget i programmet följer ett visst mönster. Först sker en kort "uppvärmning" vars syfte är att utveckla flyt i räknandet. Därefter följer laborativt arbete och aktiviteter med spel. Barnen ska ibland arbeta i stor grupp men ofta i små grupper. Genom att spela spel kan barn utveckla rika kunskaper om tal och räkning. Ett exempel på spel som förekommer i *Number worlds* är *The secret number game*.

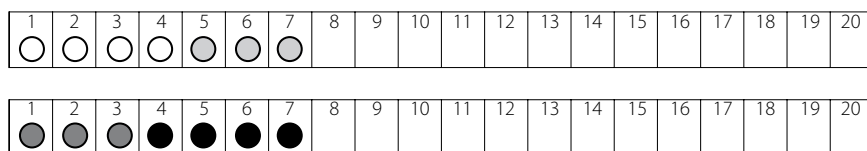
The secret number game

Material: Barnen behöver var sin spelplan numrerad 1–20, en sexsidig pricktärning och cirka 25 spelpjäser eller "plockisar" var. Plockisarna ska vara i fyra olika färger, minst sex av varje färg.

Aktivitet: Barnen ska turas om att slå tärningen och lägga så många plockisar som tärningen anger längs sin egen tallinje. För varje nytt slag byter de färg på sina plockisar för att hålla reda på vilka förflyttningar de har gjort under spelets gång.

Efter två slag var kan barnen jämföra sina tallinjer och se hur långt de har kommit samt berätta hur de har kommit dit. I exemplet nedan har båda barnen stannat

på talet 7. Genom samtal mellan lärare och barn kan det bli uppenbart att 7 kan nås på flera sätt, t ex genom att slå 4 och 3 eller 3 och 4 (principen om kommutativitet), 5 och 2 eller 2 och 5 osv. I spelet synliggörs till exempel att den som har 8 plockisar har en fler än den som har 7 och att 8 finns ett steg längre åt höger än talet 7 på tallinjen. På motsvarande sätt har den som har 6 plockisar en färre än den som har 7 stycken. Resonemanget understöds av den visuospatiala (rumsliga) utbredningen som tallinjen har samt av de konkreta föremålen. Genom lärarledda samtal kan barnen få hjälp att bygga upp förståelse för den additiva kompositionen av tal och tals storleksförhållanden. När ett barn har nått det sista talet på tallinjen dras ett "hemligt tal" ur ett kuvert. Det eller de barn som under spelets gång har landat på det hemliga talet har vunnit omgången. Vinnaren beskriver hur det aktuella talet nåddes.



2. Ge barnen rika möjligheter att utveckla sitt muntliga språk

Läraren bör försäkra sig om att barnen får möjlighet att muntligt beskriva sina handlingar när de spelar spel eller får andra erfarenheter av tal och räkning. Idén bakom denna princip är att barnen ska integrera sina mer intuitiva och omedvetna föreställningar om kvantiteter med mer medvetna och explicita föreställningar och att detta kan ske genom en stark betoning på kommunikation och samtal. Enligt Griffin (2007) visar erfarenheter att lärare ofta hoppar över samtalerna med barnen i samband med The secret number game. Skälen till detta kan vara tidsbrist eller att man vill undvika samtal i klassrummet därför att det kan bli en ljudnivå som stör andra barn. Ytterligare ett skäl, enligt Griffin, är att en del lärare menar att muntliga aktiviteter om kvantiteter och räkneord främst hör hemma i förskolan och har litet värde i skolans matematikundervisning, där fokus bör vara på det formella matematiska symbolspråket och hur det kan förstås och användas. För barn med räknesvårigheter eller för barn som saknar nödvändiga erfarenheter av att undersöka verkliga kvantiteter och att använda grundläggande räkneprinciper och räkneord kan just den muntliga aspekten av undervisningen vara den mest betydelsefulla.

3. Gradvis och systematisk introduktion av den matematiska symbolvärlden

Barn behöver omsorgsfullt planerade tillfällen att skapa samband mellan de informella uppfattningar om tal som de har utvecklat tidigare och det formella matematiska symbolspråket. Detta sker till exempel genom att barnen får dokumentera vilka förflyttningar de gör när de spelar The secret number game. När de äldre eleverna dokumenterar skriftligt ges alltid återkoppling av läraren och ibland av kamrater i gruppen.

4. Utgå från barnets förståelse och låt undervisningen följa en naturlig begreppsutveckling

Number worlds ger lärare stor frihet beträffande när aktiviteter kan genomföras men det är betydelsefullt att ta hänsyn till progressionen och komplexiteten i begreppsutvecklingen som visade sig i den empiriska forskningen och som programmet bygger på. Enskilda barn måste få bygga nya insikter på aktuella kunskaper och erfarenheter.

5. Låt eleverna använda räknestrategier som är naturliga för dem men exponera dem även för andra strategier

Låt eleverna använda räknestrategier som känns naturliga för dem så länge de behöver dessa. Det är till exempel inte meningsfullt att hindra barn från att räkna på fingrarna om de inte har utvecklat andra användbara strategier. Däremot ska undervisningen syfta till att barnen efter hand utvecklar flexibla och effektiva räknestrategier.

Utvärdering av Number worlds

Griffin (2007) rapporterar resultaten av en treårig studie med en experimentgrupp med 54 barn från låginkomstfamiljer, vilka hade arbetat med Number worlds från förskola tom årskurs 2. Jämförelsegruppen med 48 barn kom från liknande socioekonomiska förhållanden som experimentgruppen. Dessutom ingick ytterligare en jämförelsegrupp, en sk normgrupp, med 78 barn från en prisbelönad skola i ett mer ekonomiskt välmående område. Experimentgruppen arbetade med Number worlds under den aktuella perioden och de två övriga grupperna arbetade med olika kommersiella läromedel som skolorna själva hade valt.

Samtliga barn testades med ett taluppfattningstest vid 4, 6 och 8 års ålder. Normgruppens prestationer var i överensstämmelse med de förväntade resultaten enligt forskning om den generella utvecklingen. Experimentgruppens och jämförelsegruppens prestationer låg vid det inledande testet långt under normgruppens och visade på 1,5–2 års försenad kunskapsutveckling när det gällde

talbegrepp. Denna skillnad kvarstod för jämförelsegruppen under treårsperioden medan den med tiden jämnades ut och slutligen försvann för experimentgruppen. I slutet av årskurs 1 och 2 var det inte möjligt att skilja experimentgruppens resultat från normgruppens resultat och experimentgruppens resultat var i absoluta termer högre än normgruppens resultat.

I en annan del av utvärderingen har experimentgruppen och jämförelsegruppen genomfört ett test på procedurkunskap för årskurs 1, utarbetat av Stigler m fl (1990). Resultaten har jämförts med japanska elevers prestationer på samma test och visar att experimentgruppens resultat motsvarar dessa. Resultaten för jämförelsegruppen var signifikant lägre på många uppgifter och på testet i sin helhet. Särskilt tydligt var det i fråga om subtraktion.

För att undersöka elevernas kunskapsutveckling i fråga om transfer, dvs att kunna använda sina kunskaper i nya situationer, gavs samtliga elever i slutet av årskurs 2 tre test som innefattade uppgifter om *tid*, *pengar* och *formella skriftliga beräkningar*. Experimentgruppen presterade signifikant bättre än jämförelsegruppen på samtliga uppgifter och även något bättre än normgruppen på samtliga uppgifter.

Numeracy recovery intervention program

The numeracy recovery intervention program är avsett för undervisning om tal och räkning för elever i årskurserna 1 och 2. Det har utvecklats i ett samarbetsprojekt med forskare och lärare i England (Dowker, 2001; 2005). I programmet betonas betydelsen av att insatser görs tidigt, helst innan eleverna har utvecklat inadekvata strategier baserade på allvarliga missförstånd eller innan eleven utvecklar negativa attityder till matematik. De elever som av sina lärare hade bedömts ha svårigheter med aritmetik fick individuell undervisning av klassläraren 30 minuter per vecka under en period om 30 veckor, eller till dess att de inte längre bedömdes vara i behov av särskilda stödinsatser.

Programmet innehåller nio komponenter som lyfts fram i forskning som betydelsefulla för utveckling av grundläggande räkneförmåga (Gelman & Gallistel, 1978; Dowker, 2001; 2005) och som lärarna i projektet ansåg relevanta:

1. räkneramsan, uppräknings
2. grundläggande räknepprinciper
3. skriftliga matematiska symboler (läsa och skriva en- och tvåsiffriga tal)
4. platsvärde
5. textuppgifter (addition och subtraktion)

6. översättning mellan konkreta, verbala och skriftliga numeriska representationer
7. talkombinationer genom härledning
8. aritmetisk uppskattning
9. automatisering av tabellkunskaper.

Undervisningen anpassades efter enskilda elever och gick från det konkreta till det abstrakta. Eleverna arbetade laborativt och muntligt men gavs många tillfällen att läsa och skriva en- och tvåsiffriga tal. McIntosh (2008) påpekar att det inte är samma sak att skriva talen i en följd som att säga dem. Genom att elever får räkna högt och därefter skriva motsvarande talföljder kan talat och skrivet språk samspela och stödja varandra. Det bidrar till att etablera känsla för mönstret i den aktuella talföljden. De elever som visade osäkerhet för tvåsiffriga tal fick uppgifter som att:

- sortera föremål i tiogrupper
- räkna jämna tiogrupper högt, "tio, tjugo, trettio" osv och sedan skriva talen
- sortera föremål i tiotal och ental
- räkna mängder som innehöll både tiotal och ental högt, "33, 43, 53; 47, 57, 67" osv och sedan skriva talen.

Elever som till exempel hade svårigheter med platsvärde och operationer med tal fick arbeta med olika sätt att representera addition med hjälp av tiobasmaterial, tallinje, pengar, multilink (byggbara plastkuber i olika färger, med sidan 2 cm) och skrivna symboler. Förståelse för sambanden mellan de olika representationsformerna betonades. Eleverna arbetade också med aritmetiska mönster som $20 + 10$, $20 + 11$, $20 + 12$; $30 + 10$, $30 + 11$, $30 + 12$ osv.

Efter sex månaders insatser genomförde eleverna tre standardiserade test som behandlade områdena *uppskattning*, *talkombinationer genom härledning* samt *översättning mellan konkreta, verbala och skriftliga numeriska representationer*. Eleverna visade signifikanta framsteg på samtliga test. Ytterligare uppföljning och utvärdering av Numeracy recovery intervention program pågår.

Arbetsminnet och undervisning

I tidigare avsnitt har vi redogjort för arbetsminnets funktioner. För elever med begränsningar i arbetsminnets kapacitet uppstår ofta kritiska situationer i skolarbetet inte minst när det gäller läsning och matematik. För att mer direkt

studera hur brister i arbetsminnet påverkar elevers skolsituation genomförde Gathercole och Alloway (2008) klassrumsobservationer i motsvarande grundskolan i England. De fann att begränsningar i arbetsminnet bidrog till att elever kontinuerligt misslyckades med uppgifter som innebar krav på att kunna hålla information aktuell i medvetandet samtidigt som någon annan mental aktivitet skulle genomföras. Elever kunde påbörja aktiviteter på ett rimligt sätt men glömde ofta information som var nödvändig för att slutföra aktiviteten. De tappade kontrollen över uppgifters olika delmoment och hade svårt att veta hur långt de hade kommit mot uppgiftens lösning. Många kämpade med att försöka följa instruktioner som gavs i flera steg men kraven på arbetsminnet blev ofta övermäktiga. De alternativ som elever hade att på egen hand klara ut dessa och liknande situationer var att gissa, att försöka börja om från början eller att helt enkelt överge uppgiften och ägna sig åt något annat. Gathercole och Alloway påpekar att varje sådant tillfälle är "ett missat tillfälle att lära", dvs mycket av den tid eleven skulle behöva ägna åt sitt skolarbete går förlorad. I intervjuer med de observerade elevernas lärare beskrevs eleverna ofta som ouppmärksamma, lätt-distraherade och omotiverade. Lärarna menade att eleverna inte lyssnade eller att de inte var intresserade av skolarbetet. Eleverna hade svårt att övervaka och kontrollera sitt arbete, hade svårt att följa instruktioner och visade dålig uthållighet. Få av lärarna uppgav begränsningar i arbetsminnet som en möjlig orsak till problemen men de menade att eleverna ofta presterade under sin förmåga och att de lärde sig långsamt.

När vi läser, skriver, räknar eller löser textuppgifter i matematik är det nödvändigt att vi effektivt kan hålla kvar, bearbeta och uppdatera information i arbetsminnet samt stänga ute irrelevant information (Gathercole & Alloway, 2008). En elev med ett arbetsminne som ständigt riskerar att överbelastas kan tappa fokus och ge upp sina försök att fullfölja uppgifter och aktiviteter. Gathercole och Alloway påpekar att det är meningslöst att uppmana dessa elever att försöka minnas instruktionen som läraren nyss har gett eftersom detta inte är möjligt, det går inte att återskapa förlorad information i arbetsminnet bara genom att försöka minnas. De ger däremot exempel på hur lärare kan organisera undervisningen i klassrummet för att undvika överbelastning av elevernas arbetsminne och på så sätt underlätta deras lärande:

- uppmärksamma arbetsminnesproblem och observera kontinuerligt elevens skolarbete
- var vaksam på varningssignaler om att elevens arbetsminne är överbelastat. Ställ frågor till eleven för att försäkra dig om att eleven inte har "tappat tråden".

- bedöm aktivitetens krav på arbetsminnet och reducera kraven genom att modifiera aktiviteten
- skapa sammanhang i undervisningen. Lyft fram samband och relationer t ex inom och mellan tal, procedurer och räknestrategier
- använd olika typer av minnesstöd i klassrummet, t ex listor över exempel på problemlösningstrategier, vanliga oregelbundet stavade ord, dagens läxa etc.
- hjälp eleven att utveckla minnesstrategier. Repetera information och instruktioner och ge dessa vid behov både i bild och i skrift.
- hjälp eleven att utveckla egna strategier för att komma ihåg läxan och vilka böcker eller annat material som är nödvändiga att ta med hem (och ta med tillbaka till skolan).

Ett intressant fenomen är också sambandet mellan arbetsminne och upplevd stress (Beilock, 2008). En elev som ombeds genomföra en matematisk lösningsprocess steg för steg inför hela klassen kan gripas av ångest och en känsla av panik för att inte klara ut situationen. Personer som hade god arbetsminneskapacitet presterade sämre än förväntat i stressrelaterade situationer på uppgifter som ställde krav på det verbala arbetsminnet (Beilock, 2008). Ett väl fungerande arbetsminne bidrar till att vi kan hålla flera saker aktuella i medvetandet samtidigt som vi tänker eller genomför olika operationer i huvudet. Men när vi blir utsatta för stress kanske vi upprepar tyst för oss själva, "hjälp, det här klarar jag aldrig", "usch vilken obehaglig situation" osv. Verbala arbetsminnet tas då i anspråk och dess resurser räcker plötsligt inte till att effektivt hålla ordning på och samtidigt bearbeta nödvändig information. Då måste vi kanske förlita oss på mer osäkra strategier för att lösa uppgiften. Personer med låg verbal arbetsminneskapacitet och där centrala exekutiven inte förmår stänga ute irrelevant information på ett effektivt sätt befinner sig i stressliknande situationer även i normala fall (Beilock, 2008).

Textuppgifter i matematik

En analys av den matematiska delen i TIMSS, 2007 (*Trends in international mathematics and science study*) visar att de största problemen som svenska elever i årskurs fyra har rör taluppfattning och aritmetik. På uppdrag av Skolverket (2008c) genomförde Bentley m fl en studie i Lilla Edets kommun och undersökte hur svenska elever arbetar med matematiska begrepp och vilka misstag de gör. Forskarna har gått igenom ett stort antal elevlösningar och har djupintervjuat 300 elever i årskurserna 1–4 samt årskurs 7. Eleverna har fått förklara hur

de har tänkt och hur de har utfört beräkningarna. Resultaten visar att de fel eleverna gör oftast inte är slumpmässiga. De är tvärtom systematiska och bygger på utvecklade begrepp eller begreppsmodeller. I TIMSS visar det sig att misstag som elever i årskurs fyra gör, gör även elever i årskurs åtta. Bentley menar att en del elever då har hunnit befästa felaktiga beräkningsmetoder. Eleverna har inte lärt sig känna igen olika typsituationer i samband med textuppgifter och med vilka beräkningsmetoder de kan lösas. TIMSS visar att en del elever är osäkra på att genomföra enkla beräkningar och i vilka sammanhang olika beräkningsprocedurer kan användas. Liknande resultat rapporterades redan på 80-talet där både nationell och internationell forskning lyftes fram och diskuterades (se tex Johansson, 1982/83). Resultaten är också i linje med McIntosh och Dole (2004) och McIntosh (2008). Forskarna kartlade missuppfattningar och svårigheter som elever har i fråga om tal och räkning i grundskolans samtliga åldersgrupper. Hos en del elever är dessa missuppfattningar och svårigheter tillfälliga men hos andra elever är de långvariga och kan bestå även upp i vuxen ålder (McIntosh, 2008).

Forskning om svårigheter att lösa textuppgifter i matematik har ofta varit koncentrerad till elementära uppgifter koppade till addition och subtraktion under tidiga skolår (Jordan, Hanich & Kaplan, 2003). Under senare år har även mer komplexa textuppgifter varit föremål för forskarnas intresse (Jordan, 2007; Reikerås, 2006; Andersson, 2008; Fuchs mfl, 2008). Problem som elever med räkningsvårigheter, eller räkningsvårigheter i kombination med lässvårigheter, hade med att lösa textuppgifter i årskurs 2 och 4, kvarstod även i årskurs 7 (Reikerås, 2006). Däremot fanns det inga signifikanta skillnader i prestationer på textuppgifter när forskarna jämförde elever med lässvårigheter och elever utan läs- eller räkningsvårigheter i årskurs 2 och 4. Detta förhållande hade dock förändrats i årskurs 7. Då presterade elever med lässvårigheter signifikant sämre än elever utan svårigheter. Reikerås (2006) menar att detta kan tyda på att vissa elever i tidiga skolår kan kompensera för sina lässvårigheter med hjälp av sina matematiska styrkor, men att detta inte lyckas längre upp i utbildningssystemet när kraven på läsförmågan blir större.

En annan tolkning kan vara att gapet mellan elever med lässvårigheter och utan tenderar att öka med tiden (negativ Matteus-effekt enligt Stanovich, 1986). De lässvaga lär sig undvika läsning och får därmed en sämre ordförrädsutveckling och sämre förmåga att ta till sig ett mer komplicerat skriftspråk.

Enligt Andersson (2008) kunde problem med att lösa textuppgifter som elever med räkningsvårigheter och elever med både matematik- och lässvårigheter hade i årskurs 3 och 4 för båda grupperna förklaras med flera faktorer. Svårigheter att hämta fram talfakta, bristfällig förståelse för basala räknepprinciper (tex kommutativa och associativa lagen) och svårigheter att göra beräkning med flersiffriga tal kan ha hindrat elever från att skapa en inre representation

av uppgiften och att konstruera en plan för hur lösningen skulle genomföras (Andersson, 2008). En studie bland 634 elever i årskurs 3 visade att de elever som var bra på att göra aritmetiska beräkningar inte nödvändigtvis var de som var bra på att lösa textuppgifter (Fuchs mfl, 2005). Exempel på andra faktorer som var relaterade till elevernas förmåga att lösa textuppgifter var arbetsminne, uppmärksamhet, resonemangsförmåga, förmåga att identifiera ord samt hörförståelse. Att lösa textuppgifter i matematik kräver god läsförmåga och förståelse för operationer med tal, att kunna göra beräkningar, identifiera textuppgifters underliggande struktur och att kunna använda sina kunskaper i nya situationer (Fuchs mfl, 2008).

Läsförståelse

För att förstå skriven text krävs förmåga att skapa inre representationer av textens innehåll. Information som ges på olika ställen i texten ska dels integreras med varandra, dels integreras med bakgrundsinformation och tidigare erfarenheter och kunskaper som läsaren har och som kan vara relevanta i sammanhanget. I fråga om textuppgifter i matematik ska den samlade informationen vidare relateras till frågeställningen och de ingående talen för att en adekvat lösningsprocess ska kunna konstrueras (Jordan, 2007; Fuchs mfl, 2007, 2008). Ibland undviker elever att läsa texten noggrant och letar istället efter signalord som kan ge dem en ledtråd om vilket räknesätt som är aktuellt. Orden *fler* och *tillsammans* leder tanken till addition, medan *färre*, *kvar* och *resten* leder till subtraktion (Johansson, 1982/83; McIntosh, 2008). En sådan strategi är dock vanskelig eftersom den kan leda till val av fel räknesätt.

Förståelse för operationer med tal

Man kan inte ta för givet att elever på egen hand utvecklar förståelse för hur de ska använda sina räknefärdigheter om de lär sig räkna som en isolerad företeelse skild från praktiska sammanhang. En viktig uppgift för skolans grundläggande undervisning i matematik är därför att ge alla elever möjligheter att utveckla god förståelse för olika innebörder, tolkningar och relationer inom och mellan de fyra räknesätten så att de kan använda dessa operationer i verkliga sammanhang utanför skolan (Van de Walle, 2001; McIntosh, 2008). God taluppfattning omfattar förståelse av de grundläggande räkneoperationerna, en starkt integrerad förståelse för de fyra räknesätten, deras samband och alla de skilda innebörder operationer kan ha i olika situationer (se t ex Emanuelsson, Johansson & Ryding 1991a, 1991b). Elever kan utveckla god taluppfattning genom att bli lösa textuppgifter i matematik. Textuppgifter skapar möjligheter att utforska varierade

innebörder för vart och ett av de fyra räknesätten. En del elever har svårt att översätta en situation till ett relevant uttryck även om de förstår själva situationen. Att kunna översätta en vardagssituation till ett skriftligt uttryck med matematiska symboler kräver andra färdigheter än att lösa en uppgift som redan är uttryckt i symbolform. Undervisningen ägnar ofta för lite tid åt särskilda aktiviteter för det förra och för mycket tid för det senare trots att färdigheter att lösa uppgifter med symboler inte är till större nytta om man inte kan göra översättningar mellan verklig situation och symbolisk form (McIntosh, 2008). En del textuppgifter kräver att man löser uppgiften i flera steg och att dessa dellösningar relateras till varandra. Många elever har svårigheter att anpassa beräkningsprocedurer när det ges nya förutsättningar för samma typ av problem som eleverna tidigare har arbetat med (Johansson, 1982/83; Fuchs & Fuchs, 2008; Skolverket, 2008c). Eleverna upplever i själva verket att det är en annan typ av problem som de inte har mött tidigare och att de därför inte kan lösa det.

McIntosh (2008) påpekar att elever ibland får onödiga svårigheter med att hantera sambanden mellan räknesätten därför att de inte inser dessa samband eller inte törs utnyttja dem på ett flexibelt sätt. I vissa fall har eleverna inte upptäckt räknelagarna (tex kommutativa och associativa lagen), ingen har förklarat dem och eleverna har inte heller fått möjlighet att lära sig använda dem. För dessa elever är räkning, enligt McIntosh, ofta detsamma som att följa förutbestämda och inlärd regler. Eleverna analyserar inte uppgiften för att hitta det enklaste och mest effektiva sättet att lösa den på utan följer en inlärd ritual som kanske inte passar i sammanhanget. Exempel på detta redovisas även i rapporteringen av TIMSS (Skolverket, 2008c) där elever kommer fram till att $51 - 49 = 18$. Förmodligen har dessa elever använt metoden att räkna talsort för talsort utan att reflektera över de ingående talen och siffrornas positionsvärden: $50 - 40 = 10$; $9 - 1 = 8$; $10 + 8 = 18$.

Förståelse för uppgifters struktur

Johansson (1982/83) och Van de Walle (2001) pekar på komplexiteten i de fyra räknesättens innebörder och hur de är relaterade till varandra samt på förståelsen för operationer med tal. Enbart för operationer med addition och subtraktion har tex 14 olika typer av textuppgifter identifierats. Här följer tre exempel (Van de Walle, 2001) i vår översättning:

Malin tjänade 50 kronor på att sitta barnvakt. Hon hade tidigare tjänat 70 kronor. Hur mycket har Malin tjänat sammanlagt? (s 108)

Jerry plockade äpplen. Han hade 7 äpplen i sin korg och plockade sedan några fler äpplen. När han räknade alla hade han 11 äpplen. Hur många fler äpplen hade han plockat? (s 108)

Om eleverna representerar situationerna med hjälp av laborativt material så kommer representationerna att se olika ut. I det första fallet kan eleven räkna upp 50 kronor som adderas till de 70 kronor som Malin redan hade. I det andra fallet måste ett okänt tal adderas till 7 för att summan ska vara 11, alternativt kan eleven utgå från de 11 äpplena och ta bort 7 stycken.

Anders kokar 34,8 liter saft på måndagen. På tisdagen kokar han mer saft. Han har då kokat totalt 72,5 liter saft. Hur många liter kokade han på tisdagen? (s 108)

Den här uppgiften liknar till sin struktur uppgiften med äpplena. Själva situationen signalerar en addition, men beräkningen görs enklast med subtraktion. I uppgiften med äpplena kommer en del elever att uttrycka lösningen som en addition, $7 + 4 = 11$ och andra som en subtraktion, $11 - 7 = 4$. Enligt Van de Walle (2001) bör vi inte försöka tvinga eleverna att skriva uppgiften som en subtraktion. Däremot är det betydelsefullt att synliggöra och diskutera den underliggande *strukturen* med hjälp av laborativt material och genom att låta eleven rita och diskutera lösningsförslag. Sådana konkreta modeller kan tjäna som tankeredskap när elever ska analysera vilken typ av uppgift det är och skapa samband mellan textinnehållet och de ingående talen, så att beräkningsproceduren kan anpassas till förutsättningarna i det specifika problemet. För att kunna undervisa om textuppgifter i matematik måste lärare behärska komplexiteten i dem (Skolverket, 2008c).

Uppgiftstyper

En kritisk faktor som lärare måste uppmärksamma eleverna på är att uppgifters struktur kan skymmas av vokabulär och innehålla flera frågor, att en del information är irrelevant eller att det egentligen handlar om en kombination av flera uppgiftstyper. Det gäller alltså att kunna identifiera många uppgifter som på ytan kan se olika ut men som matematiskt tillhör samma problemtyp. Vissa forskare talar om *scheman*. Ett *schema* är en kategori av många textuppgifter som liknar varandra till sin struktur (Xin, Jitendra & Deatline-Buchman, 2005; Fuchs mfl 2007, 2008). "Johan har 50 kronor mer än Katia" är samma typ av uppgift som "Katia är 15 cm längre än Jan", de tillhör samma kategori av textuppgifter eller samma schema. Scheman hjälper oss att känna igen olika typer av problem. Ju fler problemtyper med samma struktur som vi har mött, desto större är möjligheten att upptäcka samband mellan tidigare kända och nya okända

textuppgifter som tillhör samma schema. Ett nyckelbegrepp inom schemateorin är förmågan till transfer dvs att kunna använda sina erfarenheter, kunskaper och förmågor i nya situationer. Fuchs mfl (2008) menar att undervisningen om textuppgifter i matematik explicit måste syfta till att elever ges optimala möjligheter att utveckla scheman och medvetenhet om dessa scheman för att förbättra förmågan till transfer.

Mottaglighet för undervisning

Ett av problemen med att diagnosticera räknsvårigheter är att man inte har lyckats finna en metod att utesluta bristfällig undervisning som en möjlig förklaring till elevers låga matematikprestationer. Fuchs mfl (2008) gjorde ett försök att närma sig problemet genom att utveckla och använda metoden "Mottaglighet för undervisning" (Responsiveness to intervention, RTI). Syftet med RTI-studier är bland annat:

- att tidigt identifiera elever som riskerar att utveckla räknsvårigheter och att tidigt i förebyggande syfte sätta in beprövade undervisningsåtgärder som ges i hela klassen
- att tidigt identifiera elever som inte gör framsteg trots de förebyggande åtgärderna på klassnivå, samt att ge dessa elever specialpedagogiskt stöd i mindre grupp.
- att kartlägga och analysera orsaker till att en del elever inte tillgodogör sig undervisningen på klass- och gruppnivå. Efter en noggrann utredning kan ett individuellt program utarbetas för eleven. Detta är den mest intensiva åtgärden och syftet är att eleven så snart som möjligt ska återgå till grupp- och klassundervisningen (Fuchs, mfl 2007; Xin, Jitendra & Deatline-Buchman, 2005).

Ett undervisningsförsök

Med utgångspunkt i RTI har Fuchs mfl (2008) genomfört en studie bland totalt 119 slumpmässigt utvalda klasser i årskurs 3. Studien pågick under fyra år och var inriktad på lösning av textuppgifter i matematik. Det primära syftet var att jämföra effekterna av empiriskt utprovade åtgärder enligt SBI, *schema-broaden-instruction* som gavs i små undervisningsgrupper om 2–4 elever när åtgärderna kombinerades med klassundervisning enligt SBI respektive med reguljär klassundervisning. Undervisning enligt SBI syftar till att eleverna ska lära sig att känna igen olika textuppgifters underliggande struktur, att avgöra vilken typ av

uppgift det är och vilka lösningsmetoder som kan vara aktuella. Fuchs m fl avsåg också att jämföra kunskapsutvecklingen hos elever som löpte risk att utveckla räknsvårigheter med kunskapsutvecklingen hos elever som inte bedömdes löpa denna risk.

Samtliga elever som ingick i studien fick göra ett förtest där uppgiften var att lösa ett antal textuppgifter. De 15 % lägst presterande eleverna antogs vara i riskzonen för att utveckla räknsvårigheter. En tredjedel av samtliga elever fick genom slumpmässigt urval ”reguljär” klassundervisning och två tredjedelar fick undervisning enligt SBI under 16 veckor. SBI-programmet bestod av väl utprovade lektionsserier som behandlade både enkla och komplexa textuppgifter. Undervisningen enligt SBI syftade till att eleverna skulle utveckla förståelse för den matematiska strukturen i olika problemtyper, kunna kategorisera dem, lösa dem på ett effektivt sätt samt utveckla förmåga till transfer. Det gällde att känna igen en problemtyp trots att problemets struktur ibland kunde skymmas av vokabulär, att problemet innehöll flera frågor, att en del information var irrelevant eller att det handlade om en kombination av flera problemtyper.

Elever som bedömdes vara i riskzonen för att utveckla räknsvårigheter arbetade under den aktuella perioden enligt något av följande alternativ:

- klassundervisning enligt SBI, kombinerat med specialpedagogiskt stöd i liten grupp om 2–4 elever (också enligt SBI)
- klassundervisning enligt SBI och inget specialpedagogiskt stöd i liten grupp
- reguljär klassundervisning kombinerat med specialpedagogiskt stöd i liten grupp enligt SBI
- reguljär klassundervisning och inget specialpedagogiskt stöd i liten grupp

Övriga elever deltog antingen i den reguljära klassundervisningen eller i klassundervisning enligt SBI.

Samtliga elever fick inledningsvis tre veckors undervisning om generella problemlösningstrategier. Därefter följde antingen 13 veckors reguljär klassundervisning eller 13 veckors klassundervisning enligt SBI. Det specialpedagogiska stödet i liten grupp gavs parallellt tre gånger i veckan, ca 20–30 minuter per gång under 12 veckor, plus under två uppföljande lektioner den trettonde veckan.

Innehållet i SBI-undervisningen på klass- och gruppnivå följdes åt. På gruppnivå arbetade eleverna vidare med de mest komplexa problemen som hade förekommit i klassundervisningen. Laborativt material användes i större utsträckning, stödet från läraren var mer intensivt och undervisningen syftade också till att påtagligt förstärka elevernas förmåga till mer självständigt arbete.

Undervisningens innehåll

SBI-undervisningen tog sin utgångspunkt i att det är möjligt att känna igen en specifik uppgiftstyp utifrån dess struktur eller schema. Exempel på tre uppgiftstyper som eleverna arbetade med var:

Joe needs supplies for the science project. He needs 2 batteries, 3 wires, and 1 board. Batteries cost \$4 each, wires cost \$2 each, and boards cost \$6 each. How much money does he need to buy supplies? (Tvåstegsuppgift, multiplikation och addition)

Jose needs 32 party hats for his party. Party hats come in bags of 4. How many bags of party hats does Jose need? (enstegsuppgift, division)

Mary keeps track of the numbers of scores she does on this chart (a pictograph is shown with a label; each picture stands for 3 scores). She also took her grandmother to the market 3 times last week. How many scores has Mary done? (trestegsuppgift, multiplikation och addition) (Fuchs mfl, sid 496).

Under de tre inledande veckorna arbetade samtliga elever som ingick i studien med generella problemlösningsstrategier som att beskriva en uppgift med egna ord, teckna uppgiften i ett eller fler steg, genomföra problemlösningsprocessen, bedöma lösningens rimlighet och kontrollera lösningen. Därefter följde antingen reguljär klassundervisning eller SBI-undervisning som delades in i fyra faser för varje problemtyp som man arbetade med:

1. Den inledande fasen handlade om textuppgifter som hade samma struktur, men där sammanhangen som problemen var inbäddade i varierade. Läraren fokuserade på centrala matematiska begrepp och på problemtypens struktur. I det här skedet presenterade läraren genomarbetade problem och förklarade med hänvisning till de generella problemlösningsstrategierna varje fas i problemlösningsprocessen under tiden som eleverna ställde frågor och svarade på frågor från läraren.
2. Lärare och elever diskuterade delvis genomarbetade textuppgifter och eleverna fullföljde lösningsprocessen. Eleverna arbetade i par och mer kunniga elever hjälpte mindre kunniga kamrater.
3. Eleverna löste textuppgifter i par men också individuellt.
4. Den fjärde fasen fokuserade på att vidga elevernas scheman och att utveckla förmågan till *transfer*, dvs att känna igen olika uppgiftstyper i nya situationer och att kunna använda sina tidigare erfarenheter och kunskaper på ett adekvat sätt. Eleverna uppmärksammades på att problemets struktur

kan skymmas av vokabulär, att problemet innehåller flera frågor, att en del information är irrelevant eller att det egentligen är en kombination av flera problemtyper.

I den grupp som hade reguljär klassundervisning arbetade eleverna med samma problemtyper som i SBI-undervisningen. Båda undervisningsformerna arbetade med en problemtyp i taget och fokuserade på problemens begreppsliga struktur och på explicita problemlösningstrategier. Den reguljära klassundervisningen var inte explicit inriktad mot att bredda elevernas scheman i syfte att utveckla förmåga till transfer.

Utvärdering

Det primära syftet med studien var att undersöka om en kombination av förebyggande åtgärder enligt SBI på klass- och på gruppnivå är mer effektivt än om de ges endast på gruppnivå kombinerat med reguljär klassundervisning. Resultaten visar att de förebyggande åtgärder som gavs i liten grupp var signifikant effektivare när de gavs i kombination med SBI i klassrummet. Fuchs mfl framhåller att detta visar på betydelsen av att elever som riskerar att utveckla räknesvårigheter ges evidensbaserad undervisning i klassrummet kombinerat med högkvalitativa stödåtgärder. I den här studien var undervisningen som gavs i klass respektive i liten grupp tätt sammanlänkade. Den vilade på samma teoretiska grund (SBI) och eleverna arbetade med samma typer av problem vid samma tidpunkt. Det är möjligt påpekar Fuchs mfl, att man inte når samma goda resultat om åtgärderna är sämre sammanlänkade.

Elever i riskzonen för att utveckla räknesvårigheter, som deltog i reguljär klassundervisning och som fick förebyggande åtgärder enligt SBI i liten grupp, gjorde större framsteg än elever som inte var i riskzonen för att utveckla svårigheter och som enbart deltog i den reguljära klassundervisningen. Det innebär att skillnader mellan dessa två elevgrupper minskade avsevärt.

Elever i riskzonen som fick undervisning enligt SBI både i klassrummet och i liten grupp gjorde jämförbara framsteg med elever som inte bedömts vara i riskzonen och som fick klassundervisning enligt SBI. Båda grupperna gjorde avsevärda framsteg och gapet dem emellan förblev därför lika stort som tidigare.

När båda grupperna enbart fick klassundervisning enligt SBI gjorde elevgruppen som inte var i riskzonen för att utveckla räknesvårigheter de större framstegen och gapet mellan de båda grupperna ökade.

Sammantaget visar studierna enligt Fuchs mfl, att alla elever drog nytta av de förebyggande åtgärderna på klassnivå. Samtidigt visar resultaten på nödvändig-

heten av att dessa åtgärder görs i kombination med åtgärder på gruppnivå för elever som löper risk att utveckla räknsvårigheter.

Dyscalculia guidance

Dyscalculia guidance är en lärarhandledning i aritmetikundervisning av elever med dyskalkyli. Den har utvecklats i samarbete mellan Butterworth och Yeo (2004) och lärare med lång erfarenhet av att undervisa elever med räknsvårigheter. Boken är nu under översättning till svenska och kommer att ges ut på Natur och Kultur 2009.

Elever kan ha problem med tal och räkning av många skäl. Det kan vara faktorer som rör språk, brist på relevanta erfarenheter i förskoleåldern, bristfällig undervisning, uppmärksamhet, arbetsminne eller spatiala förmågor. En effektiv undervisning måste ta hänsyn till sådana bakgrundsfaktorer. I boken framhålls också de emotionella konsekvenser som svårigheterna kan föra med sig och som ofta är klart uttalade bland elever med diagnosen dyskalkyli. I intervjuer berättar elever att de känner sig dumma, har ångest och blir ledsna när de tänker på matematik. Butterworth och Yeo hävdar att dyskalkyli inte innebär att man inte kan lära sig aritmetik. Däremot ställer problemen mycket höga krav på undervisningen. I huvudsak förordas en-till-en undervisning. Men det finns också spel och andra aktiviteter som bygger på kommunikation och samspel i mindre grupper som har visat sig gynnsamma för utvecklingen av taluppfattning.

I bokens inledande kapitel ges en översiktlig beskrivning av aktuell forskning på området. Författarna hävdar att elever med dyskalkyli saknar en naturlig och intuitiv känsla för kvantiteter och tal (se kap. 1 denna översikt). Karakteristiskt för dessa elever är att de uppfattar små och även stora talmängder som mängder av en-enheter. De räknar ofta ett steg i taget på räkneramsan, vanligtvis med hjälp av fingrarna, och tappar lätt bort sig. Kunskap som eleverna har inom ett område kan inte enkelt generaliseras till ett annat område. Författarna hävdar till exempel att en elev som har lärt sig $10 - 6 = 4$ ofta inte på egen hand kan generalisera det till 10 poäng – 6 poäng. Andra områden av matematiken, som geometri och algebra, behöver inte vålla eleverna problem.

Råd för undervisning

Butterworth och Yeo framhåller i lärarhandledningen att undervisningen måste vara väl strukturerad och varierad. Särskilt betonas vikten av att eleverna får positiva erfarenheter av att lära sig matematik. Elever med dyskalkyli

har mycket stora svårigheter att komma ihåg talfakta och procedurer som de har försökt att lära sig utantill. Dessa kan upplevas som meningslösa och sakna innehåll. Insikter om talbegrepp, talstrukturer och räkneprocedurer som bygger på förnuftsmässiga resonemang och praktiska erfarenheter kan däremot vara en god grund att bygga vidare på. Vi redovisar här några av de råd som författarna ger för undervisningen.

Laborativt material

Tiobasmaterial, prickmönster, spel och tallinjer är viktiga hjälpmedel i undervisningen. Många elever är hjälpta av att rita och att använda enkla diagram. Författarna framhåller att matematikundervisningen många gånger blir för abstrakt allt för snabbt. Å andra sidan gagnar det inte eleverna att de blir beroende av laborativt material. En grundpelare är att de ska få explicit hjälp att skapa inre föreställningar och att göra överföringar mellan det konkreta och det abstrakta arbetet med tal.

Fokus på språket

I råden till lärare framhålls att det matematiska språket kan vara svårt för elever med dyskalkyli. Om man saknar känsla för tal och tals innebörder kan enkla uttryck som "3 gånger 4" skapa förvirring. Elevernas lärande kan underlättas genom att man i undervisningen använder ett enkelt, vardagligt och transparent språk. Eleverna bör uppmuntras att beskriva begrepp och procedurer i enkla termer och att översätta matematiska symboler till ett språk som är begripligt för dem.

Positiv och stödjande undervisning

Elever med dyskalkyli har oftast ett bräckligt förhållande till sitt eget lärande om tal och om talbegrepp. En positiv, varsam och tålmodig undervisning är ytterst betydelsefull. Eleverna måste få erfarenhet av att kunna lära sig och att läraren har tilltro till deras förmåga. Det är viktigt att ge eleverna den tid de behöver för att till exempel tänka ut svaret på en muntlig uppgift. De flesta elever i denna elevgrupp kan ta väldigt god tid på sig när de ska svara på en fråga. Det kan ha att göra med att eleven räknar långsamt men också med att dessa elever i allmänhet tänker långsamt när det gäller tal och räkning.

Varierad undervisning med tydlig struktur

Ytterligare råd som ges i boken är att undervisningen görs varierad med en tydlig struktur. Lektionerna kan gärna inledas med att eleverna får lösa några uppgifter som läraren vet att de klarar. Det fortsatta arbetet kan sedan ske med små kontinuerliga utmaningar men med en tydlig progression. Det är betydelsefullt att

eleverna får fullfölja påbörjade arbeten och att de får tillräckligt med konkret stöd för att kunna genomföra sina hemläxor.

Dyscalculia guidance innehåller en rad förslag på aktiviteter och spel. Aktiviteterna är organiserade under fyra huvudrubriker: *Talsystemet*, *Tabellfakta och tankestrategier*, *Arbete med stora tal* samt *Andra aspekter av matematik*. Under dessa rubriker behandlas addition, subtraktion, multiplikation, division samt tal i bråkform. Vi ger här ett par exempel på några sammanhängande aktiviteter och spel, hämtade ur det inledande kapitlet om *Talsystemet*. Underrubriken är *Räkning och den strukturerade tallinjen: tiotalsstrukturen upp till 100*.

Arbete med tallinjen

Elever med dyskalkyli uppfattar ofta tal som samlingar av en-enheter. Syftet med den här aktiviteten är att introducera idén om *talstrukturer* och att hjälpa elever att börja konstruera en mental tallinje. Erfarenheter av att göra aritmetiska uppskattningar och att räkna i större talområden hjälper enligt Butterworth och Yeo eleverna att utveckla en bättre känsla för kvantiteter.

Aktivitet. Eleven ska uppskatta antalet räknebrickor i en hög med mellan 10 och 50 stycken. Eleven får kontrollera sin uppskattning genom att ordna räknebrickorna i en horisontell rad och räkna högt under tiden.

Läraren uppmanar eleven att lämna ett tydligt mellanrum efter varje helt tiotal och att fortsätta räkna ... 10; 11, 12, 13, 14 ... 20; 21, 22, 23, 24 ... osv.

Exempel med 16 räknebrickor:

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Exempel med 26 räknebrickor:

○ ○

När alla brickor är räknade uppmanas eleven att räkna i steg om tio: "tio, tjugo, trettio". Eleverna får hjälp att upptäcka att tiotalsstrukturen gör det enkelt att uppfatta antalet.

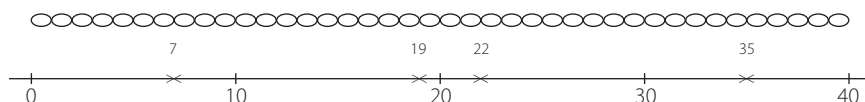
Eleverna kan behöva många erfarenheter av att hitta och namnge de enskilda brickor som representerar tiotal:

– Kan du, utan att räkna varje bricka från början, peka på den som visar talet 40 på talraden? Talet 70? osv.

Eleven uppmanas att hitta och namnge många andra tal på tallinjen genom att utnyttja tiostrukturen:

– Kan du, utan att räkna från början, använda tiotalen för att hitta talet 24? 17? 54? 83? osv.

Därefter kan eleven arbeta med en tallinje där enbart tiotalen är markerade och med avstånd som tillåter en direkt jämförelse mellan det laborativa materialet (mängd) och talens plats på tallinjen. Eleven får läsa tiotalen och markera, namnge och bedöma tals placeringar på tallinjen.



I ett av förslagen till spel som följer på dessa aktiviteter ska eleverna ha var sitt kopieringsunderlag med en ritad talrad som illustrerar strukturen för tiotal. Två elever turas om att slå en tärning och ta det antal räknebrickor som tärningen visar. Eleverna täcker efter hand sina talrader med räknebrickor. Den som först täcker hela sin talrad vinner.

Spelare A: ●●●●●●●●●● ●●●●●○○○○○ ○○○○○○○○○○

Spelare B: ●●●●●●●●●● ●●●●●●●●●● ●●○○○○○○○○○

Ovan har spelare A kommit till talet 15 och spelare B till talet 22. Eleverna uppmuntras att:

- utnyttja tiotalstrukturen när de undan för undan benämner de aktuella talen
- jämföra storleken på sina egna tal med motspelarens
- uppmärksamma hur nära eller långt det är till närmsta hela tiotal.

I en tidigare kunskapsöversikt (Sternér & Lundberg, 2002) har vi gett förslag på en liknande aktivitet men där kulraden är ordnad i sekvenser om fem svarta och fem vita kulor för att lyfta fram den halvdecimala strukturen i positionssystemet med basen tio. Talen 6, 7, 8 och 9 kan då lättare uppfattas som fem plus något och talet tio som fem plus fem. En uppgift som till exempel $17 + 8$ kan ses som $17 + 3 + 5$.



Butterworth och Yeo förslår att undervisningen fortsätter med en långsam progression och med en tydligt strukturerad sekvens av aktiviteter. Syftet med arbetet med tallinjen är bland annat att lyfta fram talsystemets idé om platsvärde och gruppering och att jämföra tals storleksförhållanden. Ett annat syfte med aktiviteterna är att eleverna med gott självförtroende ska kunna göra kopplingar mellan mängder, symboluttryck för tal och antal samt den spatiala utbredningen av tal på tallinjen.

Kartläggning, analys och åtgärder – några nyare diagnostiska material

MIO – Matematikken – individen – omgivningen

MIO (Skaar Davidsson mfl, 2008) är ett material för observation av matematikutvecklingen hos barn i åldrarna 2–5 år. Det är forskningsbaserat och framtaget i samarbete mellan Forum for matematikk mestring i Sørlandet kompetansesenter samt Senter for atferdsforskning vid universitetet i Stavanger. Utprövning har skett bland 1000 barn med en geografisk spridning över hela Norge och har genomförts i samarbete med verksamma förskollärare. Materialet består av en handbok samt ett observationsschema. Handboken ger vägledning om vad som ska observeras och den ger kortfattade exempel på hur barnens utveckling kan följas upp. Materialet behandlar sex matematiska områden kopplat till den norska läroplanen: *matematikspråk; antal; tal, talrad, räkna; resonemang; form och position* samt *mönster och ordning*.

Diamant

Diamant (Skolverket, 2008d) är en diagnosbank i matematik som är publicerat på Skolverkets webbplats (www.skolverket.se). Det består av 55 diagnoser avsedda för, i första hand, grundskolans tidigare år. Tanken är att diagnoserna ska användas av lärare för att kartlägga hur långt eleverna kommit i sin matematikutveckling. Syftet är i huvudsak formativt på så sätt att diagnoserna ska ge underlag för individualisering och planering av undervisning som skapar goda förutsättningar för eleven att nå uppställda kunskapsmål. Det kan därmed bli möjligt att förebygga svårigheter som eleven annars kan hamna i beroende på bristande förkunskaper eller färdigheter. Materialet bygger på forskning och beprövad erfarenhet och har på uppdrag av Skolverket tagits fram vid Göteborgs universitet.

Arbetet med att ta fram diagnoserna har skett i flera faser. Kursplanens mål har brutits ner i delmål och en noggrann didaktisk analys av vilka förkunskaper som krävs för att behärska en viss färdighet har genomförts. Ett stort antal kriterieuppgifter som svarade mot de olika delmålen har konstruerats och därefter har materialet prövats ut och reviderats i flera omgångar. Utprövning gällde lärarhandledning, elevuppgifter, lärarnas uppfattningar om materialets allmänna uppläggning, didaktiska kommentarer, instruktioner, uppföljningsanvisningar.

Förstå och använda tal – en handbok

McIntosh (2008) har i samarbete med Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) och Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (NSMO) och med stöd från Myndigheten för skolutveckling (MSU) utvecklat ett material, *Förstå och använda tal – en handbok*, som vänder sig till lärare i förskoleklass, i grundskolans samtliga årskurser och i gymnasieskolans A-kurs i matematik. Materialet består av en handbok med tillhörande test på 10 nivåer. Innehållet bygger bl a på ett longitudinellt forskningsprojekt med tillhörande utvecklingsarbeten för undervisning och undervisningsmaterial (McIntosh & Dole, 2004).

I forskningsprojektet kartlades kritiska punkter inom området tal och räkning samt svårigheter och missuppfattningar kring olika begrepp, procedurer och räknestrategier som var vanliga bland elever. Handledningen utgår från undervisning i och om tal och räkning ur ett taluppfattningsperspektiv. Målet för undervisningen är att utveckla förtrogenhet med tal hos alla elever inom ramen för mål och riktlinjer i grundskolans läroplan och kursplan i matematik. De flesta elever förvärvar missuppfattningar under skoltiden och i många fall är dessa små och tillfälliga, men för en del elever kan de bli djupt rotade. Syftet med handboken är att tillhandahålla hjälp för lärare i grundskolan att kartlägga, analysera och åtgärda svårigheter och missuppfattningar med hjälp av översiktstest för klass/elevgrupp och underlag för uppföljande samtal med enskilda elever. Till varje delområde finns konkreta förslag på undervisningsaktiviteter. Med handboken följer också ett utvecklingsschema "kunskapsutvecklingen i området tal och räkning – kritiska punkter för förståelse och färdigheter".

Sammanfattning – undervisning av elever med räkneshvårigheter

Avsnittet om undervisning handlar om hur evidensbaserade och väl beprövade pedagogiska insatser i förskola och skola kan göra barns möten med matematiken meningsfyllda, intressanta och lustfyllda. Aktuell forskning visar att det är angeläget att tidigt, dvs redan i förskolan, uppmärksamma och hjälpa barn som av olika skäl riskerar att utveckla räkneshvårigheter.

Specialpedagogiska insatser i förskola och skola bör göras på organisations-, grupp- och individnivå. Speciallärares, specialpedagogers och lärares kompetenser är mycket betydelsefulla liksom ett nära samarbete med föräldrar och elever samt mellan klassundervisning och specialundervisning. Explicit undervisning med tydliga instruktioner från läraren, utforskande aktiviteter där eleverna får sätta ord på sina handlingar, använda olika uttrycksformer och delta i matematiska samtal förordas både från forskning och från praktik. Nyligen publicerade

studier från England visar på mycket goda resultat av klassundervisningen kombinerad med en-till-en-undervisning för elever med räknsvårigheter, särskilt när det gäller grundskolans yngre elever.

Den mentala tallinjen är en kritisk faktor när det gäller bristfälligt utvecklade talbegrepp och bör särskilt uppmärksammas hos barn med räknsvårigheter. Eftersom forskning indikerar att det generellt ges för lite undervisning kopplad till tallinjen kan detta vara ett område som matematiklärare i grundskolan bör utveckla. Erfarenheter visar på goda effekter av att redan i förskolan uppmuntra barn att spela lineära räknspel och att ge dem möjlighet att resonera om tals storleksförhållanden.

Enligt Griffins modell (2007) handlar tidig taluppfattning bl.a. om barns förmåga att förstå och operera med kvantiteter och att konstruera ett rikt nätverk av relationer mellan tre matematiska "världar", nämligen världen av verkliga kvantiteter, världen av räkneord och världen av formella symboler. Den *centrala begreppsliga strukturen* för hela tal är en struktur som hjälper barnet att tolka den kvantitativa världen på mer och mer sofistikerade sätt, att tillägna sig nya matematiska kunskaper och förmågor och att lösa ett brett spektrum av problem.

Begränsningar i arbetsminnets kapacitet kan leda till många kritiska situationer uppstår i elevernas skolarbete vilket i sin tur kan bidra till uppgivenhet och låg tilltro till den egna förmågan. Det är därför viktigt att organisera undervisningen och anpassa aktiviteter, uppgifter, instruktioner, hemläxor etc till elevernas förutsättningar och behov. Även elever som har god arbetsminneskapacitet kan i stressrelaterade situationer prestera sämre än förväntat på uppgifter som ställer krav på verbala arbetsminnet.

En viktig uppgift för skolan är att ge explicit undervisning i att lösa textuppgifter i matematik. Interventionsstudier om elevers mottaglighet för undervisning på klass- och gruppnivå visar på goda resultat när undervisningen i klassen kombineras med specialpedagogiska insatser.

Vi har gett exempel på material där målgruppen uttalat är lärare som undervisar elever med dyskalkyli. Dyskalkyli är enligt författarna (Butterworth & Yeo, 2004) en funktionsnedsättning som ställer mycket höga krav på undervisningen. I huvudsak förordas en- till- en- undervisning, men det ges också exempel på spel och andra aktiviteter som bygger på kommunikation och samspel i mindre grupper och som har visat sig gynnsamma för utvecklingen av taluppfattning. Vi har också gett exempel på material framtagna för förskola och grundskola i syfte att vara ett stöd för lärare att kontinuerligt kartlägga och analysera barns och elevers matematikutveckling för att kunna anpassa verksamheten efter vars och ens förutsättningar och behov.

Några avslutande kommentarer

Vi har i denna översikt dels presenterat aktuell forskning om räkneshårigheter under de första skolåren och dels gett ett antal exempel på utprövad och fungerande matematikundervisning både som förebyggande verksamhet och som direkt stöd för elever som har svårt att nå de mest grundläggande målen för matematikundervisningen. En del principiella frågor har också väckts såsom problem med definition av begreppet dyskalkyli och ärftlighetens betydelse vid räkneshårigheter.

Något som särskilt tydligt kommit fram i arbetet med forskningsöversikten är att den neurobiologiska forskningen på allvar är på väg att göra inbrytningar i pedagogikens domäner. Hjärnforskningen har med hjälp av nya tekniker kunnat klarlägga mycket av den neurobiologiska grunden för inläring, minne, språk, matematisk problemlösning och andra kognitiva processer. Man har också demonstrerat betydelsen av emotion eller känsla för lärande, "I feel, therefore I learn", och att lärare kan leva sig in i elevernas villkor.

I vår rastlösa tid ställer barnen allt större krav på omväxling, förnöjelse och häftiga upplevelser. Allt fler barn tycks ha svårigheter att koncentrera sig, sitta stilla, vara ihärdigt fokuserade eller orienterade mot uppgiften i skolan. Denna bristfälliga uppgiftsorientering kan alltså delvis förstås som ett kulturellt fenomen. Men det finns också neurobiologiska och genetiska aspekter som är utforskade på senare år och som pedagogiken bör känna till.

Hjärnforskningens framsteg har hos somliga lett till stor entusiasm inför möjligheterna att skapa en bro mellan neurovetenskap och pedagogik. Hoppet har tänts om att neurovetenskapen ska ge vägledning för hur lärare ska undervisa och för hur de pedagogiska miljöerna ska arrangeras så att man får till stånd de rätta biokemiska förändringarna i hjärnan för optimalt inlärningsresultat – pedagogiken skulle äntligen få en solid vetenskaplig bas.

Ett uttryck för denna optimistiska entusiasm är etablerandet av *The international society for mind, brain and education* (www.imbes.org/) med dess tidskrift *Mind, Brain and Education*. I Sverige finansierade för något år sedan Wallenbergstiftelsen i samarbete med Riksbankens Jubileumsfond och Vetenskapsrådet stora forskningsstöd till projekt som kunde visa att det gick att överbrygga klyftan mellan neurovetenskap och pedagogik. Ett liknande initiativ har tagits av Kempestiftelserna i Umeå där matematikdidaktiker, psykologer och hjärnforskare har fått stöd för ett gemensamt projekt om matematikinläring. Frågan är dock om denna entusiasm inför hjärnforskningens möjligheter inom pedagogiken är välgrundad.

Det kan sannolikt komma någonting positivt ut av dessa satsningar. Ett exempel i denna översikt är kartläggningen av IPS (intraparietala sulcus) och dess funktioner, viktiga för utvecklingen av ett talbegrepp. Vi har också sett hur man

med hjärnabbildningsmetodik kunnat påvisa typiska signaturer i hjärnans aktivitetsmönster hos barn med räknsvårigheter. Uppenbarligen är barns lärande i matematik något som måste utforskas utifrån många perspektiv. Utöver pedagogik och didaktik måste vi ta vara på bidrag från kognitiv psykologi, utvecklingspsykologi, antropologi, neurovetenskap och genetik.

Det kan emellertid knappast vara så att kunskap om vilka hjärnregioner som är involverade vid tex aritmetiska operationer eller vilka baspar i den genetiska koden som avviker, kommer att kunna ge oss vägledning för hur vi ska planera nästa veckas matematikundervisning. Sådana glapp mellan grundforskning och praktik känner vi väl från andra områden. Det är naturligtvis ingen som tror att en läkares kunskap i molekylärbiologi ger henne/honom direkt information om hur man ska bära sig åt i en praktisk vårdssituation. Men i medicinen finner vi ofta ett mycket konstruktivt samspel mellan klinisk praktik och grundforskning just därför att läkaren har en god insikt om basala funktioner. Ett liknande samspel i skolans värld förutsätter att lärare har kunskap om forskning relevant för undervisning, och att forskare är väl informerade om skolans villkor. Undervisningens centrala position i vårt samhälle pekar på att en sådan fruktbar växelverkan kan vara på väg.

Samtidigt som neurovetenskapen gör stora framsteg och som dess relevans för pedagogiken blir alltmer uppenbar finns i kölvattnet av denna utveckling en olycklig kommersialisering, särskilt i USA. Men den är säkert på stark frammarsch även här. Med hänvisning till hjärnforskning lanseras en mängd "neuro-myter" i vilka patentmetoder är inpackade. Det kan röra sig om ogrundade föreställningar om hjärnhalvor eller inlärningsstilar, men också om datorprogram som utger sig för att ha en neurovetenskaplig grund och som utlovar effektiva kurer för inlärningsproblem. En bättre lärarutbildning i neurovetenskap, forskningsmetodik och utvärdering av interventionsprogram borde kunna ge lärare nödvändigt kritiskt sinne. Vi ser denna forskningsöversikt med både ett grundforskningsperspektiv och en redovisning av evidensbaserad praktik som ett bidrag till en sådan utbildning. I bästa fall kan den ge en fördjupad och vetenskapligt grundad förståelse av den viktiga frågan varför somliga barn har särskilt svårt att lära sig förstå och använda tal och hur vi kan utveckla undervisningen för att möta dessa elevers skilda behov.

Referenser

- Alarcon, M., DeFries, J.C., Light, J.G. & Pennington, B.F. (1997). A twin study of mathematical disability. *Journal of Learning Disabilities*, 30(6), 617–623.
- Andersson, U. (2008). Mathematical competencies in children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 100(1), 48–66.
- Andersson, U. & Lyxell, B. (2007). Working memory deficit in children with mathematical difficulties: a general or specific deficit? *Journal of Experimental Child Psychology*, 96(3), 197–228.
- Ashkenazi, S., Henik, A., Ifergane, G. & Shelef, I. (2008). Basic numerical processing in left intraparietal sulcus (IPS) acalculia. *Cortex*, 44(4), 439–448.
- Aster, M.G. von. (2000). Developmental cognitive neuropsychology of number processing and calculation: varieties of developmental dyscalculia. *European Child and Adolescent Psychiatry*, 9 Suppl, 41–57.
- Aster, M.G. von & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 49(11), 868–873.
- Aunio, P., Hautamäki, J., Sajaniemi, N. & Van Luit, J. E. H. (2009). Early numeracy in low-performing young children. *British Educational Research Journal*, 35(1), 25–46.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M. K. & Nurmi, J. E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96, 699–713.
- Auerbach, J. G., Gross-Tsur, V. M., Manor, O. & Shalev, R. (2008). Emotional and behavioural characteristics over a six-year period in youths with persistent and nonpersistent dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, 41(3), 263–273.
- Bachot, J., Gevers, W., Fias, W. & Roeyers, H. (2005). Number sense in children with visuospatial disabilities: orientation of the mental number line. *Psychological Science*, 47(1), 172–184.
- Baddeley, A. (2007). *Working memory, thought, and action*. Oxford University Press.
- Barrouillet, P., Fayol, M. & Lathulière, E. (1997). Selecting between competitors in multiplication tasks: An explanation of the errors produced by adolescents with learning disability. *International Journal of Behavioral Development*, 21, 253–275.
- Barrouillet, P. & Fayol, M. (1998). From algorithmic computing to direct retrieval: evidence from number and alphabetic arithmetic in children and adults. *Memory and Cognition*, 26(2), 355–368.
- Beilock, S. L. (2008). Math performance in stressful situations. *Psychological Science*, 17(5), 339–343.

- Berch, D.B., Foley, E.J., Hill, R.J. & Ryan, P.M. (1999). Extracting parity and magnitude from Arabic numerals: developmental changes in number processing and mental representation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(4), 286–308.
- Booth, J. L. & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41(6), 189–201.
- Bull, R. & Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematical ability: inhibition, switching and working memory. *Developmental Neuropsychology*, 19(3), 273–293.
- Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: MacMillan
- Butterworth, B. (2003). *Dyscalculia screener*. London: nferNelson.
- Butterworth, B. & Yeo, D. (2004). *Dyscalculia guidance: helping pupils with specific difficulties in maths*. London: nferNelson.
- Chinn, S. J. (2009). Mathematics anxiety in secondary students in England. *Dyslexia. An International Journal of Research and Practice*, 15, 61–68.
- Chinn, S.J. & Ashcroft, J.R. (2007). *Mathematics for dyslexics including dyscalculia*. Chichester: Wiley.
- Clements, D.H. & Samara, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: summative research on the "Building blocks" projects. *Journal of Research in Mathematics Education*, 38(2), 136.
- Cohen Kadosh, R., Cohen Kadosh, K., Schuhmann, T., Kaas, A., Goebel, R., Henik, A. & Sack, A.T. (2007). Virtual dyscalculia induced by parietal-lobe TMS impairs automatic magnitude processing. *Current Biology*, 17(8), 689–693.
- Council of Chief State School Officers (CCSSO) 2008. *Report and recommendations for education policy leaders from the Pearson foundation/ CCSSO International conference on science and mathematics education*. Tillgänglig 2009-01-14 på www.pearsonfoundation.org/PDF/PF-CCSSO_Report.pdf
- Conway, A.R.A., Moore, A.B. & Kane, M.J. (2009). Recent trends in the cognitive neuroscience of working memory. *Cortex*, 45(2), 262–268.
- Cross, C. T., Woods, T. A. & Schweingruber, H. (2009). Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity. I *Committee on early childhood mathematics; National research council* (red). Washington DC: The National Academic Press.
- Cunha, F., Heckman, J. J. Lochner, L. & Masterov D. V. (2006). I Commission of the European Communities (2006). *Communication from the commission to the council and to the European parliament. Efficiency and equity in european education and training systems*. Bryssel: European commission. Tillgänglig 2009-01-15 på ec.europa.eu/education/policies/2010/doc/comm481_en.pdf.

- Daar, M. & Pratt, J. (2008). Digits affect actions: the SNARC effect and response selection. *Cortex*, 44(4), 400–405.
- DCSF, Department for children, schools and families (2008). *Evaluation of the making good progress pilot: interim report*. London: Pricewaterhouse Coopers LLP.
- Dehaene, S. (2007). A few steps towards a science of mental life. *Mind, Brain, and Education*, 1(1), 28–47.
- Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E. & Pica, P. (2008). Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in western and Amazonian indigene cultures. *Science*: Vol. 320. No. 5880, 1217–1220.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. & Cohen, L. (2003) Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487–506.
- Dirks, E., Spyer, G., van Lieshout, E.C.D.M. & de Sonneville, L. (2008). Prevalence of combined reading and arithmetic disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 41(5), 460–473.
- Doverborg, E. & Emanuelsson, G. (red) (2006). *Så små barns matematik*. NCM, Göteborgs universitet.
- Dowker, A. D. (2001). Numeracy recovery: a pilot scheme for early intervention with young children with numeracy difficulties. *Support for Learning*, 16(1), 6–10.
- Dowker, A. D. (2005). *Individual differences in arithmetic: implications for psychology neuroscience and education*. Hove: Psychology Press.
- Duncan, G.J., Claessens, A., Huston, A.C., Pagani, L.S. mfl (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43, 1428–1446.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red) (1991a). *Tal och räkning I*. Lund: Studentlitteratur.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red) (1991b). *Tal och räkning II*. Lund: Studentlitteratur.
- European Union. European Commission (2006). *Communication from the commission to the council and to the European parliament: Efficiency and equity in European education and training systems*. Luxembourg: EUR-OP. Tillgänglig 2008-11-24 på http://ec.europa.eu/education/policies/2010/doc/comm481_en.pdf.
- Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, 8(7), 307–314.
- Fosnot, C. T. (2007). *Investigating number sense, addition, and subtraction. Grades K–3 Mathematics contexts for learning*. Portsmouth: Firsthand Heinemann.
- Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulesen, K., Bryant, J. D. & Hamlett, L. (2005). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology*, 97, 491–513.

- Fuchs, L. S., Fuchs, D. & Hollenbeck, N. K. (2007). Extending responsiveness to intervention to mathematics at first and third grades. *Learning Disabilities Research and Practice*, 22 (1), 13–24.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Craddick, C., Hollenbeck, K. N. & Hamlett, C. L. (2008). Effects of small-group tutoring with and without validated classroom instruction on at-risk students' math problem solving: are two tiers of prevention better than one? *Journal of Educational Psychology*, 100(3), 491–509.
- Gathercole, S.E. & Alloway, T.P. (2006). Practitioner review: short-term and working memory impairments in neurodevelopmental disorders: diagnosis and remedial support. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 47(1), 4–15.
- Gathercole, S. E. & Alloway, T. P. (2008). *Working memory and learning: a practical guide for teachers*. London: SAGE Publication.
- Geary, D.C. (1993). Mathematical disabilities: cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114(2), 345–362.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L. & Byrd-Craven, J., Nugent, L. & Numtee C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, 78, 1343–1359.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L. & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental Neuropsychology*, 33 (3), 277–299.
- Geary, D.C., Baily, D. H. & Hoard, M. K. (2009). Predicting mathematical achievement and mathematical learning disability with a simple screening tool: The number sets test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27(3), 265–279.
- Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.
- Gersten, R., Chard, D.J., Baker, S., Jayanthi, M., Flojo, J., & Lee, D. (2008). *Teaching mathematics to students with learning disabilities: A synthesis of the intervention research*. Manuskript under arbete. Tillgänglig 2009-01-15 på rse.sagepub.com/cgi/content/refs/29/1/33.
- Gevers, W., Lammertyn, J., Notebaert, W., Verguts, T. & Fias, W. (2006). Automatic response activation of implicit spatial information: Evidence from the SNARC effect. *Acta Psychologica*, 122(3), 221–233.
- Giaquinto, M. (2001). What cognitive systems underlie arithmetical abilities? *Mind and Language*, 16(1), 56–68.
- Gracia-Baffaluy, M. & Noël, M.P. (2008). Does finger training increase young children's numerical performance? *Cortex*, 44(4), 368–375.
- Greenes, C., Ginsburg, H. & Balfanz, R. (2004). Big math for little kids. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 159–166.

- Griffin, S. (2004). Number worlds: A research-based mathematics program for young children. I Douglas H. Clements & Julie Sarama (red), *Engaging young children in mathematics*. London: Lawrence Erlbaum.
- Griffin, S. (2007). Early intervention for children at risk of developing mathematical learning disabilities. I Daniel. B. Berch & Michèle M. M. Mazzocco (red), *Why is math so hard for some children?* Baltimore: Paul H. Brookes Publishing.
- Halberda, J., Mazzocco, M.M.M. & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*. Tillgänglig 2009-06-25 på www.nature.com/nature/journal/v455/n7213/full/nature07246.html
- Hannula, M. & Lehtinen, E. (2005). Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children. *Learning and Instruction*, 15, 237–256.
- Johansson, B. (1982/83). Problem med problemlösning. *Nämnamnaren* 9 (3), 10–13.
- Jordan, N.C. (2007). Do words count? Connections between mathematics and reading difficulties. I D.B. Berch & M.M. Mazzocco (red), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore: Paul H. Brookes.
- Jordan, N.C., Hanich, L. B. & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 74, 834–850.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Olah, L. N. & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development*, 77(1), 153–175.
- Kaufman, L. (2008). Dyscalculia: neuroscience and education. *Educational Research*, 50(2), 163–175.
- Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, 7(3), 165–171.
- Koumoula, A., Tsironi, V., Stamouli, V. Bardani, E., Siapati, S. mfl (2004). An epidemiological study of number processing and mental calculation in Greek school children. *Journal of Learning Disabilities*, 37(5), 377–388.
- Kovas, Y., Haworth, C.M.A., Petrill, S.A. & Plomin, R. (2007a). Mathematical ability of 10-year-old boys and girls. Genetic and environmental etiology of typical and low performance. *Journal of Learning Disabilities*, 40(6), 554–567.
- Kovas, Y., Petrill, S.A. & Plomin R. (2007b). The origins of diverse domains of mathematics: Generalist genes but specialist environments. *Journal of Educational Psychology*, 99(1), 128–139.

- Krajewski, K. & Schneider, W. (2008). *Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study*. Manuskript inskickat för publicering.
- Kucian, K., Loenneker, T., Dietrich, T., Martin, E. & von Aster, M.G. (2005). Development of neural networks for number processing: an fMRI study in children and adults. *Neuroimage*, 26, Suppl. 1: 46.
- Kucian, K., Loenneker, T., Dietrich T., Dosch, M. & Martin, M. m fl (2006). Impaired neural networks for approximate calculation in dyscalculic children: a functional MRI study. *Behaviour and Brain Function*, 2, 31–48.
- Lonnemann, J., Krininger, H., Knops, A. & Willmes, K. (2008). Spatial representations of numbers in children and their connection with calculation abilities. *Cortex*, 44(4), 420–428.
- Lundberg, I. (1984). *Språk och läsning*. Malmö: Liber.
- Lundberg, I. (1985). Longitudinal studies of reading and writing difficulties in Sweden. I G.E. McKinnon & T.G. Waller (red), *Reading research: Advances in theory and practice Vol. 4*, (s 65–105). New York: Academic Press.
- Lundberg, I. (2007). *Bornholmsmodellen – vägen till läsning. Språklekar i förskoleklass*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Lundberg, I. (2008). Om definition av inlärningssvårigheter. *Dyslexi*, 13(3). 23–25.
- Lundberg, I. & Herrlin, K. (2003). *God läsutveckling – kartläggning och övningar*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Lundberg, I. & Wolff, U. (2003). *DUVAN. Dyslexiscreening för unga och vuxna*. Stockholm: Psykologiförlaget.
- Lundberg, I. & Sterner (2006). *Räknesvårigheter och lässvårigheter under de första skolåren – hur hänger de ihop?* Stockholm: Natur och Kultur.
- Lundberg, I. & Kolovos, C. (2007). Inlärningsproblem och psykisk hälsa. *Dyslexi*, 12(3), 12–14.
- Mazzocco, M.M.M. & Myers, G.F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, 53, 218–253.
- McIntosh, A. J. & Dole, S. (2004). *Mental computation: A strategies approach*. Hobart: Department of education, Tasmania University.
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal – en handbok*. NCM, Göteborgs universitet.
- Melhuish, E. C., Sylva, K., Sammons, P., Siraj-Blatchford, I. & Taggart, B., m fl (2008). Preschool influences on mathematics achievement. *Science*, 321, 1161–1162.
- Milner, B. (1971). Interhemispheric differences in the localization of psychological processes in man. *British Medical Bulletin*, 27(3), 272–277.

- Minskoff, E. & Allsopp, D. (2003). *Academic success strategies for adolescents with learning disabilities & ADHD*. Baltimore: Paul Brookes
- Myrberg, M. (2007). *Dyslexi – en kunskapsöversikt*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Tillgänglig 2008-11-20 på standards.nctm.org
- Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Liber.
- Noël, M.P. (2005). Finger gnosis: A predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, 11(5), 413–430.
- Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning*. Tillgänglig 2009-07-28 på www.nuffieldfoundation.org/go/grants/education/page_683.html
- Opfer, J.E. & Siegler, R.S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, 55, 169–195.
- Organisation for economic co-operation and development (OECD) (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris: OECD.
- Passolunghi, M. C., Vercelloni, B. & Schadee, H (2007). The precursors of mathematics learning: Working memory, phonological ability and numerical competence. *Cognitive Development*, 22, 165–184.
- Paterson, S.J., Girelli, L., Butterworth, B. & Karmiloff-Smith, A. (2006). Are numerical impairments syndrome specific? Evidence from William's syndrome and Down's syndrome. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 47(2), 190–204.
- Plomin, R. & Kovas, Y. (2005). Generalist genes and learning disabilities. *Psychological Bulletin*, 131(4), 592–617.
- Ramani, G B. & Siegler R S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, 79(4), 375–394.
- Reikerås, E. K. L. (2006). Performance in solving arithmetic problems: a comparison of children with different levels of achievement in mathematics and reading. *European Journal of Special Needs Education*, 21(3), 233–250.
- Rivera, S.M., Reiss, A.L., Eckert, M.A. & Menon, V. (2005). Developmental changes in mental arithmetic: Evidence for increased functional specialization in the left inferior parietal cortex. *Cerebral Cortex*, 15(11), 1779–1790.
- Rusconi, E., Walsh, V. & Butterworth, B. (2005). Dexterity with numbers: rTMS over left angular gyrus disrupts finger gnosis and number processing. *Neuropsychological*, 43(11), 1609–1624.
- Schuchardt, K., Maehler, C. & Hasselhorn, M. (2008). Working memory deficits in children with specific learning disorders. *Journal of Learning Disabilities*, 41(6), 514–523.

- Seo, K. & Ginsburg, H. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research. I D. H. Clements & J. Sarama (red), *Engaging young children in mathematics Standards for early mathematics education* (s 91–104). Mahwah: Erlbaum.
- Shalev, R.S. (2004). Developmental dyscalculia. *Journal of Child Neurology*, 19(10), 765–771.
- Shalev, R.S., Manor, O., Kerem, B., Ayali, M. m fl (2001). Developmental dyscalculia is a familiar learning disability. *Journal of Learning Disabilities*, 34(1), 59–65.
- Siegler, R. S. & Booth, J. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75(2), 428–444.
- Siegler, R. S. (2008). There's nothing so practical as a good theory. I O. Barbaria, (red), *Handbook of developmental science and early education*. New York: Guilford Press
- Siegler, R. S. & Ramani, G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental Science*, 11(5), 655–661.
- Sjöberg, G. (2006). *Om det inte är dyskalkyli – vad är det då? En multimetodstudie av eleven i matematikproblem ur ett longitudinellt perspektiv* (Doktorsavhandling). Umeå universitet.
- Skaar Davidsen, H., Loge, I. K., Lunde, O., Reikerås, E. & Dalvang, T. (2008). *MIO, Matematikken – Individet – Omgivelsen. Håndbok og observasjonsark*. Oslo: Aschehoug.
- Skolverket, 1997. *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik*. Stockholm: Statens skolverk.
- Skolverket (2005). *Allmänna råd och kommentarer. Kvalitet i förskolan*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2008a). *Allmänna råd för arbete med åtgärdsprogram*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2008b). *Tio år efter förskolereformen, nationell utvärdering av förskolan*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2008c). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2008d). *Diamant, diagnoser i matematik*. Tillgänglig 2009-02-03 på www.skolverket.se.
- Socialstyrelsen (2008). *Definitioner*. Tillgänglig 2008-12-02 på www.socialstyrelsen.se/IMS/Definitioner/
- SOU 2004:97. *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

- Sousa, D. A. (2008). *How the brain learns mathematics?* Thousand Oaks: Corwin Press.
- Stanovich, K.E. (1986). Matthew effects in reading: Some consequences of individual differences in the acquisition of literacy. *Reading Research Quarterly*, 21, 360–407.
- Starkey, P., Klein, A. & Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 99–120.
- Sterner, G. & Lundberg, I. (2002). *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik*. NCM, Göteborgs universitet.
- Stigler, J.W., Lee, S. Y. & Stevenson, H. W. (1990). *Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Swanson, H.L. & Jerman, O. (2006). Math disabilities: A selective meta-analysis of the literature. *Review of Educational Research*, 76(2), 249–274.
- Swanson, H.L., Jerman, O. & Zheng, X. (2008). Growth in working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 100(2), 343–379.
- Torgesen, J. (2001). The Theory and practice of intervention: Comparing outcomes from prevention and remediation studies. I A. Fawcett (red), *Dyslexia – Theory and good practice* (s 185–202). London: Whurr publishers.
- Walle, J. Van de (2001). *Elementary and middle school mathematics, teaching developmentally*. New York: Longman.
- Wasik, B.A. & Slavin, R.E. (1993). Preventing early reading failure with one-to-one tutoring: A review of five programs. *Reading Research Quarterly*, 28(2), 179–200.
- Whyte, J.C. & Bull R. (2008). Number games, magnitude representation, and basic number skills in preschoolers. *Developmental Psychology* 44(2), 588–96.
- Willburger, E., Fussenegger, B., Moll, K., Wood, G. & Landerl, K. (2008). Naming speed in dyslexia and dyscalculia. *Learning and Individual Differences*, 18(2), 224–236.
- Wössmann, L. & Schütz, G. (2006). *Efficiency and equity in European education and training systems: analytical report for the European commission*. Bryssel: European commission. Tillgänglig 2008-11-11 på ec.europa.eu/education/policies/2010/doc/eenec.pdf.
- Xin, Y. P., Jitendra, A. K. & Deatline-Buchman, A. (2005). Effects of mathematical word problem-solving instruction on middle school students with learning problems. *The journal of Special Education*, 39(3), 181–192.