Wiggo Kilborn

Om tal i bråk- och decimalform – en röd tråd

NCM

Tal i bråk- och decimalform

– en röd tråd

Wiggo Kilborn

Nationellt centrum för matematikutbildning
Göteborgs universitet

2014

Tal i bråk- och decimalform

– en röd tråd

Materialet består av sju kapitel som omfattar bråkräkning i ett 1 till 9-perspektiv. Avsikten med materialet är att ge lärare möjlighet att skapa en kontinuitet i elevernas inlärning genom att ge en helhetsbild av bråkets roll i skolan ur ett undervisnings- och inlärningsperspektiv.

Det är naturligtvis möjligt att på egen hand läsa igenom texten och nöja sig med det. Men för att få ut mesta möjliga av materialet rekommenderar vi att man som lärargrupp arbetar gemensamt med materialet på ungefär samma sätt som man gör i Matematiklyftet. Detta innebär att gruppen kan ta sig an varje kapitel på det sätt som beskrivs nedan. För att materialet ska fungera som tänkt bör man även genomföra Skolverkets Diamantdiagnoser om bråk som är lämpliga för respektive årskurs.

Individuell läsning av text

Kom överens om vilken del av texten i materialet som ska läsas inför den gemensamma diskussionen. Var och en läser sedan texten vid lämpligt tillfälle.

Kollegialt arbete

Diskussion

Diskutera den lästa texten i lärargruppen. Följande typ av frågor kan tjäna som underlag för diskussion.

- Diskutera resultaten i det här avsnittet i relation till motsvarande resultat på er egen skola. Vad har era elever redan förstått och vilka missuppfattningar är vanliga? Hur kan man undervisa så att man undviker att dessa missuppfattningar uppstår?
- Hur behandlar ert läromedel de aspekter av bråk som beskrivs i kapitlet? Beskrivs vanliga missuppfattningar som elever kan ha?

Utöver dessa mer generella diskussionspunkter som kan användas i alla kapitel, finns även mer specifika punkter efter varje kapitel.

Att planera

Gör en preliminär plan som omfattar när och hur de aspekter av bråk som beskrivs i kapitlet ska tas upp i undervisningen. Ta också med tankar kring hur man kan undervisa om detta innehåll och eventuellt lämpliga aktiviteter.

När alla de sju avsnitten är genomgångna ställs de preliminära planerna samman till en komplett plan.

Lektionsplanering

Välj ut någon typ av bråkproblem ur kapitlet som era diagnoser (se Del 1, nästa sida) visat att era elever klarar mindre bra. Diskutera och planera en eller flera lektioner/aktiviteter enligt idéerna i det här avsnittet. En eller flera kollegor genomför lektionen, om möjligt kan kollegor auskultera under lektionen. Utvärdera och diskutera sedan såväl undervisning som resultat. Om resultatet inte är tillräckligt bra, modifiera planeringen och genomför lektionen i en annan klass.

Innehållet i de olika delarna ser ut så här:

Del 1. Bråkräkning ur ett 1 till 9-perspektiv

Här ges en bakgrund till materialet utgående från syfte och centralt innehåll i kursplanen för matematik i Lgr 11. Dessutom presenteras resultaten av en omfattande utvärdering av elevers kunskaper om bråk. Mot denna bakgrund rekommenderas deltagande lärare att själva ge en eller flera diagnoser för att bilda sig uppfattning om de egna elevernas kunskaper om bråk i olika årskurser. Resultaten av dessa diagnoser kan senare användas som underlag för det fortsatta arbetet.

Del 2. Bråk som del av en hel och som del av ett antal

För att uppfatta bråkens innebörd måste man kunna urskilja olika aspekter av bråkbegreppet. Detta förutsätter en variation i undervisningen som lyfter fram olika aspekter och olika tillämpningar av bråk och räkning med bråk. För yngre elever bör detta utgå från ett laborativt arbetsätt och lämpliga konkretiseringar.

Del 3. Del av ett antal samt bråket som tal

Bråket har många ”ansikten”. I den här delen utvecklas bråket som en del av en hel, till bråket som del av ett antal och som ett tal. Det sker även en koppling mellan tal i bråkform och tal i decimalform. Det här är centrala aspekter som även spelar stor roll för elevernas uppfattning av begreppet andel och procent.

Del 4. Addition och subtraktion av tal i bråkform

För att kunna jämföra, addera och subtrahera tal i bråkform måste man kunna skriva om talen så att de får en gemensam nämnare. Detta bör konkretseras på ett sådant sätt, att eleverna uppfattar innebörden av förlängning och förkortning, något som senare blir en central förkunskap när eleverna ska arbeta med algebra.

Del 5. Multiplikation och division av tal i bråkform

För eleverna har multiplikation från början presenterats som en upprepad addition. Det är denna uppfattning som, tillsammans med de grundläggande räknelagarna, bör tas som utgångspunkt för att förklara multiplikation och division med och av tal i bråkform. De två strategierna för division: delningsdivision och innehållsdivision är andra centrala utgångspunkter.

Del 6. Sambandet mellan tal i bråk- och decimalform

Varje tal i bråkform kan skrivas som ett decimaltal eller som en periodisk decimalutveckling och omvänt. Detta skiljer de rationella talen från de irrationella talen. Även matematikens historia har en del att berätta om bråken och dess roll i samhället.

Del 7. Bråk som förkunskap till algebra

Vid operationer med tal i bråkform krävs en del strategier som inte krävs när man opererar med naturliga tal. Detta kan tillfälligtvis undvikas genom att man utför operationerna på en miniräknare eller i decimalform. Detta fungerar emellertid inte när man kommer till motsvarande operationer inom algebran. Bråkräkning utgör en konkretisering av centrala delar av algebran, vilket står i fokus i den här delen.

Detta material togs ursprungligen fram som det matematiska innehållet i Matematiklyftets moduler som behandlar tal och tals användning. NCM har beslutat återpublicera materialet som en enhet för att det ska komma fler till del.

Bråk i ett 1 till 9-perspektiv

1

Syfte: Att ge en bakgrund till arbetet med de övriga avsnitten och samtidigt ge en överblick och skapa en gemensam syn på arbetet med rationella tal.

Förberedelser: Varje deltagare bör i förväg ha läst den text i Skolverkets Diamantdiagnoser som handlar om rationella tal samt gett de Diamantdiagnoser om bråk som är lämpliga för respektive årskurs. Resultatet bör sammanställas på Skolverkets resultatblanketter. De diagnoser som rekommenderas har beteckningar RB och RD i de nya Diamantdiagnoserna. Alla bör även i förväg ha läst igenom följande text.

Undervisningen om bråk har av tradition varit mycket formell och påverkad av algebraiska formler och regler. Arbetet med bråk har av det skälet ofta uppfattats som svårt och därför, under senare år, tonats ner i undervisningen, inte minst under de tidigare skolåren. Enligt det centrala innehållet i Lgr 11, ska det emellertid ske en förändring av detta och en hel del undervisning om bråk ska nu ske redan i årskurserna 1–3. Med tanke på att undervisningen av yngre elever brukar kräva en hög grad av konkretisering, kräver detta en annorlunda syn på bråk och operationer med bråk än den traditionella. Det är en sådan syn som presenteras i den här texten.

För att ge ett bra resultat bör en kompetensutveckling ta sin utgångspunkt i skolans praktik, alltså bygga på kunskaper om eventuella brister i undervisningen och aktuella behov av förändring. Detta bör i sin tur relateras till kursplanens krav och till de möjligheter som didaktisk forskning och utvecklingsarbete kan erbjuda. Här görs därför en tolkning av kursplanens syfte och centrala innehåll. Detta jämförs i sin tur med resultaten från en större utvärdering av svenska elevers kunskaper om bråk i årskurserna 6 och 8.

Bråken enligt kursplanen och i skolan

I kursplanens syfte kan man läsa:

> *Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder och dess användbarhet.*

Ett sådant grundläggande begrepp är bråkbegreppet. I en del läromedel har man emellertid på senare år tonat ner bråkens betydelse och fokuserat på de rationella talens decimalform. Tanken med detta är troligen att man vill tillrättalägga och förenkla undervisningen för de lägre presterande eleverna. Genom att översätta additioner som $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ till 0,67 + 0,25 = 0,92 (t ex med hjälp av en miniräknare) har man fått ett bra närmevärde till additionen och man har sluppit förklara ”krångliga” regler för bråkräkning. Men det är just detta som är problemet. På det här sättet har man nämligen missat möjligheten att ge eleverna *förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder.* Kortsiktiga lösningar av det här slaget döljer ofta akuta problem för stunden, men leder så gott som alltid till stora problem för eleverna längre fram.

Vi läser vidare i kursplanen:

> *Undervisningen i matematik ska syfta till att eleverna utvecklar kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden.*

Ett annat viktigt syfte, som inte nämns i texten, är att skapa förutsättningar för att eleverna ska lära sig mera matematik och kunna generalisera sina kunskaper på ett sådant sätt, att eleverna kan följa undervisningen även på gymnasieskolan. Just inom bråkräkningen blir det uppenbart att bristande kontinuitet mellan bråkräkning och grundläggande algebra leder till stora svårigheter när eleverna kommer till gymnasieskolan.

Didaktiska analyser av grundskolans och gymnasieskolans syfte och centrala innehåll visar att bråkbegreppet och räkning med bråk spelar en central roll i undervisningen. Det bör samtidigt observeras att decimalformen bara är ett alternativt skrivsätt för att skriva vissa typer av tal i bråkform. Viktiga räkneregler för decimaltal är därför svåra att förstå om man inte känner till motsvarande regler för räkning med tal i bråkform. Omvänt är det så att de regler som brukar användas för räkning med decimaltal inte låter sig generaliseras varken till bråkräkning eller till algebra. På motsvarande sätt är begreppet *andel* överordnat begreppet *procent*, som i sin tur enbart är en alternativ metod att beskriva vissa andelar i form av hundradelar.

Du bör som lärare också vara medveten om att bråken dyker upp i en rad andra sammanhang i skolans matematik, såsom i formler, som termer i och lösningar till ekvationer och ekvationssystem och inte minst som förkunskap till algebran. Det här innebär att elever som inte har lärt sig att arbeta med tal i bråkform på grundskolan, riskerar att få svårigheter med att följa undervisningen på gymnasieskolan. Att undvika bråk och prioritera decimalform löser i själva verket inte några problem, inte ens för de lägre presterande eleverna. Det skapar istället problem för alla elever. Det här blir inte alltid synligt i grundskolan, men blir desto tydligare när eleverna kommer till gymnasieskolan. Här har du, som lärare på grundskolan, ett stort ansvar.

Bråk och centralt innehåll

Enligt kursplanens centrala innehåll ska eleverna i årskurs 1–3 arbeta med

> *Del av helhet och del av antal. Hur delarna kan benämnas och uttryckas som enkla bråk, samt hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal.*

I årskurs 4–6 ska de arbeta med

> *Rationella tal och deras egenskaper*
> *Positionssystemet för tal i decimalform*
> *Tal i procentform och deras samband med tal i bråk- och decimalform*
> *Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer.*

I årskurs 7–9 ska de arbeta med

> *Talsystemets utveckling från naturliga tal till reella tal*
> *Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning, samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik.*
> *Strategier för att tolka, skapa och använda algebraiska uttryck, formler och ekvationer.*
> …

Såväl uppnåendemålen i Lpo 94 som det centrala innehållet i Lgr 11 är skrivna på ett sätt som ger stor frihet för individuell tolkning. Detta ställer i sin tur stora krav på skolans pedagogiska planering och på en genomtänkt struktur och kontinuitet i planeringen. Det är därför nödvändigt att lärare som undervisar i årskurserna 1–3 är väl medvetna om hur målen ser ut i årskurserna 7–9 och omvänt. I annat fall riskerar eleverna att få en fragmentarisk bild av ämnet matematik och därmed inte tillägnar sig de förmågor och det förhållningssätt till ämnet som beskrivs i kursplanens syfte.

De rationella talens roll i matematiken

De rationella talen, uttryckta som bråk, kan inte behandlas isolerat från övriga delar av matematiken. Detta är viktigt att hålla i minnet när eleverna under de första skolåren lär sig ett antal räknelagar och räkneregler för de naturliga talen. Det är därför angeläget att du som lärare redan från början lyfter fram värdet av räknelagar och räkneregler, eftersom det, med några få tillägg, är samma räknelagar och räkneregler som gäller vid arbete med de rationella talen. De nya räkneregler som tillkommer utgör i sin tur centrala förkunskaper för arbete med såväl irrationella tal som med algebra. För elever som på ett tidigt stadium lär sig se grundläggande strukturer i matematiken, blir matematiken inte ett antal lösryckta formler utan en sammanhängande helhet. Detta underlättar det för eleverna att förstå matematikens natur, vilket blir allt viktigare under grundskolans senare årskurser.

Det är också angeläget att man i planeringen tar hänsyn till bråkens centrala roll inom andra områden av skolmatematiken, såsom att förstå och arbeta med procentbegreppet, konstruera cirkeldiagram, arbeta med skala och proportionalitet mm. Genom en bra planering kan du således såväl skapa en god kontinuitet i elevernas inlärning som spara en hel del undervisningstid. Detta förutsätter emellertid att du har goda kunskaper i matematikämnets didaktik.

Svenska elevers kunskaper om bråk

Enligt internationella undersökningar såsom Timss (1995, 2003, 2007) och Pisa (2000, 2003, 2006, 2009) är svenska elevers kunskaper om bråk mindre bra, sett ur ett internationellt perspektiv. Nu är dessa undersökningar, liksom de nationella proven i matematik, av summativ karaktär och ger därför inget besked om detaljer eller orsakssammanhang. För att få en mer precis information kan man studera resultaten på de utvärderingar som gjorts med hjälp av Skolverkets Diamantdiagnoser och de s k Briljantdiagnoserna som från 2013 ingår i Diamantdiagnoserna. Under åren 2008–2012 har ca 50 000 elevers kunskaper om bråk och tal i decimalform diagnostiserats i två större städer och ett antal mindre kommuner. Här presenteras några intressanta resultat som visar vad eleverna har abstraherat om bråk och operationer med tal i bråk- och decimalform. Mer detaljerade resultat kommer att presenteras i de följande avsnitten.

Följande uppgifter har getts på våren i årskurs 6 och beskriver elevers grundläggande kunskaper om rationella tal och deras egenskaper.

Beräkna $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$	Lösningsfrekvens 72 %
Beräkna $1 - \frac{3}{4}$	Lösningsfrekvens 49 %
Beräkna $2 \cdot \frac{2}{5}$	Lösningsfrekvens 71 %
Beräkna $\frac{4}{5}\ /2$	Lösningsfrekvens 63 %
Beräkna $1/\frac{1}{2}$	Lösningsfrekvens 10 %

Lägg märke till att de här uppgifterna inte bedömer elevernas förmåga att operera med tal i bråkform utan enbart om de förstår innebörden av tal i bråkform. Som exempel handlar uppgiften $\frac{4}{5}/2$ om att $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ ska fördelas i två grupper som $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)$ vilket ger $\frac{2}{5}$ i varje grupp. Uppgifterna handlar alltså inte om reglerna för division av eller med tal i bråkform. Lägg också märke till att flera av de här uppgifterna, enligt Lgr 11, är centralt innehåll i årskurs 1–3.

Följande uppgifter har getts på våren i årskurs 7 och årskurs 9 och beskriver elevernas förmåga att utföra grundläggande operationer med tal i bråkform (Löwing, 2008, s 248).

	Lösningsfrekvens i årskurs 7	Lösningsfrekvens i årskurs 9
Beräkna $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	28 %	44 %
Beräkna $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}$	19 %	37 %
Beräkna $8\cdot\frac{1}{2}$	45 %	72 %
Beräkna $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$	19 %	43 %
Beräkna $\frac{6}{5}/3$	18 %	38 %
Beräkna $2/\frac{2}{3}$	7 %	23 %

De här resultaten bör jämföras med dem i årskurs 6. Det är uppenbart att dessa tillkortakommanden handlar om bristande kontinuitet i undervisningen och/eller om mindre bra val av undervisningsmetoder. En rimlig tolkning är, att det är brister i grundläggande bråkuppfattning som uppstått före årskurs 6, som lett till de här mindre bra resultaten i årskurserna 7 och 9. Detta kommer, mer i detalj, att uppmärksammas senare, samtidigt som det kommer att ges en rad förslag till alternativa didaktiska lösningar.

Läs mer i

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik*. Lund: Studentlitteratur.

Att diskutera

- Diskutera resultaten i det här kapitlet i relation till motsvarande resultat på er egen skola.
- Hur ser samarbetet ut mellan stadierna idag, vad gäller undervisning om bråk? Hur kan man skapa en kontinuitet på era skolor?
- Ställ upp preliminära mål för Rationella tal och deras egenskaper och för en preliminär diskussion om när olika delmoment bör introduceras i undervisningen.

2

Bråk som del av en hel och som del av ett antal

Syfte: Att ge ett didaktiskt underlag för att introducera och konkretisera bråket som del av en hel och som del av ett antal.

Förberedelser: De deltagare som gett Diamantdiagnoserna RB1, RB2 och RB3, tar med resultaten och förbereder en presentation av och diskussion om dem. Alla bör även i förväg ha läst igenom följande text.

Det innehåll som beskrivs här, motsvarar det centrala innehållet i årskurs 1–3, alltså D*el av helhet och del av antal. Hur delarna kan benämnas och uttryckas som enkla bråk samt hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal*, det centrala innehållet i årskurs 4–6: *Rationella tal och deras egenskaper* samt i årskurs 7–9: *Talsystemets utveckling från naturliga tal till rationella tal.*

Man måste som lärare vara medveten om att all konkretisering enbart är lokal, och oftast belyser en enda aspekt av det som ska förstås (abstraheras). När man konkretiserar tal i bråkform är det därför angeläget att de metoder som används inte leder in i en återvändsgränd utan tillåter en generalisering till räkning med såväl rationella som irrationella tal och till en förståelse för algebraiska operationer. En konkretisering som verkar fungera för stunden kan i själva verket skapa allvarliga konflikter och missuppfattningar på längre sikt. I det här avsnittet läggs en första grund för hur eleverna kan uppfatta de rationella talen vilket successivt kommer att följas upp i de följande avsnitten.

Bråket i skola och vardag

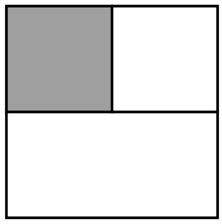
I vardagen spelar bråkformen numera en betydligt mindre roll än tidigare. Detta betyder emellertid inte att man i skolan ska tona ner bråkets roll. Tvärtom! Eftersom i stort sett alla elever numera fortsätter att läsa matematik på gymnasieskolan är det viktigt att alla elever förbereds för detta. Det här handlar om elevers lika rätt till utbildning på såväl kort som lång sikt.

Eleverna möter bråk i en rad olika situationer i undervisningen, exempelvis vid arbete med skala, likformighet, enhetsbyten, proportionalitet och procenträkning. En del av detta sker numera i decimalform, vilket gör det viktigt att eleverna även förstår hur bråk uttrycks som decimalform och hur räknereglerna för tal i bråkform generaliseras till tal i decimalform.

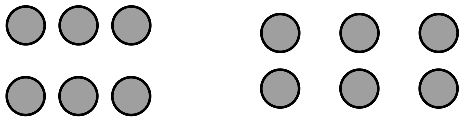
Bråket har många ”ansikten” (se Kilborn 1990 s 46 ff). Av dessa är ”en del av en hel” och ”en del av ett antal” de som är lättast att uppfatta för eleverna. Bråket som tal, proportion och andel kräver en högre abstraktionsförmåga. Observera också att när vi arbetar med delar av en hel eller del av ett antal, så handlar det inte om bråk som tal, utan om bråk som andel. Om tre personer delar en chokladkaka i tre lika stora delar, så får man inte en tredjedel var, man får en tredjedels chokladkaka var. Storleken av tredjedelen beror ju på chokladkakans ursprungliga storlek. Detsamma gäller för procentsatser, där t ex 20 % bara anger en proportion och alltså inte ett tal.

Bråk och likadelning

När barn delar något mellan sig är de mycket noga med att alla ska få lika mycket var. Samma princip gäller för bråk. Ska man ta en tredjedel av en chokladkaka, så ska den delas i tre lika stora delar. Detta har långt ifrån alla elever klart för sig. De studier som Löwing och Kilborn under flera år utfört med hjälp av Diamantmaterialets diagnos RB1, visar att 62 % av eleverna i årskurs 4 och 55 % av eleverna i årskurs 5 trodde att en tredjedel av den här figuren var skuggad. De har således inte förstått innebörden i likadelning.

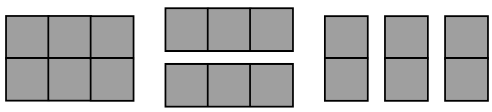


Principen om likadelning bör grundläggas tidigt, redan när man tar upp begreppen hälften och dubbelt. När man ska ta hälften av sex föremål, bör föremålen separeras så att man ser principen. Men man bör i detta sammanhang passa på att visa att man även kan separera föremålen i tre grupper, med lika många föremål i varje grupp.



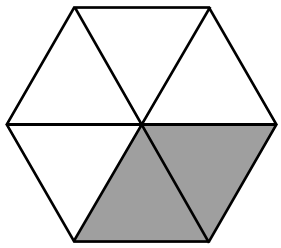
Med den här typen av övningar lär sig eleverna samtidigt att uppfatta talens delare, vilket de kommer att ha stor användning för när de senare ska lösa uppgifter av typen $\frac{1}{4}$ av 12, där mönstret $12 = 4 \cdot 3$ är avgörande för att finna en enkel lösning.

I nästa steg kan idén överföras till delar av en hel. Om en hel representeras av en rektangel som är indelad i sex rutor (som i figuren nedan) så kan figuren delas i två eller tre lika stora delar (1/2 resp. 1/3 av det hela) även om delarna består av flera små kvadrater (som i figurerna till höger).



Det här är viktigt. Dels knyter detta samman delar av en hel med delar av ett antal, dels kan den här typen av resonemang förhindra att eleverna gör följande misstag.

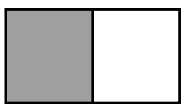
På Diamants diagnos RB1 har det visar sig att
73 % av eleverna i årskurs 4 och
66 % av eleverna i årskurs 5,
inte förstod att 1/3 av den här figuren är skuggad.



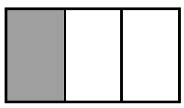
En del av en hel

För att visa principen om likadelning kan man laborera med lika stora kort som eleverna får vika och/eller klippa isär. Kortet kan representera en helhet, t ex en chokladkaka. Om chokladkakan delas i

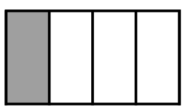
två lika stora delar så är den ena delen en halv chokladkaka



tre lika stora delar så är en av delarna en tredjedels chokladkaka

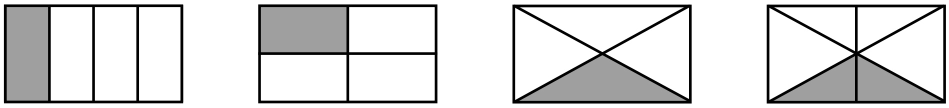


fyra lika stora delar så är en av delarna en fjärdedels chokladkaka.



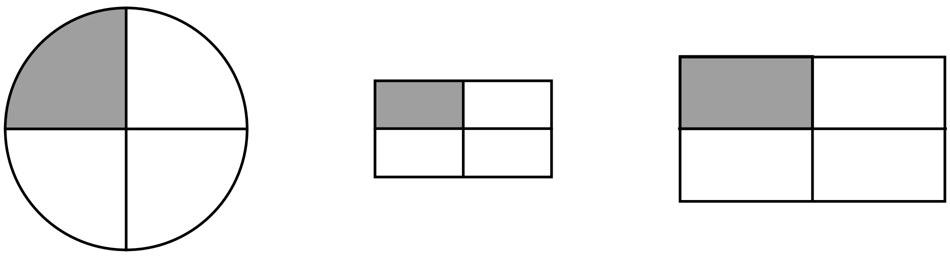
Genom att skriva bråkdelarna med bokstäver och inte med siffror blir det tydligt att de här bråkdelarna är enheter. Det blir därmed enklare att (senare) arbeta med flera delar. Lägg samtidigt märke till att man benämner bråk med ordningstal: en tredje-del, en fjärde-del osv. Detta kan vålla bekymmer, inte minst när det gäller en sjättedel.

Variation är enligt modern didaktik en viktig förutsättning för förståelse. Det är därför angeläget att klargöra för eleverna, var gränserna går för vad som t ex menas med en fjärdedel. En fjärdedel av den ovan avbildade chokladkakan kan i själva verket se ut på många olika sätt. Det som är avgörande är då att alla delarna är lika stora.

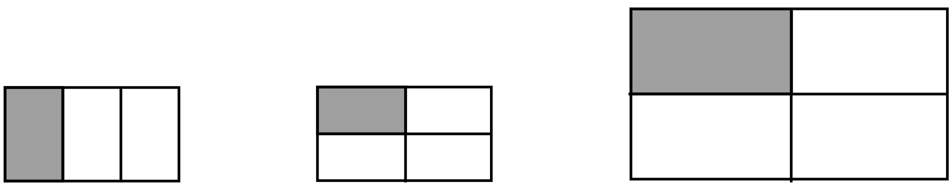


Nästa viktiga aspekt är att en tredjedel av en given chokladkaka alltid är större än en fjärdedel av samma chokladkaka. Ju fler lika stora delar man delar chokladkakan i, desto mindre blir ju delarna. Detta måste bli klart för eleverna. Det kan annars bli svårt för dem att senare uppfatta att $\frac{3}{8}$ är mindre än $\frac{1}{2}$. Talen 3 och 8 är ju betydligt större än 1 och 2.

När eleverna har förstått att en tredjedels chokladkaka är större än en fjärdedels chokladkaka, gäller det att ta ställning till en annan fråga, nämligen vad man tar en tredjedel eller en fjärdedel av. I följande figurer har vi markerat en fjärdedel av en helhet, men den valda helheten kan variera i storlek och form och en andels storlek är helt beroende av vad vi har tagit en fjärdedel av.



En kombination av de hittills nämnda aspekterna visar att en tredjedel av en given figur är större än en fjärdedel av samma figur (se de två figurerna nedan till vänster). Samtidigt är en fjärdedel av den högra figuren större än tredjedelen i den vänstra figuren, eftersom vi ju har tagit en fjärdedel av en större helhet.

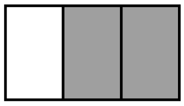


Detta exempel visar på den konflikt som kan uppstå om vi blandar samman bråk som tal och bråk som andel. Det är därför angeläget att alla elever behärskar den just beskrivna variationen, något som de lär sig genom erfarenhet och/eller lämpliga laborationer. Det är ofta osäkerhet när det gäller de här grundläggande aspekterna av bråk, som leder till de mindre bra resultat som presenterades tidigare.

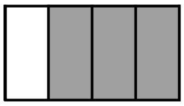
Flera delar av en hel

När man jämför eller adderar sträckor, tid eller massa är det viktigt att det man jämför eller adderar har samma enhet. Man adderar inte mätetalen i 1 dm och 2 cm utan väljer först en gemensam enhet. När man opererar med tal i bråkform är det lika viktigt att välja rätt enhet. Enheten är i det här fallet av typen en tredjedel, en fjärdedel etc. För att detta ska bli klart för eleverna bör man under de första skolåren undvika att skriva tal i bråkform som $\frac{2}{3}$ eller $\frac{3}{4}$ eftersom man då döljer nämnarens viktiga roll som enhet. Istället bör man skriva 2 tredjedelar respektive 3 fjärdedelar. Vi återkommer till detta.

Om vi delar en chokladkaka i tre lika stora delar, så omfattar varje sådan del 1 tredjedels chokladkaka. Tar vi två sådana andelar får vi 2 tredjedels chokladkaka (2 tredjedelar av en chokladkaka).



Om vi istället delar chokladkakan i fyra lika stora delar så omfattar varje sådan del 1 fjärdedels chokladkaka. Tar vi tre sådana andelar får man 3 fjärdedels chokladkaka (3 fjärdedelar av en chokladkaka).



När eleverna så småningom ska skriva sådana här andelar med enbart siffror, i bråkform, är det viktigt att de till en början klart skiljer mellan täljaren (som beskriver antalet delar) och nämnaren (som visar enheten). En andel som 2 tredjedelar bör därför skrivas $2 \cdot \frac{1}{3}$ och 3 fjärdedelar som $3 \cdot \frac{1}{4}$ innan eleverna övergår till det korta (men för många elever förvirrande) skrivsättet $\frac{2}{3}$ och $\frac{3}{4}$. För elever som inte förstår detta sammanhang blir det svårt att generalisera kunskapen, vilket kan leda till att de, ända upp i 9:an, får svårigheter med att utföra multiplikationer som $3 \cdot \frac{2}{7}$. För den som förstår innebörden i bråket $\frac{2}{7}$ kan uppgiften $3 \cdot \frac{2}{7}$ enkelt uppfattas och lösas som $(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{7})$, alltså som $\frac{2+2+2}{7} = 6 \cdot \frac{1}{7}$.

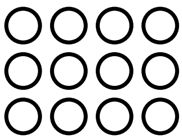
Detta förklarar i sin tur varför man bara behöver multiplicera täljaren ($3 \cdot 2 = 6$) och varför enheten i produkten fortfarande är densamma. Som tidigare nämnts hade ca 30 % av eleverna problem med den här multiplikationen i slutet av årskurs 6.

Bråk som del av ett antal

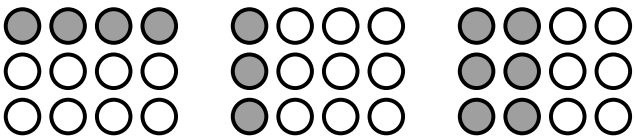
Bråket har alltså flera olika "ansikten". Bråk som del av en hel är t ex något helt annat än bråk som del av ett antal. Samtidigt är det samma matematiska modell som ligger i botten. Vi utgår nu från bråk som del av en hel för att reda ut bråkets roll som del av ett antal.

Del av ett antal är intimt kopplat till division och uppdelning i faktorer. Genom att ge eleverna en bra grund inom det här området skapar man därför goda förutsättningar för en fortsatt inlärning av matematik. Som exempel kan talet 12 delas upp i faktorer på olika sätt, bl a som $4 \cdot 3$ och $6 \cdot 2$. Att $12 = 4 \cdot 3$ innebär samtidigt att $12 / 4 = 3$ och att $12 / 3 = 4$. Att $12 = 6 \cdot 2$ innebär samtidig att $12 / 2 = 6$ och att $12 / 6 = 2$ (observera att tecknet / avser division).

Om vi t ex ska ta en tredjedel av 12 eller en fjärdedel av 12, delar vi lämpligen upp talet 12 enligt mönstret $4 \cdot 3$.

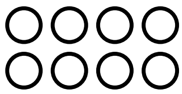


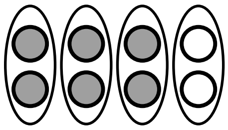
På så sätt blir det enkelt att representera såväl en tredjedel av 12 och en fjärdedel av 12 som hälften av 12. (Observera att det egentligen handlar om 12 stycken, i det här fallet 12 kulor.)



När vi arbetar med del av ett antal kan vi på det här sättet planera så att vi samtidigt övar multiplikation och division (faktoruppdelning) av tal inom talområdet 1–24. Genom att använda samma matematiska modell (uttryckt på olika sätt) inom olika områden, ger vi exempel på matematikens styrka och dessutom rika möjligheter till (gratis) repetition av ett område samtidigt som vi arbetar med ett annat.

Det är viktigt att ”del av ett antal” från början konkretiserats på ett bra sätt och att eleverna bär med sig den minnesbilden. På uppgiften ”Hur mycket är tre fjärdedelar av 8” kunde bara varannan elev i årskurs 5 (enligt Löwing och Kilborns undersökning) ge rätt svar. När eleverna fick hjälp av figuren till vänster steg lösningsfrekvensen till ca 65 %. Observera emellertid att var tredje elev fortfarande inte kunde dela upp cirklarna i fyra grupper (par) och välja tre av grupperna, paren (som i figuren till höger).

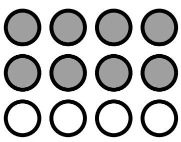




Det här visar på en annan intressant aspekt av inlärning, nämligen skillnaden mellan en passiv och en aktiv kunskap. Den passiva kunskapen innebär att eleverna kan avläsa en given figur, som den till höger, men har problem med att agera aktivt, alltså att skugga figuren till vänster på ett korrekt sätt, eller ännu mer aktivt, att själva rita en figur eller, ännu viktigare, att tänka sig en figur. Resultaten av de utvärderingar som gjorts med Diamantdiagnoserna visar tydligt att alltför många elever saknar aktiva kunskaper om bråkräkning. De har sannolikt tolkat eller målat en massa uppgifter i boken, men inte fått fatta egna beslut. En rimlig tolkning av detta är att undervisningen har varit alltför inriktad mot en konkretisering i form av bilder, alltså att tolka figurer. Man har på det sättet försummat själva målet med konkretiseringen, nämligen att den ska leda till abstraktion, alltså ett tänkande frigjort från bilder. Först när eleven kan abstrahera, är det möjligt att ta nya steg och fördjupa kunskapen ifråga.

Flera delar av en hel och av ett antal

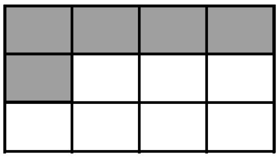
Vi inleder med att erinra om skillnaderna mellan ett bråk, som är ett tal, och division som är en räkneoperation. Vi skriver därför i det här materialet konsekvent ett bråk såsom 2 tredjedelar som $\frac{2}{3}$, medan en division såsom 12 delat med 3 tecknas som 12/3. Att ta ”en del av ett antal” såsom $\frac{1}{3}$ av 12, kan i nästa steg generaliseras till ”flera delar av ett antal”, såsom $\frac{2}{3}$ av 12. Det finns algebraiska regler för hur man kan beräkna detta, men betydligt viktigare är det att eleverna *förstår innebörden* i uttrycket. Det man bara har en formel för, och inte förstår innebörden av, går nämligen sällan att generalisera till ny kunskap i nya situationer. Det är i det här fallet angeläget att eleverna känner till betydelsen av $\frac{2}{3}$ som $2 \cdot \frac{1}{3}$. Tolkningen blir i så fall att vi 2 gånger ska ta en tredjedel av 12, alltså $2 \cdot (\frac{1}{3}$ av 12). Att ta två tredjedelar av 12 innebär således att vi först bestämmer andelens storlek, alltså en tredjedel av 12, genom att dela 12 föremål i tre lika stora delar. Därefter tar man två sådana andelar. Detta är en idé som senare kan generaliseras för att skapa bättre förståelse för procenträkning.



På motsvarande sätt får vi $\frac{3}{4}$ av 20 genom att först dividera 20 med 4 vilket ger $\frac{1}{4}$ av 20 = 5. För att ta $\frac{3}{4}$ av 20 väljer vi 3 sådana andelar vilket ger $3 \cdot 5 = 15$. Vi kan teckna detta som $3 \cdot (\frac{1}{4}$ av 20).

För att underlätta förståelsen kan det (som tidigare nämnts) vara lämpligt att $\frac{2}{3}$ av 12 till en början skrivs som 2 tredjedelar av 12. Detta visar på ett tydligare sätt att det handlar om $2 \cdot$ tredjedelen av 12, alltså $2 \cdot 4$. På motsvarande sätt kan $\frac{3}{4}$ av 20 skrivas som 3 fjärdedelar av 20 = $3 \cdot$ en fjärdedel av 20. Samtidigt bör eleverna göras medvetna om ytterligare en aspekt, nämligen att en tredjedel av 12 kan tolkas som 12/3 (alltså 12 dividerat med 3) och en fjärdedel av 20 som 20/4 (alltså som 20 dividerat med 4).

Att bestämma flera andelar av en hel går till på motsvarande sätt. Om vi t ex ska bestämma 5/12 av ett rektangelområde, så börjar vi med att dela upp området i 12 lika stora delar. Vi har därmed bestämt andelens storlek. Det gäller sedan att ta 5 sådana andelar.



Läs mer i

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2. Rationella tal och irrationella tal* (kapitel 10). Malmö: Liber Hermods.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik* (kapitel 11). Lund: Studentlitteratur.

Att diskutera

◇ Diskutera ur ett årskurs 1 till 9-perspektiv de resultat som presenteras i det här avsnittet i relation till motsvarande resultat på den egna skolan. Vad har eleverna redan förstått och vilka missuppfattningar är vanliga? Hur ska man i undervisningen undvika att dessa missuppfattningar uppstår?

◇ Diskutera resultaten och vanliga missuppfattningar i relation till innehållet i aktuella läromedel och till syfte och centralt innehåll i kursplanen till Lgr 11.

◇ Diskutera vilka tänkbara problem dessa missuppfattningar kan leda till elevernas fortsatta matematiklärande.

◇ Vilka uttrycksformer och representationer använder ni i undervisningen för att presentera bråk?

◇ Vilka konkreta material använder ni och har ni tillgång till?

◇ I texten beskrivs sättet att skriva ”2 tredjedelar” i stället för 2/3. Vad anser ni om detta? Är det något som redan görs? Skulle ni vilja ta till er detta skrivsätt?

Att planera

Gör en preliminär plan som omfattar när och hur det aktuella innehållet ska tas upp i undervisningen, samt hur undervisningen av detta innehåll ska se ut. När alla de sju avsnitten är genomgångna ställs de preliminära planerna samman till en komplett plan.

Förslag till kollegialt arbete

Välj ut ett av de ovan beskrivna delområdena där måluppfyllelsen är mindre bra. Planera och låt en eller flera av kollegerna genomföra en eller flera lektioner enligt idéerna i det här avsnittet. Utvärdera och diskutera såväl undervisningen som resultatet. Om resultatet inte är tillfredsställande, modifiera planeringen och låt en annan kollega undervisa. Upprepa detta tills ett tillfredsställande resultat uppnås.

3

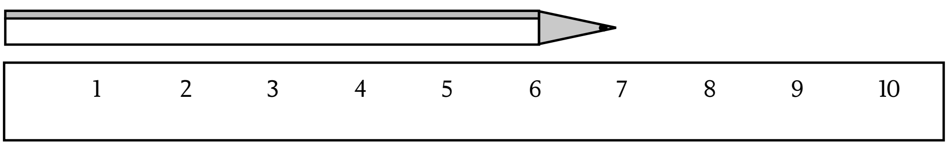
Bråk som tal och tal i decimalform

Syfte: Att ge ett didaktiskt underlag för att introducera och konkretisera de rationella talen som tal, skrivna i decimalform. Observera att ändliga decimalutvecklingar såsom 3,25 och 0,724 enbart är alternativa sätt för att skriva en viss typ av bråk som har speciella nämnare.

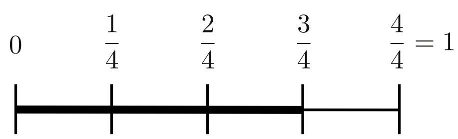
Förberedelser: De deltagare som gett Diamantdiagnoserna RB4 och RD1, tar med resultaten och förbereder en presentation av och diskussion om dem. Alla bör även i förväg ha läst igenom följande text.

Vi har hittills arbetat med två av bråkets "ansikten" nämligen del av en hel och del av ett antal. Detta är något helt annat än bråket som ett tal. Som exempel bör ett bråk som $\frac{2}{3}$ i sammanhanget $\frac{2}{3}$ av 12 inte betraktas som ett tal utan som en andel. Det tal som avses är ju 8. Observera att $\frac{2}{3}$ i sammanhanget $\frac{2}{3}$ av 15 = 10, svarar mot ett större tal än $\frac{2}{3}$ av 12. Den här skillnaden mellan tal och andel blir inte minst viktig i samband med begreppet procent. När man som lärare påstår att (andelen) 20 % är lika med talet 0,2 så kan detta leda till stor förvirring eftersom 20 % av 10 = 2 och 20 % av 100 = 20, vilket är något helt annat än 0,2.

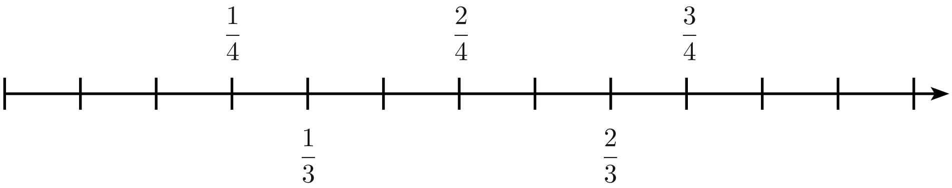
Ett bråk kan således tolkas på flera sätt, inte bara som en andel utan även som ett tal. Det handlar nu om kursplanens ... *hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal.* Det här är ett innehåll som kan konkretiseras genom jämförelse med längdmätning. Om man delar en decimeter i tio lika stora delar så får man $\frac{1}{10}$ decimeter, alltså en centimeter. När man ska mäta en pennas längd med hjälp av en linjal avläser man att pennan i figuren är 7 cm lång. Innebörden av detta är att pennan är lika lång som 7 enheter av storleken 1 cm. Detta kan även uttryckas som att pennan är $7 \cdot \frac{1}{10}$ decimeter lång.



Längdmätning kan på det här sättet användas som metafor för bråk som tal. Elever som behärskar idén för hur man mäter en sträcka i cm, kan på motsvarande sätt dela sträckan [0, 1] på tallinjen i fyra lika stora delar. Vi får då fyra fjärdedelar av sträckan. I ändpunkten av den tredje fjärdedelen, finner man punkten $\frac{3}{4}$ av intervallet [0, 1]. Precis som på linjalen beskriver punkten (talet) $\frac{3}{4}$ att 3 fjärdedelar av sträckan [0, 1] ligger till vänster om punkten.



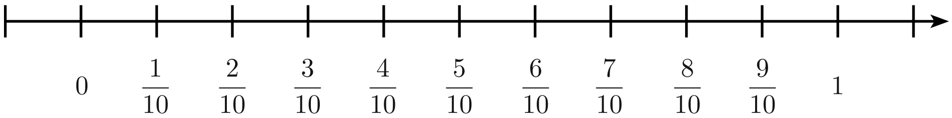
Eftersom varje tal i bråkform mellan 0 och 1 kan beskrivas på det här sättet på tallinjen, kan vi knyta samman begreppen bråk som en del av en helhet med bråk som tal och på tallinjen se att talet $\frac{1}{3}$ > talet $\frac{1}{4}$ och att talet $\frac{2}{3}$ > talet $\frac{2}{4}$. Genom att istället dela in sträckan [0, 1] i 12 delar kan vi också, direkt på tallinjen,avgöra att $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.



Eftersom man kan addera ett naturligt tal och ett tal i bråkform såsom $3 + \frac{1}{4}$ och $7 + \frac{3}{4}$ finner man att alla positiva tal i bråkform har en plats på tallinjen. Detta kan senare generaliseras till att även gälla de negativa rationella talen.

Tal i decimalform

Enkla tal i decimalform kan introduceras på samma sätt som beskrivits ovan, i det här fallet genom att vi delar en sträcka, t ex sträckan [0, 1] på tallinjen i tio lika stora delar.



Sträckan har delats i tiondelar så den första delningspunkten kallas för en tiondel eftersom en tiondel av sträckan finns till vänster om den punkten. Den sjunde punkten kallas på motsvarande sätt för 7 tiondelar eftersom den delar upp sträckan mellan 0 och 1 så att 7 tiondelar ligger till vänster om den punkten. Detta är återigen, precis som när vi mäter med en linjal. Till vänster om markeringen 7 på linjalen i ovanstående figur, finner vi sträckan 7 cm, alltså 7 längdenheter. Vi kan efter detta införa beteckningen 0,7 för 7 tiondelar, men bör vara noga med att läsa detta som ”sju tiondelar” och inte som ”noll komma sju”. Man undviker därmed att elever gör det fatala felet 1/4 av 0,16 = 0,4, Eftersom 16 / 4 = 4 ligger det ju nära till hands att noll komma 16 dividerat med 4 är noll komma fyra. Detta belyser språkets och terminologins viktiga roll i matematikundervisningen.

Om man istället delar in sträckan [0, 1] i 100 delar kommer den tjugofemte delningspunkten att vara 0,25, vilket bör utläsas 25 hundradelar. Om man istället hade delat intervallet [2, 3] i hundra delar så hade den tjugofemte markeringen svarat mot 2,25, alltså 2 hela och 25 hundradelar. Detta utvecklas i nästa avsnitt.

Bråk skrivna som tal i decimalform

Vissa tal i bråkform kan skrivas som ändliga decimalutvecklingar, nämligen de tal vars nämnare bara innehåller faktorerna 2 och/eller 5. Talet $\frac{1}{2}$ kan skrivas som 0,5 och talet $\frac{2}{5}$ som 0,4. Detta kan i sin tur kopplas till kvoten av divisionerna 1/2 och 2/5. Var samtidigt noga med att skilja mellan bråket (talet) $\frac{2}{5}$ och divisionen 2/5, där bråket är kvoten till divisionen.

I det här sammanhanget bör *Positionssystemet för tal i decimalform* behandlas. Alla rationella tal (tal i bråkform) kan uttryckas i decimalform och har en plats på tallinjen.

När vi läser tal i decimalform är det viktigt att vi gör det på ett sätt som speglar talets innebörd. Tal som 3,25 bör läsas 3 hela och 25 hundradelar. De bör även kunna tecknas som $3\frac{25}{100}$ eller ännu hellre som $3+\frac{25}{100}$. Man bör även skriva detta som 3 + 0,25, som 3 + 0,2 + 0,05 och som $3+\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$. Det är viktigt att alla elever behärskar dessa olika uttryckssätt. Det visar sig nämligen att många elever, ännu i årskurs 7–9, tror att 0,10 > 0,9 beroende på att man läser talen som noll komma tio och noll komma nio, och man vet att 10 > 9.

Eleverna bör även få lära sig att de rationella talen ligger obegränsat tätt på tallinjen. Mellan två rationella tal finns det alltid oändligt många andra rationella tal. Mellan talen 0,25 och 0,26 finns t ex talen 0,251, 0,252 ..., 0,259 och 0,2511, 0,2512, ..., 0,2519 osv. Resultaten på de utvärderingar som utförts med hjälp av Diamantdiagnoserna visar att många elever inte förstår detta, utan tror att det inte finns något tal mellan 0,4 och 0,5 på tallinjen. En terminologisk kommentar i det här sammanhanget är att det tecken som skiljer *heltalsdelen* i 2,75 från *bråkdelen* kallas för *decimaltecken*. Lägg märke till att decimaltecknet i en rad andra länder, liksom på miniräknare och i viss programvara är en punkt, inte ett "decimalkomma". I engelskspråkig litteratur används kommatecknet för att avskilja tusental. Talet 4 500 skrivs således 4,500. Man bör göra eleverna uppmärksamma på detta, inte minst med tanke på undervisningen i NO och SO, där talet 4,500 kan skapa förvirring.

För att avgöra vilket av två tal i decimalform som är störst, t ex 3,547 och 3,539, börjar vi med att jämföra entalen. De är lika stora. Därefter jämför vi tiondelarna. De är också lika stora. I nästa steg jämför vi hundradelarna. Eftersom 4 hundradelar är större än 3 hundradelar så är talet 3,547 störst, oberoende av tusendelen.

Tal i decimalform och positionssystemet

När vi beskriver ett naturligt tal som 3987 menar vi $3 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 7$, vilket är principen för vårt talsystem, som är ett positionssystem med basen 10. Analogt med detta har ett tal som 7,534 innebörden $7+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}$. Ännu tydligare blir detta om vi använder potensform och skriver 3987,534 som $3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$.

För att i grunden förstå de stora fördelarna med vårt talsystem kan det vara lämpligt att jämföra det med andra talsystem och anknyta detta till matematikens historia.

Läs mer i

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2. Rationella tal och irrationella tal* (kapitel 11). Malmö: Liber Hermods.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik* (kapitel 10). Lund: Studentlitteratur.

Att diskutera

- Diskutera ur ett årskurs 1 till 9-perspektiv de matematikdidaktiska modeller och de resultat som presenteras i det här avsnittet, i relation till motsvarande resultat på den egna skolan. Vad har eleverna redan förstått och vilka missuppfattningar är vanliga? Hur ska man i undervisningen undvika att dessa missuppfattningar uppstår?
- Diskutera resultaten och vanliga missuppfattningar i relation till innehållet i aktuella läromedel och till syfte och centralt innehåll i kursplanen till Lgr 11.
- Vilken bild har ni av era elevers kunskap kring bråk som del av hel och bråk som tal?

- Hur brukar ni introducera decimalform?
- Diskutera metoden om längdmätning som metafor för bråk som tal. Svårigheter/fördelar?

Att planera

Gör en preliminär plan som omfattar när och hur det aktuella innehållet ska tas upp i undervisningen, samt vilka undervisningsmetoder som kan användas. När alla de sju avsnitten är genomgångna ställs de preliminära planerna samman till en komplett plan.

Förslag till kollegialt arbete

Välj ut ett av de ovan beskrivna delområdena där måluppfyllelsen är mindre bra. Planera och genomför en eller flera lektioner enligt idéerna i det här avsnittet. Utvärdera och diskutera såväl undervisningen som resultatet. Om resultatet inte är tillfredsställande, modifiera planeringen och undervisningen tills ett tillfredsställande resultat uppnås.

Addition och subtraktion av bråk

4

Syfte: Att ge ett didaktiskt underlag för att introducera och konkretisera addition och subtraktion av tal i bråkform.

Förberedelser: De deltagare som gett Diamantdiagnoserna RB5 och RB6, tar med resultaten och förbereder en presentation av och diskussion om dem. Alla bör även i förväg ha läst igenom följande text.

I det här avsnittet beskrivs hur eleverna kan bygga upp en förståelse för addition och subtraktion av tal i bråkform. Innehållet som behandlas motsvarar det centrala innehållet i årskurs 4–6: *Rationella tal och deras egenskaper* och *Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer* samt det centrala innehållet i årskurs 7–9: *Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vissa beräkningar med skriftlig metod och digital teknik.*

Addition och subtraktion av två eller flera tal i bråkform bygger på att talen alltid kan skrivas med samma nämnare. Detta är analogt med hur man adderar och subtraherar storheter med olika mätetal som till exempel 3 cm + 1 dm eller 3 kg – 8 hg, där man alltid bör välja en gemensam enhet, t ex 1 cm respektive 1 hg.

Centrala förkunskaper

Innan eleverna börjar operera med tal i bråkform bör de vara säkra på bråkens innebörd, t ex att nämnaren anger vilken enhet (andel) som används och att täljaren anger hur många sådana enheter (andelar) som avses. Vi repeterar därför några viktiga grundläggande egenskaper hos bråken. 3 sjundedelar skrivs som $\frac{3}{7}$, vilket ska tolkas som $3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$. Här beskriver täljaren 3 hur många av enheten $\frac{1}{7}$ som avses.

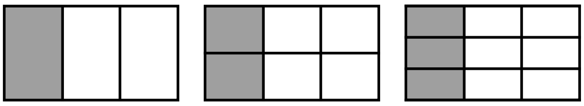
Talet $\frac{3}{7}$ kan även beskrivas i decimalform genom att man utför division av 3 med 7. Man får då en periodisk decimalutveckling 0,**428571**428571428571... som kan avrundas, t ex till 0,429.

I uppgifter som $\frac{1}{3}$ av 6 och $\frac{2}{5}$ av 20 beskriver $\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{5}$ andelar. Eleverna bör kunna lösa uppgifter av det här slaget i huvudet, utan hjälp av en given figur, innan de går vidare. Som ett steg på vägen kan man först låta eleverna själva rita figurer som motsvarar $\frac{1}{3}$ av 6 eller $\frac{2}{5}$ av 20, för att successivt övergå till att ”se figuren i huvudet”. En bra övning är att lösa enkla vardagsproblem med bråk.

Det är också angeläget att eleverna kan jämföra enkla tal i bråkform, såsom att talet $\frac{1}{5}$ är större än talet $\frac{1}{7}$ vilket kan motiveras med att var och en av 5 lika stora delar av en chokladkaka är större än en var och en av 7 lika stora delar av samma chokladkaka. På motsvarande sätt är talet $\frac{4}{5}$ större än talet $\frac{4}{7}$ eftersom $\frac{1}{5}$ är större än $\frac{1}{7}$. Det är genom att *resonera* om sådana relationer och *diskutera* dem som eleverna bygger upp ett förtroende för bråk och får *tilltro till sin förmåga*. Jag kallar detta för andra ordningens konkretisering, alltså att kunna resonera utan att ta stöd i figurer.

Förlängning och förkortning

För att förbereda addition, subtraktion och jämförelse av tal i bråkform bör eleverna öva sig på att skriva givna bråk på olika sätt. Om de t ex utgår från $\frac{1}{3}$ av en rektangel så kan de, genom att dela den på olika sätt, se att $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ osv av samma rektangel. Lägg märke till att rektangeln i figuren först har delats lodrätt i tre lika stora delar, där den skuggade delen svarar mot en tredjedel. Därefter har den delats vågrätt i två respektive tre lika stora delar. Eftersom de skuggade andelarna svarar mot täljaren, kommer de två högra figurerna att svara mot 2 av 6 rutor alltså $\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3}$, respektive 3 av 9 rutor, $\frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 3}$. Det är mönster av det här slaget som kan ge en förklaring till hur man gör två bråk liknämniga (jämförbara).



Övningar av det här slaget kan med fördel utföras laborativt, gärna med rektanglar uppdelade i 6 × 8, 8 × 10 och 6 × 10 rutor, som ger enkla och varierande mönster. Den slutsats som eleverna ska dra av detta, är att alla tal i bråkform kan skrivas på oändligt många olika sätt.

De operationer som vi nu har beskrivit kallas för förlängning och ändrar inte bråkets värde (storlek). Den inversa (omvända) operationen, alltså när man går från $\frac{3}{9}$ till $\frac{1}{3}$, kallas för förkortning.

Vi kan i det här sammanhanget passa på att tolka de ovanstående figurerna algebraiskt. Vad som illustreras är att $\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 3}$ osv. Eleverna kan på så sätt förstå varför man kan förkorta $\frac{3}{9}$ med 3 och på sikt varför man kan förkorta $\frac{xy}{x^2}$ med x eller $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$ med $x+1$. Det här belyser bråkräkningens roll som förkunskap till algebran. Genom att tidigt lägga en bra grund för hur man räknar med bråk, banar man vägen för motsvarande delar av algebran, vilket gör algebran begriplig. Man kan se bråkräkning som en konkretisering av det här området av algebran.

Enkla additioner och subtraktioner av tal i bråkform

I ett första steg bör eleverna kunna addera och subtrahera tal i bråkform med samma nämnare alltså uppgifter av typen $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$. Uppgiften kan uppfattas på två sätt:

- dels som 2 sjundedelar + 3 sjundedelar = (2 + 3) sjundedelar, där det är täljarna (antalet enheter) som adderas, medan nämnaren bara är en enhet som inte påverkar additionen,
- dels som $(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}) = \frac{5}{7}$ eller mer formellt $2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} = (2+3) \cdot \frac{1}{7}$.

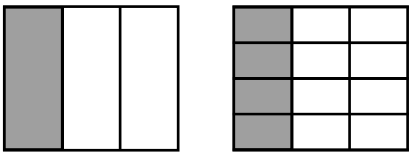
Även blandad form bör förekomma som vid additionen $\frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \frac{9}{7}$ som i sin tur kan skrivas som $\frac{7}{7} + \frac{2}{7} = 1 + \frac{2}{7}$ eller $1\frac{2}{7}$.

Vid subtraktioner som $4\frac{2}{7} - 1\frac{4}{7}$ kan man skriva om $4\frac{2}{7}$ som $3 + \frac{9}{7}$, vilket ger $3\frac{9}{7} - 1\frac{4}{7}$ och svaret $2\frac{5}{7}$. Man kan också subtrahera $1\frac{2}{7}$ från båda termerna vilket också ger $3 - \frac{2}{7}$, en uppgift som är betydligt enklare. Ytterligare ett alternativ är att utföra subtraktionen med entalen för sig och bråkdelarna för sig (som vid mellanledsräkning), vilket ger $(4-1) - (\frac{4}{7} - \frac{2}{7}) = 3 - \frac{2}{7}$.

Det är angeläget att eleverna lär sig att resonera så här och att gå fram och tillbaka mellan olika uttrycksformer. På så sätt får de en större förtrogenhet med de rationella talen och hur de kan operera med dem. Detta ger även möjligheter att rekonstruera regler som de har glömt. Det är detta som i kursplanens syfte uttrycks som: *reflektera över och värdera valda strategier, utveckla förtrogenhet med matematiska uttrycksformer, kommunicera matematik*, mm.

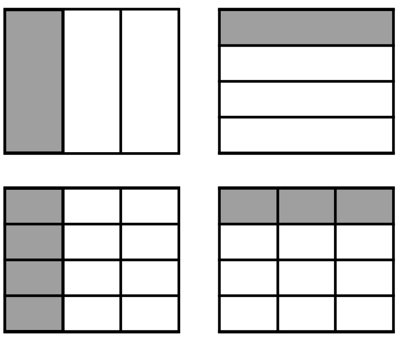
Addition och subtraktion av bråk med olika nämnare

När man adderar och subtraherar tal i bråkform, krävs det att bråken är skrivna med samma nämnare. För att skriva om $\frac{1}{3}$ så att nämnaren blir 12 krävs det en förlängning med 4, vilket kan konkretiseras genom att vi gör en horisontell uppdelning av rektangeln till vänster i fyra lika stora delar. Vi ser nu hur både de skuggade rutorna (täljaren) och alla rutorna (nämnaren) blir 4 gånger fler. Vi får alltså $\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{4}{12}$.



För att talen $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{4}$ ska kunna adderas eller subtraheras måste de vara jämförbara, alltså ha samma enhet (samma nämnare). För att illustrera detta kan vi dela in en hel i tre respektive fyra delar för att konkretisera $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{4}$. (Se nedanstående figurer). Delningen bör då ske i olika riktningar, t ex $\frac{1}{3}$ vertikalt och $\frac{1}{4}$ horisontellt.

Genom att lägga de två mönstren på varandra ser vi att 12 är en lämplig gemensam nämnare och att $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ och $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Eftersom de två bråken nu har samma nämnare (enhet) så kan bråken (andelarna) adderas.



$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

$\frac{4}{12}$ $\frac{3}{12}$

Vad som här har konkretiserats är hur vi kan få en gemensam nämnare genom förlängning. Utan konkretiserande material ser additionen ut så här:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Lägg märke till att det som beskrivits i figurerna *inte är en metod* att addera eller subtrahera bråk med olika nämnare, utan ett sätt att konkretisera de operationer som utförs när man adderar eller subtraherar två bråk. När eleverna har förstått (abstraherat) idén ska de sluta använda de konkretiserande figurerna och direkt övergå till att använda sig av förlängning och förkortning. Att fortsätta använda materialet blir annars en manipulation som snarast blir ett hinder för förståelsen (abstraktionen).

Vi kan sammanfatta grunderna för att addera och subtrahera tal i bråkform på följande sätt:

- Ett tal i bråkform kan alltid skrivas om på oändligt många olika sätt.
- Två tal i bråkform kan alltid skrivas om så att de får samma nämnare.
- När man adderar, subtraherar eller jämför två tal i bråkform bör talen först skrivas om så att de får samma nämnare.

Läs mer i

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2. Rationella tal och irrationella tal* (kapitel 10). Malmö: Liber Hermods.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik* (kapitel 11). Lund: Studentlitteratur.

Att diskutera

- Diskutera ur ett årskurs 1 till 9-perspektiv de matematikdidaktiska modeller som presenteras i det här avsnittet i relation till motsvarande diagnosresultat på den egna skolan. Vad har eleverna redan förstått och vilka missuppfattningar är vanliga? Hur ska man i undervisningen undvika att dessa missuppfattningar uppstår?
- Diskutera resultaten och vanliga missuppfattningar i relation till innehållet i aktuella läromedel och till syfte och centralt innehåll i kursplanen till Lgr 11.
- I vilken utsträckning använder ni konkretiseringar när ni arbetar med förlängning/förkortning av bråk? Delge varandra laborationer alt diskutera tänkbara idéer.
- Reflektera över vikten av kopplingen mellan bråkräkning och algebra.

Att planera

Gör en preliminär plan som omfattar när och hur det aktuella innehållet ska tas upp i undervisningen, samt vilka undervisningsmetoder som kan användas. När alla de sju avsnitten är genomgångna ställs de preliminära planerna samman till en komplett plan.

Förslag till kollegialt arbete

Välj ut ett av de ovan beskrivna delområdena där måluppfyllelsen är mindre bra. Planera och genomför en eller flera lektioner enligt idéerna i det här avsnittet. Utvärdera och diskutera såväl undervisningen som resultatet. Om resultatet inte är tillfredsställande, modifiera planeringen och undervisningen tills ett tillfredsställande resultat uppnås.

Multiplikation och division av tal i bråkform

5

Syfte: Att ge ett didaktiskt underlag för att introducera multiplikation och division av tal i bråkform.

Förberedelser: De deltagare som gett Diamantdiagnosen RB7, tar med resultaten och förbereder en presentation av och diskussion om den. Alla bör även i förväg ha läst igenom följande text.

För eleverna har multiplikation tidigare presenterats som en upprepad addition, där t ex $3 \cdot 4$ har innebörden $4+4+4$. Det är denna uppfattning som, tillsammans med de grundläggande räknelagarna, bör tas som utgångspunkt för att förklara multiplikation och division med och av tal i bråkform. Även den kommutativa lagen för multiplikation, alltså att $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ är en viktig förkunskap som kan generaliseras till $\frac{1}{3} \cdot 4 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.

De två strategierna för division, *delningsdivision* och *innehållsdivision*, är andra centrala utgångspunkter. Vid undervisning om multiplikation och division av tal i bråkform är det angeläget att lyfta fram räknelagarnas betydelse och att samma räknelagar gäller för rationella tal som för naturliga tal. Detta underlättar elevernas förståelse vid arbete med tal i bråkform.

Multiplikation av ett tal i bråkform med ett naturligt tal

Inled med att multiplicera ett tal i bråkform med ett naturligt tal, som $3 \cdot \frac{2}{7}$. Det handlar då om grundläggande taluppfattning där $3 \cdot \frac{2}{7}$ kan tolkas som $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

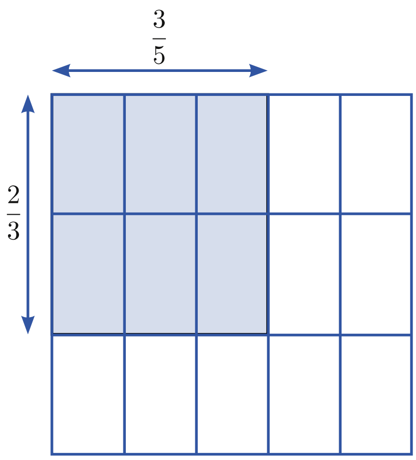
Detta blir ännu tydligare om vi skriver enheten en sjundedel med bokstäver, vilket ger 3 · (2 sjundedelar) = (3 · 2) sjundedelar, där sjundedelen är en enhet och det är täljaren, alltså antalet sjundedelar som multipliceras med 3. Lägg märke till att eleverna bör kunna utföra detta, och resonera om detta. Användningen av konkretiserande material ska vid behov ha skett tidigare, för att konkretisera tal som $\frac{2}{7}$ och $\frac{6}{7}$. Nu kan eleverna *föra matematiska resonemang* om tal i bråkform och kan *kommunicera matematik*.

Vid multiplikationer av typen $\frac{2}{7} \cdot 3$ fungerar inte definitionen av multiplikation som upprepad addition. 3 kan inte upprepas $\frac{2}{7}$ gång. Förklaringen bör därför bygga på räknelagarnas allmängiltighet. Vi utgår således från den kommutativa lagen för multiplikation, varvid samband som 9 · 3 = 3 · 9 kan generaliseras till $\frac{2}{7} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{2}{7}$, vilket i sin tur ger $3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{7}\right) = (3 \cdot 2) \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$. Det handlar om att använda räknelagarna och matematiska uttryck på ett genomtänkt sätt. Förmågan att på det här sättet kunna gå mellan olika sätt att uttrycka beräkningar ger eleverna en större säkerhet och *tilltro till sin förmåga att använda matematik*. Det är angeläget att eleverna lär sig förstå och uttrycka de här operationerna och att de inte bara lär sig en formel som de inte förstår. Sådana formler kan sällan generaliseras till nya situationer, t ex när de kommer till irrationella tal. Ju fler formler en elev tvingas lära sig utan att förstå, desto osäkrare blir eleven och desto mer obegriplig blir matematiken.

Multiplikation av två tal i bråkform

När vi introducerar multiplikation av två tal i bråkform som $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$, bör vi göra klart för eleverna att detta inte har samma *innebörd* som $\frac{2}{3}$ av $\frac{3}{5}$ även om resultaten blir desamma. Vi ser skillnaden i innebörd enklast om vi betraktar $\frac{1}{3}$ av 4 som betyder att 4 ska delas i 3 lika delar, vilket motsvarar divisionen 4/3. Detta innebär i sin tur att $\frac{2}{3}$ av 4 rimligtvis bör tolkas som dubbelt så mycket som $\frac{1}{3}$ av 4. Detta betyder i sin tur att 4 först delas i 3 lika delar och att man därefter tar 2 av dessa delar, vilket ger multiplikationen $2 \cdot 4/3$. Skrivet mer formellt innebär det att $\frac{2}{3}$ av $4 = 2 \cdot (\frac{1}{3}$ av $4) = 2 \cdot 4/3$.

Man bör även vara medveten om att det är komplicerat att konkretisera multiplikationer av två tal i bråkform. Ett vanligt försök till konkretisering av $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$ är att använda sig av formeln för rektangelns area. Om man utgår från en kvadrat med sidan 1 (dm) så kan den delas i tredjedelar och femtedelar enligt figuren. Man kan därefter skugga rektangeln med sidorna $\frac{3}{5}$ (dm) och $\frac{2}{3}$ (dm).



Om man accepterar att formeln för rektangelns area gäller även för tal i bråkform så bli arean av det skuggade området $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ (dm^2). Eftersom detta svarar mot $2 \cdot 3$ rutor av sammanlagt $3 \cdot 5$ rutor, kan rektangelns area tecknas $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$ (dm^2). Den här illustrationen kan vara ett bra stöd för att komma ihåg hur vi multiplicerar två tal i bråkform, men det är inte något bevis.

När eleverna har kommit så här långt i sin matematikinlärning bör läraren tala om att matematik som ämne inte handlar om konkretisering eller vardagsmatematik, utan är en abstrakt och generell vetenskap. Den grundläggande matematiken bygger visserligen på ett antal räknelagar och räkneregler som oftast låter sig konkretiseras, men när talområdet utvidgas, först till rationella tal och senare till irrationella tal och komplexa tal, försvinner möjligheterna att konkretisera, helt enkelt för att operationerna inte har någon (enkel) förankring i elevernas värld. Det är därför angeläget att efter hand göra klart för eleverna att de istället för att kräva en konkretisering som inte finns, lär sig att använda matematikens spelregler. Vad eleverna samtidigt bör göras medvetna om, är att räknelagarna och de flesta räkneregler som de har lärt sig under de första skolåren, även gäller för rationella tal och irrationella tal. I kursplanens syfte skulle detta kunna motsvaras av att *reflektera över matematikens betydelse, användning och begränsning i vardagslivet ...*

Det är således viktigt att eleverna när de arbetar med tal i bråkform får använda sig av, och reflektera över, räknelagar och räkneregler. Detta underlättar dessutom förståelsen av motsvarande operationer inom algebran. Ett exempel på detta är följande:

Vid en multiplikation som $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ lär sig eleverna att de kan förkorta med 3. Men varför kan man förkorta en täljare med en nämnare, alltså ett antal med en enhet? En enkel förklaring är att $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$ vilket i sin tur, enligt kommutativa lagen för multiplikation, kan skrivas om som $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 5}$. Detta kan i sin tur skrivas $\frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = 1 \cdot \frac{2}{5}$, vilket förklarar förkortningen. Det är viktigt att som lärare hela tiden föra resonemang av det här slaget med eleverna. Det här handlar enligt kursplanens syfte om att *reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat* och om att *argumentera logiskt och föra matematiska resonemang.* Det är detta som skiljer rutinartad räkning från matematik.

Division av ett tal i bråkform med ett naturligt tal

Division av ett tal i bråkform med ett naturligt tal kan göras på liknande sätt som multiplikation av ett tal i bråkform med ett naturligt tal. En division av typen $\frac{6}{7}/3$ bör då tolkas som 6 sjundedelar dividerat med 3, där sjundedelen är en enhet. 6 sådana enheter dividerat med 3 ger 2 enheter. Detta fungerar på samma sätt som om man ska dela 6 burkar läsk på 3 personer, vilket ger 2 burkar var. Det här är ett exempel på *delningsdivision* (likadelning).

Vi kan också resonera så här: $\frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ vilket vi kan dela upp i tre delar $\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right)$ eller som $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}$ där varje del utgör svaret. Genom att på det här sättet presentera och diskutera ett matematiskt innehåll, i det här fallet delningsdivision, på olika sätt och ur olika synvinklar, kan man skapa en variation i undervisningen som gynnar såväl förståelse som inlärning. Inledningsvis är det viktigare att eleverna förstår hur detta hänger ihop, och kan resonera på det här sättet, än att de lär sig en formel av typen $\frac{6}{7}/3 = \frac{6}{7}/\frac{3}{1} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{21}$, något många elever har svårt att såväl acceptera som komma ihåg. I en del situationer kan det också vara praktiskt att använda sig av att $\frac{6}{7}/3$ kan uttryckas som $\frac{1}{3}$ av $\frac{6}{7}$ och omvänt. Detta är ett nytt exempel på nyttan av att hantera olika matematiska uttryck. När inte det ena uttrycket fungerar (eller man inte vet hur den ska användas) är det viktigt att kunna uttrycka sig på ett alternativt sätt.

Det som just har beskrivits kan enkelt generaliseras till tal i decimalform, t ex till $\frac{1}{4}$ av 0,36 (en fjärdedel av 0,36). Här bör 0,36/4 tolkas som 36 hundradelar/4, vilket ger svaret 9 i enheten hundradelar, alltså 0,09. Vid den här typen av uppgifter gäller det att uppmärksamma de elever som får svaret 0,9. Orsaken till den typen av fel brukar vara att de läser talet som noll komma trettiosex (utan att reflektera över innebörden) och att 36/4 = 9 då leder till svaret 0,9. Eleverna bör istället hantera talet 0,36 som $\frac{36}{100}$ och läsa det som 36 hundradelar. Det är angeläget att läraren föregår med gott exempel och är noga med den terminologi som används.

Även uppgifter som $\frac{6}{7}/5$, där 6 inte är delbart med 5 kan lösas med den just beskrivna metoden. Eftersom varje bråk kan skrivas på olika sätt är det bara att skriva om $\frac{6}{7}$ så att täljaren blir delbar med 5, t ex som $\frac{30}{35}$. Lösningen blir då $\frac{30}{35}/5 = \frac{6}{35}$. Skriver vi detta som $\frac{6}{7}/5 = \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{6}{7 \cdot 5}$, får vi samtidigt en förklaring till varför man kan få svaret genom att multiplicera nämnaren med 5. Däremot vore det olyckligt om eleverna uppfattar operationen $\frac{6}{7}/5 = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{5}$ som ett "hokus pokus", vilket riskerar att undergräva tron på matematik som logisk och förståelig.

Division av två tal i bråkform

Nu återstår division av två tal i bråkform. Vi börjar med två bråk där nämnarna är lika stora, såsom i divisionen $\frac{6}{7}/\frac{2}{7}$. Eleverna bör uppfatta detta som en innehållsdivision, alltså som frågan hur många gånger 2 sjundedelar ryms i 6 sjundedelar. Svaret är 3 gånger, vilket ger kvoten 3. Lägg märke till att detta är samma frågeställning som hur många 2-litersflaskor som krävs för att det ska bli 6 liter.

Vi kan också resonera mer formellt, utgående från grundläggande begrepp. Talet $\frac{6}{7}$ kan skrivas som $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)$ eller som $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$. Det framgår då att $\frac{2}{7}$ ryms (går upp) 3 gånger i $\frac{6}{7}$ eller uttryckt på ett annat sätt som att $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$. Återigen handlar det om att välja lämpliga *matematiska uttrycksformer*. Det gäller också att ha *förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp* och att eleverna kan beskriva, resonera och kommunicera matematik.

I det här avsnittet har vi hittills inte använt några formler utan enbart resonerat oss fram till ett svar utgående från grundläggande begrepp och räknelagar. På det sättet blir räkning med tal i bråkform avdramatiserat och inte svårare än räkning med naturliga tal.

Genom att ta ytterligare ett steg kan vi visa varför $\frac{6}{7}/\frac{2}{5} = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{2}$ gäller. Vi använder den ovan beskrivna metoden, men skriver först om de två bråken så att de får samma nämnare, alltså som $\frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5}/\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7}$. Eftersom nämnarna är lika (samma enhet) är det då frågan hur många gånger täljaren $2 \cdot 7$ ryms i täljaren 6 · 5 vilket leder till divisionen (6 · 5) / (2 · 7) och svaret $\frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 2}$.

Läs mer

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2. Rationella tal och irrationella tal* (kapitel 10). Malmö: Liber Hermods.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik* (kapitel 11). Lund: Studentlitteratur.

Att diskutera

- Diskutera ur ett årskurs 1 till 9-perspektiv de matematikdidaktiska modeller som presenteras i det här avsnittet i relation till motsvarande diagnosresultat på den egna skolan. Vad har eleverna redan förstått och vilka missuppfattningar är vanliga? Hur ska man i undervisningen undvika att dessa missuppfattningar uppstår?

- Diskutera resultaten och vanliga missuppfattningar i relation till innehållet i aktuella läromedel och till syfte och centralt innehåll i kursplanen till Lgr 11.
- Ställ upp preliminära mål för Rationella tal och deras egenskaper och för en preliminär diskussion om när olika delmoment bör introduceras i undervisningen.
- Det har tydligt framkommit i texten att resonera matematik är viktigt och det kan vara lätt att underskatta elevernas förmåga till att föra resonemang. Vilka resonemang för du med dina elever? Kan ni tillsammans utforma några uttryck för multiplikation och division av bråk som ni kan använda i undervisningen som utgångspunkt för att resonera er fram till lösningen.

Att planera

Gör en preliminär plan som omfattar när och hur det aktuella innehållet ska tas upp i undervisningen, samt vilka undervisningsmetoder som kan användas. När alla de sju avsnitten är genomgångna ställs de preliminära planerna samman till en komplett plan.

Förslag till kollegialt arbete

Välj ut ett av de ovan beskrivna delområdena där måluppfyllelsen är mindre bra. Planera och genomför en eller flera lektioner enligt idéerna i det här avsnittet. Utvärdera och diskutera såväl undervisningen som resultatet. Om resultatet inte är tillfredsställande, modifiera planeringen och undervisningen tills ett tillfredsställande resultat uppnås.

Sambandet mellan tal i bråk- och decimalform

6

Syfte: Att ge ett didaktiskt underlag för att introducera och operera med de rationella talen i decimalform. Samtidigt utreds egenskaper hos de rationella talen som uppräknelighet och periodisk decimalutveckling.

Förberedelser: De deltagare som gett Diamantdiagnoserna RD1, RD2, RD3, RD4 och RD5, tar med resultaten och förbereder en presentation av och diskussion om dem. Alla bör även i förväg ha läst igenom följande text.

Under de senaste tiotal åren har allt fler läromedel, och därmed undervisande lärare, tonat ned arbetet med tal i bråkform med motiveringarna att bråkräkning dels är svårt, dels numera har försvunnit från vardagslivet. Man menar att det därför är viktigare att satsa på arbetet med decimaltal. Det här resonemanget bygget på tre fundamentala misstag. För det första handlar skolans matematik inte enbart om vardagens matematik. Som tidigare påpekats är räkningen med bråk en viktig förkunskap för algebran. Tonar man ned bråkräkningen får detta allvarliga konsekvenser för alla de elever som förväntas arbeta med algebra eller läsa mera matematik, något som blivit uppenbart på såväl gymnasieskolor som högskolor. För det andra är inte operationerna med tal i bråkform svåra att förstå, vilket vi visat i det här materialet. Svårigheterna kan i själva verket härledas till att man i skolan använt gammalmodiga och alltför formella undervisningsmetoder. För det tredje så har inte elevernas förmåga att arbeta med tal i decimalform blivit bättre, vilket framgår av följande resultat. Undersökningen som utförts på våren i årskurs 6 och årskurs 8 och beskriver elevernas förmåga att utföra grundläggande operationer med tal i bråkform (Löwing, 2008, s 231).

		Lösningsfrekvens i åk 6	Lösningsfrekvens i åk 8
Beräkna	$0{,}54 + 0{,}52$	50 %	65 %
Beräkna	$7{,}2 - 3{,}9$	48 %	64 %
Beräkna	$9 \cdot 1{,}50$	49 %	71 %
Beräkna	$0{,}7 \cdot 50$	31 %	60 %
Beräkna	$2{,}42 / 2$	62 %	76 %
Beräkna	$5 / 0{,}1$	11 %	51 %

Operationer med tal i decimalform

I stort sett alla de svårigheter eleverna har haft med de ovan beskrivna uppgifterna, beror på bristande förkunskaper. När man tidigare arbetade med tal i bråkform innan man introducerade decimaltalen, och det gör man fortfarande i de flesta andra länder, fick man räknereglerna för decimaltal gratis från bråktalen. Decimaltalet är ju enbart ett speciellt skrivsätt för en viss typ av tal i bråkform. Vi ska nu gå igenom uppgifterna i ovanstående tabell och kommentera dem.

$0{,}54 + 0{,}52$ betyder i själva verket 54 hundradelar + 52 hundradelar, där hundradelen är en enhet. Svaret blir således 106 hundradelar eller om man så vill 100 hundradelar + 6 hundradelar, alltså $1 + 0{,}06$. Det här handla om att kunna föra matematiska resonemang och om förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder. Man kan även använda sig av räknelagarna på olika sätt, t ex $0{,}50 + 0{,}04 + 0{,}50 + 0{,}02 = 0{,}50 + 0{,}50 + 0{,}04 + 0{,}02 = 1 + 0{,}06$.

$7{,}2 - 3{,}9$. Vi ser här ett nytt exempel på att eleverna inte förstår innebörden i decimaltalen. Genom att skriva om talen som 72 tiondelar – 39 tiondelar har subtraktionen övergått till att handla om naturliga tal. Svaret 33 tiondelar skrivs om som 3,3. För att utföra subtraktionen 72 – 39 i huvudet kan man göra ett lika tillägg av 1, viket ger 72 – 39 = 73 – 40, som leder till en relativt enkel operation i årskurs 6. Den elev som fått utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder, kan även direkt göra tillägget 0,1, vilket ger 7,2 – 3,9 = 7,3 – 4,0.

9 · 1,50. Här kan man t ex tolka 1,50 som 1 + 0,50. Man får då 9 (1 + 0,50) = 9 + 9/2 = 9 + 4,5, alltså 9 hela plus nio halva. En elev som har tilltro till sin förmåga kan dessutom leka lite med siffrorna. Eftersom 2 · 1,50 = 3, så är 4· 1,50 = 6 och 8 · 1,50 = 12. Till detta behöver man nu bara addera 1,50.

0,7 · 50. En elev som redan från skolstarten har uppmärksammats på räknelagarna, såsom den kommutativa och den associativa lagen för multiplikation, och fått använda dem i samband med huvudräkning bör inte få problem här. Man ser då direkt att 0,7 · 50 = 0,7 · 10 · 5 = 7 · 5. För den som kan förkorta ett bråk kan man också tänka sig 7/10· 50 = (7·5·10)/10. Det här handlar om *förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och tilltro till sin egen förmåga.*

2,42/2. Man kan här utnyttja att 2,42 = 2 + 0,42 eller 2 + 42 hundradelar. Genom att dela upp täljaren i två delar får man 2/2 = 1 och 42 hundradelar/2 = 21 hundradelar och svaret 1 hel och 21 hundradelar = 1,21.

5/0,1. Här kan man börja med divisionen 1/0,1, vilket kan uppfattas som en innehålls-division, alltså hur många deciliter det går på 1 liter. På 5 liter går det 5 gånger fler deciliter än på 1 liter.

Vi kan sammanfatta detta så här. Att operera med tal i decimalform förutsätter att eleven behärskar motsvarande operationer för tal i bråkform. Ett alternativ är att eleven från början lärt sig inse räknelagarnas betydelse, gärna i praktiska situationer, såsom vid huvudräkning. Det är därför angeläget att du som lärare noga tänker igenom hur den typen av kunskaper byggs upp efter hand.

Observera att det ämne som ska undervisas heter matematik, inte räkning. Det handlar därför inte om att lära ut isolerade metoder, vilka eleverna snabbt glömmer bort. Det gäller istället att lära eleverna att använda enkla resonemang utgående från räknelagar och räkneregler. På det sättet får de generellt fungerande verktyg som fungerar även när de glömt sina formler. Det är ett sådant förhållningssätt till matematik som beskrivits i texten.

Bråk som decimalutvecklingar

Innan det är dags för eleverna att utvidga talområdet till att omfatta de irrationella talen, bör de få fördjupa sig i de rationella talen och deras egenskaper. Detta handlar bl a om att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och att ge eleven förutsättningar att utveckla sina förmågor. Detta handlar också om att utveckla intresse för matematik och att uppleva möten med matematiska mönster, former och samband. Att alla elever i en klass inte förmår tillgodogöra sig ett visst innehåll får inte utgöra ett hinder för andra elever att få arbeta med matematik enligt kursplanens syfte och utveckla sina förmågor.

Vi inleder med att konstatera att alla tal i bråkform kan skrivas som decimalutvecklingar. Vissa sådana decimalutvecklingar är ändliga och kallades tidigare för decimaltal. Som exempel kan $\frac{1}{4}$ skrivas som 0,25. Andra tal i bråkform såsom $\frac{1}{6}$ kan inte skrivas som en ändlig decimalutveckling, men däremot som den periodiska decimalutvecklingen 0,**16**1616... alltså en oändlig rad, där siffrorna 1 och 6 upprepas oupphörligt.

Anledningen till att vissa tal i bråkform leder till periodiska decimalutvecklingar framgår av följande exempel där storleken av talet $\frac{1}{7}$ studeras genom den korta divisionen 1/7.

0,	1	4	2	8	5	7	1
1,	0					7	
	3	0					
		2	0				
			6	0			
				4	0		
					5	0	
						1	

När man kommit så här långt i divisionsalgoritmen återkommer siffran 1 på nytt. Det innebär att alla deldivisioner kommer att upprepas i samma ordning som tidigare. Resultatet blir således 0,**142857**142857142857 ... där talraden 142857 upprepas i all oändlighet. Nästa fråga är varför det blir så?

Förklaringen är enkel. När man dividerar med 7 kan man bara få resterna 1, 2, 3, 4, 5 och 6 (annars går ju divisionen upp). Det betyder att man senast vid den sjunde deldivisionen måste få upp ett tidigare tal, i det här fallet blev det resten 1. Därefter upprepas alla del-operationer på nytt och i samma ordning som tidigare. Detsamma gäller för alla andra bråk. Som exempel svarar bråket mot divisionen 37/492 som bara kan få resterna 1, 2, 3, ..., 491. Senast vid den 492:a deldivisionen måste således en gammal rest komma upp och tidigare deldivisioner upprepas. I det här fallet dyker en tidigare rest upp redan efter den sjätte deloperation, vilket ger $\frac{37}{492}$ = 0,07**52032**52032520325203...

Det här är ett bra exempel på *matematiska mönster ... och samband*.

Men är inte detta alldeles för svårt att förstå? Vi menar tvärtom. De flesta lärare bör kunna beskriva detta för sina elever på ett sådant sätt att även de lägst presterande eleverna kan följa med resonemanget. De har då fått följa ett *matematiskt resonemang*. För de elever som är intresserade av matematik har man samtidigt erbjudit en möjlighet att *uppleva estetiska värden i mötet med matematiska mönster, former och samband*.

Decimalutvecklingar som bråk

Man kan i det här sammanhanget reda ut en väsentlig skillnad mellan rationella och irrationella tal. En sådan skillnad är decimalutvecklingarna. Alla rationella tal, alltså tal i bråkform, kan som redan nämnts, skrivas som ett decimaltal eller som en periodisk decimalutveckling. Talet $\frac{1}{13}$ kan t ex skrivas som 0,**769230**769230 ... där siffrorna 769230 upprepas i all oändlighet. En intressant fråga är om omvändningen gäller, t ex om en godtycklig periodisk decimalutveckling, t ex 0,**123**123123 ... svarar mot ett tal i bråkform. Att det förhåller sig så, kan vi visa så här:

Vi börjar med att utgå från $x = 0{,}123123123123...$ Genom att multiplicera x med 1000 "flyttar" man decimalutvecklingen en period vilket ger $1000x = 123{,}123123123$ ... Vi utför därefter subtraktionen $1000x - x = 123{,}123123123 - 0{,}123123123$ ... vilket ger lösningen $999x = 123$. Detta kan även beskrivas i en algoritm

$$\begin{array}{rl} 1000x &= 123{,}123\,123\,123\ldots \\ -\quad x &= -0{,}123\,123\,123\ldots \\ 999x &= 123 \end{array}$$

Efter förkortning ger detta svaret $x = \frac{41}{333}$, vilket innebär att decimalutvecklingen 0,123123123 ... svarar mot det rationella talet $\frac{41}{333}$.

På motsvarande sätt kan man skriva varje periodisk decimalutveckling som ett tal i bråkform. Detta är en central egenskap som skiljer de rationella talen från de irrationella talen. Ett tal som 0,501150115011 ... är alltså ett rationellt tal medan talet 0,12123123412345 ... är irrationellt. Visserligen finner vi i det senare fallet ett intressant mönster, men det är inte periodiskt. Decimalutvecklingarna av irrationella tal som $\pi = 3{,}141592654$ ... och $\sqrt{5} = 2{,}236067978$ ... är således inte periodiska.

Något om bråkens historia

Från början använde man sig enbart av de s k stambråken, alltså bråk med täljaren 1 såsom $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ osv. Det betyder att ett tal som $\frac{5}{6}$ skrevs som $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ och $\frac{7}{12}$ som $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$. Alla tal i bråkform kan skrivas på det här sättet med hjälp av stambråk.

Det är det faktum att vi har tio fingrar som förklarar varför vi använder talbasen 10. Det är emellertid synd att vi inte har tolv fingrar och därmed talbasen 12. Talet 10 är ett s k fattigt tal, det har bara två delare, 2 och 5. Det är därför få tal som kan skrivas som ändliga decimalutvecklingar. Annorlunda är det med talet 12, som är ett rikt tal, delbart med 2, 3, 4 och 6. Det innebär att betydligt fler tal kan skrivas som tolftedelar än som tiondelar.

Bara $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{5}$ kan skrivas som tiondelar, alltså som $\frac{5}{10}$ och $\frac{2}{10}$. Som tolftedelar kan man däremot skriva $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ och $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$.

I ett positionssystem med basen 12 skulle man därför ha skrivit $\frac{1}{2} = 0{,}6$, $\frac{1}{3} = 0{,}4$, $\frac{1}{4} = 0{,}3$ och $\frac{1}{6} = 0{,}2$. Dessutom skulle $\frac{1}{8}$ ha skrivits som 0,16 och $\frac{1}{9}$ som 0,14.

Detta förklarar varför talet 12 länge var en viktig talbas vid längdmätning (12 tum på en fot), vid mätning av tid (12 timmar på ett halvt dygn och 12 månader på ett år), vid växling av pengar (12 pence på en engelsk shilling) osv. Läs gärna mera om detta i Ohlon (1986).

Tidigt i historien använde sumererna ett talsystem med basen 60 som också är ett rikt tal (och en multipel av 12). Sumerernas intresse för astronomi och tidmätning, ledde till att timmar (och grader) fortfarande är uppdelade i 60 minuter och en minut i 60 sekunder. Det är därför enkelt att beskriva en kvart som 15 minuter. Eftersom 60 är ett rikt tal, var det även enkelt för sumererna att beskriva bråkdelar i bas 60 och att utföra beräkningar med bråk. Läs mera om detta i t ex Kilborn (1990).

Binära tal (alltså ett positionssystem med basen 2) ligger till grund för datorernas aritmetik, och det kan därför vara intressant att studera hur bråk kan beskrivas i ett sådant talsystem.

För att göra detta måste vi först veta att $\frac{1}{2}$ skrivs 0,1, $\frac{1}{4}$ skrivs 0,01, $\frac{1}{8}$ skrivs 0,001 osv. Talet 0,101 betyder således $\frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. Omvänt skrivs talet $\frac{13}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ som 0,1101.

Bråk vars nämnare inte är en multipel av 2, blir i det här fallet periodiska. Som exempel är $\frac{1}{3} = 0{,}010101\ldots$ och $\frac{1}{5} = 0{,}001100110011\ldots$

Läs mer

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2. Rationella tal och irrationella tal.* Malmö: Liber Hermods.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik.* Lund: Studentlitteratur.

Ohlon,R. (1986). *Gamla mått och nya.* Stockholm: Ingenjörsförlaget.

Att diskutera

- Diskutera ur ett årskurs 1-9 perspektiv de matematikdidaktiska modeller som presenteras i det här avsnittet i relation till motsvarande diagnosresultat på den egna skolan. Vad har eleverna redan förstått och vilka missuppfattningar är vanliga? Hur ska man redan från skolstarten göra eleverna uppmärksamma på räknelagar och räkneregler och på det sätt ge dem reella möjligheter att förstå matematiska mönster, strategier, metoder, modeller och resultat.
- Diskutera resultaten och vanliga missuppfattningar i relation till innehållet i aktuella läromedel och till syfte och centralt innehåll i kursplanen till Lgr 11.
- Ställ upp preliminära mål för Rationella tal och deras egenskaper och för en preliminär diskussion om när olika delmoment bör introduceras i undervisningen.

- Hur ska man kunna individualisera undervisningen på ett sådant sätt att även de duktigare eleverna ska få möjligheter att utveckla sina kunskaper och bygga upp ett intresse för matematik.

Förslag till kollegialt arbete

Välj ut ett av de ovan beskrivna delområdena där måluppfyllelsen är mindre bra. Planera och genomför en eller flera lektioner enligt idéerna i det här avsnittet. Utvärdera och diskutera såväl undervisningen som resultatet. Om resultatet inte är tillfredsställande, modifiera planeringen och undervisningen tills ett tillfredsställande resultat uppnås.

Bråk som förkunskap till algebra

7

Syfte: Att ge ett didaktiskt underlag för att generalisera operationer av bråk till motsvarande operationer inom algebran. Detta innebär att eleven bör göras uppmärksam på vilka regler som används vid bråkräkning, vilket i sin tur är en generalisering av reglerna för att operera med hela tal.

Förberedelser: Alla bör även i förväg ha läst igenom följande text

De regler och metoder som gäller för bråkräkning, genomsyrar även arbetet med algebra. Av det skälet är det angeläget att alla elever behärskar grundläggande bråkräkning på ett sådant sätt att kunskaperna i bråkräkning kan generaliseras till algebran. Man kan även uttrycka detta som att bråkräkning fungerar som en konkretisering av stora delar av algebran. Vi ger nu några exempel på detta.

Förlängning och förkortning av enkla algebraiska uttryck

Förlängning och förkortning av algebraiska uttryck bygger på att man har förstått förlängning av motsvarande bråk, såsom att $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15}$ ... Kopplingen till algebran blir tydligare om vi gör en faktoruppdelning. Ett bråk som $\frac{9}{15}$ kan då skrivas som $\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3}$, vilket kan förkortas med 3 till $\frac{3}{5}$. Samma idé kan även användas för att visa att $a^5/a^3 = a^2$. Vi skriver då om a^5/a^3 som $\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a}$ och förkortar med a^3 (eller med a tre gånger).

På det här sättet kan man förbereda eleverna inför arbetet med algebraiska förenklingar.

Ett binom som $(2a + b)$ står för ett tal på samma sätt som a eller 7 gör det. Det är det som är innebörden av parentesen. Det betyder att $\frac{(2a+b)(2a-b)}{2a+b}$ kan förkortas med $(2a + b)$, på samma sätt som $\frac{9}{15}$ kan förkortas med 3, eftersom samma faktor, $(2a + b)$, finns i både täljare och nämnare. Detta ger resultatet $(2a - b)$. På samma sätt kan $\frac{a \cdot b}{a}$ förkortas med a vilket ger resultatet b.

Den här typen av förkortning skapar ibland förvirring. Vart tar $2a + b$ respektive a i nämnarna vägen efter förkortningen, och vad blir det kvar? För att förklara detta kan vi till en början skriva om uttryck som $\frac{a \cdot b}{a}$ i formen $\frac{a \cdot b}{a \cdot 1}$. Det blir då tydligt varför det efter förkortning med a blir en etta kvar i nämnaren.

En annan utmaning gäller uttryck som $\frac{3x+6}{3}$, där elever ofta förkortar konstanterna och får felaktiga svar som $\frac{3x+2}{1}$ eller $\frac{x+6}{3}$. I det här fallet har de inte förstått att täljaren ska uppfattas som ett tal, $(3x + 6)$, och att talet vid förkortning inte kan delas upp i termer, enbart i faktorer, alltså som $3(x + 2)$. För att göra det ännu mer övertygande kan vi istället dela upp hela bråket $\frac{3x+6}{3}$ i två termer, som $\frac{3x}{3} + \frac{6}{3}$, vilket ger det önskade svaret $x + 2$.

Det är genom att resonera med eleverna och *kommunicera matematik* på det här sättet, och genom att låta dem variera *matematikens uttrycksformer* och strategier, som vi ger eleverna möjligheter att vid osäkerhet pröva alternativa metoder. Detta ger dem större säkerhet och därmed större *tilltro till sin förmåga att använda matematik*.

Operationer med algebraiska uttryck

För många elever är de algebraiska operationerna ett ”hokus pokus” som de inte förstår och därmed saknar tillit till. Av det skälet kan det vara klokt att till en början knyta an ett antal räkneoperationer till motsvarande operationer för tal i bråkform. Det handlar då om att reflektera över valda strategier, modeller, metoder och att utveckla en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer.

När vi ska addera och subtrahera tal i bråkform skriver vi först om bråken så att de får samma nämnare. Vid additionen $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ väljer vi först den gemensamma nämnaren $3 \cdot 4 = 12$ vilket ger additionen $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3+4}{12}$.

För den som behärskar den här tekniken blir det inte svårare att utföra addi tionen $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Vi väljer då den gemensamma nämnaren $a \cdot b$ vilket ger additionen $\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{a+b}{ab}$.

På motsvarande sätt kan vi knyta multiplikationer som $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ till bråkräkningen genom att skriva om $\frac{b}{c}$ som $b \cdot \frac{1}{c}$ vilket ger $a \cdot \frac{b}{c} = a \cdot b \cdot \frac{1}{c}$ och $ab \cdot \frac{1}{c} = \frac{ab}{c}$. Detta fungerar på precis samma sätt som multiplikationen

$$2 \cdot \frac{3}{7} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{7} = 6 \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

Även divisioner som $\frac{a}{b}/c$ följer det mönster som beskrivits tidigare. Vi skriver om bråket så att täljaren blir delbar med *c*, alltså som $\frac{ac}{bc}$ vilket ger divisionen

$$\frac{ac}{bc}/c = \frac{1}{bc} \cdot ac/c = \frac{1}{bc} \cdot a = \frac{a}{bc}.$$

En intressant fråga är om det är så här vi ska arbeta med algebraiska operationer. Nej, ofta kan det gå snabbare att använda de konventionella formlerna, men det är inte det som är poängen. Vad som här avses är en förståelse av hur räknelagar och räkneregler kan generaliseras från tal i bråkform till algebra och även till operationer med irrationella tal såsom kvadratrötter. För elever som har fått möta resonemang av det här slaget är det lättare att acceptera och förstå algebraiska regler och formler, vilket ger dem *tilltro till sin förmåga*.

Uppdelning av algebraiska uttryck i faktorer

När eleverna har arbetat med att multiplicera uttryck som $x(x + 1)$ och $(x - 1)(x + 3)$, är det dags att ta nästa steg, nämligen att dela upp uttryck i faktorer. En ekvation som $x^2 + x = 0$ kan t ex lösas genom att vi bryter ut x. Vi skriver alltså om ekvationen som $x(x + 1) = 0$. Detta ger direkt rötterna (lösningarna till ekvationen) $x = 0$ och $x = -1$. Principen för detta finner vi ofta i uppgifter av typen:

Produkten av Annas och Bos ålder är 35 år. Hur gamla är barnen Anna och Bo?

Om vi räknar åldern i hela år så finner vi svaret genom faktoruppdelningen $35 = 7 \cdot 5$. Alternativet $35 \cdot 1$ duger inte eftersom båda ska vara barn. Uppgifter av det här slaget ska således inte användas enbart som ”kluringar”. De har en viktig pre-algebraisk funktion.

På motsvarande sätt kan vi lösa ekvationer av typen $x^2 + 2x - 3 = 0$, genom faktorisering, vilket ger $(x - 1)(x + 3) = 0$ och rötterna $x = 1$ och $x = -3$. För den som vet att koefficienten till x-termen är rötternas summa med ombytt tecken och att konstanten (-3) är rötternas produkt blir det lätt att genomskåda detta.

För den som har förstått dessa algebraiska sammanhang är det inte heller så svårt att inse att uttryck som $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$ kan skrivas som $\dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)}$ och förkortas till $\dfrac{x-2}{x}$.

Det här handlar om att *utveckla kunskaper för att kunna tolka matematiska situationer samt formulera och beskriva dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer.* Genom att undervisa om detta i grundskolan ger vi eleverna ökade möjligheter att tillgodogöra sig undervisning på gymnasieskolan. På så sätt underlättar vi för eleverna att senare förstå arbetet med gränsvärden och derivata i gymnasieskolan.

Men ska eleverna verkligen lära sig detta i grundskolan? Ett svar på den frågan är att det i texten ovan inte står *lära* utan *undervisa*. Det handlar om vad elever, med en lärares hjälp, kan uppfatta. De flesta elever kan förstå betydligt mer än de på egen hand kan uttrycka eller behärska. Även en passiv kunskap om den just beskrivna algebran kan vara värdefull för att eleverna ska se nya helheter inom matematiken och för att de senare ska kunna fördjupa kunskapen. Detta kan tom vara helt avgörande för att elever, som läser mera matematik på gymnasieskolan, ska förmå att följa med i undervisningen.

Ett annat svar på frågan har med kontinuitet att göra. För att man som lärare ska kunna gör en genomtänkt planering, måste man veta vad eleverna på sikt ska ha sina kunskaper till. Erfarenheter från gymnasieskolor och högskolor visar att många av dagens elever har stora problem med algebran, vilket is in tur får konsekvenser inom funktionsläran. Det viktigaste skälet till detta är att de inte lärt sig använda räknelagarna på ett insiktsfullt sätt. Vad vi i det här avsnittet visat på är hur ett insiktsfullt arbete med tal i bråkform enkelt kan generaliseras till algebraiska operationer. Detta måste förutses av dig som lärare i din lokala planering.

Läs mera

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2. Rationella tal och irrationella tal*. Malmö: Liber Hermods. Kapitel 10.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik*. Lund: Studentlitteratur. Kapitel 11.

Ohlon,R. (1986). *Gamla mått och nya*. Stockholm: Ingenjörsförlaget.

Kilborn, W. (2013). Algebra i skolan. I K Wallby m fl (red), *Matematikundervisning i praktiken*, *NTema 10*, (s 422–434). NCM, Göteborgs universitet.

Summering

De preliminära planer som tagits fram efter hand och de erfarenheter som utbytts under kursens gång, kan nu sammanställas till en hel sammanhängande plan för arbete med rationella tal. Denna plan bör i sin tur utprövas och diskuteras under ett läsår för att därefter revideras och prövas på nytt. Titta igenom vad ni har tagit fram för planer under tiden ni läst alla kapitel och samla ihop allt material. Fattas något? Finns en röd tråd? Har ni kommit på andra tankar genom att ha läst lite mer?