

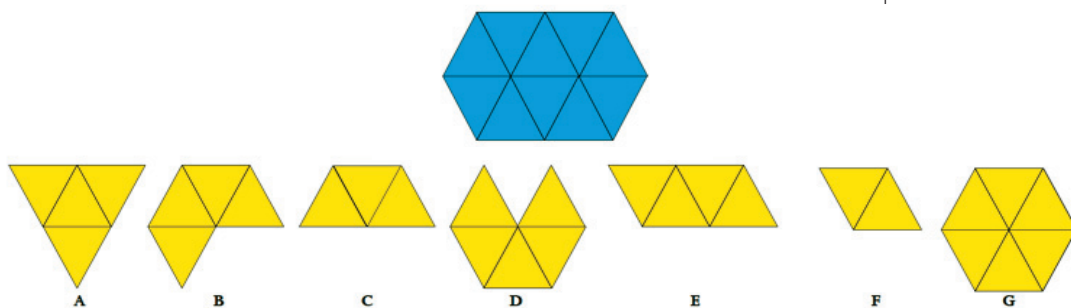


Matematik ligger till grund för datateknikens tillblivelse och utveckling. Modern algoritmt teori skapades främst för att ta tillvara de allt snabbare maskinernas möjligheter genom att förse dem med effektiva metoder för behandling av stora antal *entiteter* (i följande problem exempelvis barn, mössor, glassar eller tält). *Matchning*, dvs att hitta uppsättningar av par som uppfyller vissa villkor, är exempel på sådan behandling. Problema vdelningen handlar denna gång om matchning. De två första problemen kan användas i grundskolans tidiga årskurser, sedan stiger svårighetsnivån snabbt för att i femte problemet nå Nobelprisivå. Ett väl valt problem per lektion, eventuellt med fördjupande diskussion, kan vara en lagom dos av stimulerande problemlösning för många elever.

4001 Det finns 12 barn på avdelningen Skrållan. Tre barn har på sig blåa overaller, tre har gröna, tre gula och tre röda. Det finns också fyra blåa, fyra gröna och fyra röda mössor. Kan man ge mössor till varje barn så att alla ser olika ut? Hur?

4002 Alla figurer nedan består av lika stora liksidiga trianglar. Vilka två av de gula pusselbitarna kan täcka den blå figuren utan att delar av bitarna överlappar varandra eller sticker ut?

Finns det fler sådana par? Hur blir det om man får använda tre pusselbitar?



4003 Du får besök av fem barn och vill bjuda dem på glass. Varje barn får en strut med två kulor glass av olika smak.

Alice tycker om vanilj, smultron och pistage.

Erik tycker om smultron, pistage och choklad.

Ida tycker om pistage, choklad och aprikos.

Oscar tycker om choklad, aprikos och vanilj.

Klara tycker om aprikos, vanilj och smultron.

Du gör färdigt fem glassar innan barnen kommer, så att varje barn kan välja en glass med två av sina favoritsmaker, oberoende av i vilken ordning de väljer glass. Vi antar att varje barn väljer en glass med sina favoritsmaker när det finns en sådan. Hur ska du då göra i ordning glassarna?

Om vaniljglassen är slut, kan du klara det ändå?

4004 Tio scouter ska ut på tvådagarsvandring. De ska övernatta i skogen två och två i fem tält. De får välja vem de vill dela tält med.

Hampus säger: Helst vill jag dela tält med Linus och får jag inte det så vill jag dela tält med Rasmus.

Linus säger: Helst vill jag dela tält med Rasmus och får jag inte det så vill jag dela tält med Hampus.

Rasmus säger: Helst vill jag dela tält med Hampus och får jag inte det så vill jag dela tält med Linus.

Ledaren väljer fem tillfälliga par, ger ett tält till varje par och säger: Om det finns två vänner som hamnat i olika tält och som vill dela tält med varandra i stället för med de tältkamrater som de nu har, går det bra att byta. En av er byter med sin väns tältkamrat. Ni kan fortsätta med sådana byten tills alla blir nöjda.

Hur många byten får scouterna göra innan "alla blir nöjda", dvs tills det inte finns två scouter som hellre vill dela tält med varandra än med sina nuvarande tältkamrater?



4005 Fem pojkar och fem flickor tyckte att det var jobbigt att byta partner. Vi försöker hjälpa dem att hitta en partner som de skulle kunna hålla fast vid. Vi frågade Fridolf vilka flickor han tyckte mest om. Han svarade: "Jag tycker mest om Bodil, näst mest om Dorotea och sedan Carina. Agnes tycker jag också om, men går inte det så kan jag även tänka mig Eleonora."

Vi skriver hans preferenslista kort:
Fridolf: B D C A E

Vi ställde likadana frågor till de andra pojkarna och fick följande svar:

Gunnar: D C E A B
Hjalmar: D B A E C
Ivar: A E D C B
Kasper: B E C D A

Sedan frågade vi flickorna vilka pojkar de tyckte mest om och fick följande svar:

Agnes: H K F G I
Bodil: I G H F K
Carina: H I F K G
Dorotea: F I K G H
Eleonora: H F G K I

Ordna pojkarna och flickorna i par, en pojke och en flicka i varje, så att det inte finns två som inte är ett par men skulle föredra att bli det.

Svar, ledtrådar och kommentarer

4001
De tre barnen med blåa overaller får tre mössor i olika färger och på samma sätt får barnen med gröna, gula och röda overaller tre olikfärgade mössor.

4002
B och G. Tre pusselbitar kan väljas på två sätt: C, D och F eller B, E och F.

4003
Vi gör ett försök: vanilj/smultron för Alice, smultron/pistage för Erik, pistage/choklad för Ida, choklad/aprikos för Oscar och aprikos/vanilj för Klara. Men vad händer om de väljer

på ett annat sätt? Oscar kan tänkas välja en glass med aprikos och vanilj som var tänkt för Klara, och om Alice tar sin vanilj- och smultronglass finns det inte kvar någon glass med Klaras favoritsmaker. Det duger inte.

Ett nytt försök: vanilj/pistage, smultron/choklad, pistage/aprikos, choklad/vanilj och aprikos/smultron. Ja, nu finns det bara en glass till varje barn med deras favoritsmaker och vi kan veta vilken glass varje barn kommer att välja. Varje barn tar sin glass och det blir inga problem.

Utan vaniljglass blir det lite tråkigare men det går: två smultron/pistage, två choklad/aprikos samt en aprikos/smultron.

4004

De kan hålla på och byta hur länge som helst utan att alla blir nöjda. Vid varje tälttilldelning hamnar minst en av dessa tre pojkar (Hampus, Linus och Rasmus) "utanför", dvs i ett tält med någon utanför trion och då vill han byta. När Hampus hamnar utanför så kan han säga att han vill flytta ihop med Rasmus och Rasmus vill det också eftersom han allra helst vill dela tält med Hampus. Rasmus i samma situation flyttar ihop med Linus och Linus med Hampus.

Problemet att hitta en sådan parbildning att "alla blir nöjda" kallas inom algoritmteorin 'Stable roommates problem'. Ibland, som vi ser här, finns ingen stabil parbildning.

4005

Det kan göras på flera sätt, till exempel:

Fridolf – Dorotea
Gunnar – Carina
Hjalmar – Bodil
Ivar – Agnes
Kasper – Eleonora

eller

Fridolf – Dorotea
Gunnar – Eleonora
Hjalmar – Bodil
Ivar – Carina
Kasper – Agnes.

Båda matchningar uppfyller stabilitetsvillkoret, dvs det finns inte två som skulle vilja lämna sina partners för att tillsammans bilda ett nytt par.

Gales och Shapleys algoritm

Problem 4005 är ett exempel på 'Stable marriage problem' inom algoritmteorin. År 1962 presenterade David Gale och Lloyd Shapley en enkel men effektiv metod att lösa sådana problem, dvs att hitta matchningar mellan pojkar och flickor som uppfyller stabilitetsvillkoret.

Varje pojke följer sin preferenslista och frågar chans. Han går alltså först till den flicka som han tycker mest om, sedan näst mest osv. Om han är den förste som frågar flickan eller om hon tycker om honom mest av alla som har frågat så svarar

hon "kanske" och då stannar pojken och väntar, annars svarar hon "nej" och han får gå till nästa flicka på sin lista. Ett "kanske" binder inte flickan. Om det senare kommer en pojke som hon föredrar framför sin väntande kandidat säger hon "kanske" till den nye och den gamle får fortsätta med att fråga nästa flicka på sin lista. Så småningom får varje flicka sin kandidat och varje pojke är någon flickas kandidat. Då säger alla flickor "ja" och paren är bestämda.

Så enkelt! Det är också lätt att bevisa att det resulterar i en stabil matchning. Men vetenskapens framsteg är inte bara problemlösning utan också att ställa intressanta frågor, besvara dem och sedan gå vidare med resultaten.

Metoden kan naturligtvis användas även för annat än pojk- och flickvänner eller äkta makar. Det brukar också fungera ungefär så när man söker arbete, vill köpa en begagnad bil eller byta lägenhet. Lloyd Shapleys fortsatta forskning gällde beslutsprocesser i det verkliga livet. Han undersökte hur olika marknadsparter agerade i matchningssammanhang samt hur olika valstrategier gynnade eller missgynnade olika parter.

De två ovan givna svaren till problem 4005 är framtagna med hjälp av Gales och Shapleys algoritm, men det andra med pojkarnas och flickornas roller ombytta. Man kan se att metoden gynnar den aktiva sidan, i det första svaret gynnas pojkarna, i det andra flickorna.

Alvin Roth använde Sharpleys rön för att modifiera eller styra förfaranden som bland annat placering av nyutexaminerade läkare på olika sjukhus eller att välja njurdonatorer till patienter. Även vid placering av elever i kommunala skolor i några nordamerikanska storstäder används algoritmer som bygger på Roths arbeten.

Sveriges riksbanks pris i ekonomi till minne av Alfred Nobel 2012 tilldelades Alvin Roth och Lloyd Shapley för *the theory of stable allocations and the practice of market design*.

www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2012/

Leo Rubinstein