Nämnaren
på nätet

En trippelsumma och en låda med fack

Text och bild:
Lasse Berglund

Den grekiska bokstaven stora sigma, $\sum$, används i matematiken för att beskriva summor. Observera dock att denna summasymbol bara *beskriver* summan, den säger inget om hur man kan beräkna den. Exempel:

$\sum_{k=1}^{n} k^2$ Detta utläses: "Summa k i kvadrat, då k går från 1 till n."

Med $n = 4$ får vi: $\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

Låt oss nu betrakta en dubbelsumma: $\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(5j + 7k)$

Hur ska ett sådant här uttryck tolkas? Vi inleder med att titta på talmatrisen till höger, där vår avsikt är att beskriva summan av de tolv talen.

12	17	22	27
19	24	29	34
26	31	36	41

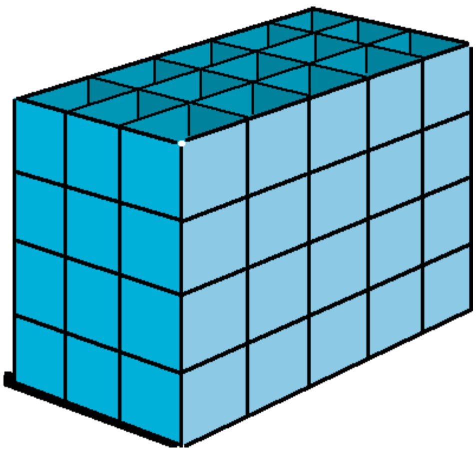
Vid en närmare betraktelse ser vi att talen är skrivna på en viss form; de ingår i olika aritmetiska talföljder. Vi skriver därför om talen, så att strukturen framgår.

$5\cdot1+7\cdot1$	$5\cdot2+7\cdot1$	$5\cdot3+7\cdot1$	$5\cdot4+7\cdot1$	$\sum_{j=1}^{4}(5j+7\cdot1)$
$5\cdot1+7\cdot2$	$5\cdot2+7\cdot2$	$5\cdot3+7\cdot2$	$5\cdot4+7\cdot2$	$\sum_{j=1}^{4}(5j+7\cdot2)$
$5\cdot1+7\cdot3$	$5\cdot2+7\cdot3$	$5\cdot3+7\cdot3$	$5\cdot4+7\cdot3$	$\sum_{j=1}^{4}(5j+7\cdot3)$

De tre radsummorna har alla formen $\sum_{j=1}^{4}(5j + 7k)$ där $k = 1, 2, 3$ i tur och ordning.

Vill vi nu beskriva summan av alla tolv talen i matrisen, får vi helt enkelt summera de tre radsummorna. Kompakt formulerat: $\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(5j + 7k)$

Detta var tolkningen av den givna dubbelsumman. Hur skulle man kunna tolka en trippelsumma? Ja, vårt tema är ju lådor och liknande, så låt oss därför för ändamålet leta fram en gammal kartong. Kartongen till höger består av ett antal fack i fyra lager. Varje fack innehåller ett värde i form av ett tal, ett tal som kan vara olika från fack till fack. Första facket innehåller värdet x_{111} och sista facket innehåller värdet x_{345}. Indexnumret anger fackets placering i kartongen. Om vi nu skulle vilja uttrycka det samlade värdet i kartongen, så faller det sig naturligt med en trippelsumma.



Värdet i kartongen $= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{5} x_{ijk} = x_{111} + x_{112} + \ldots + x_{344} + x_{345}$, totalt 60 termer.

Ett fantastiskt möte mellan rummet och planet

Nämnaren på nätet

Text och bild:
Lasse Berglund

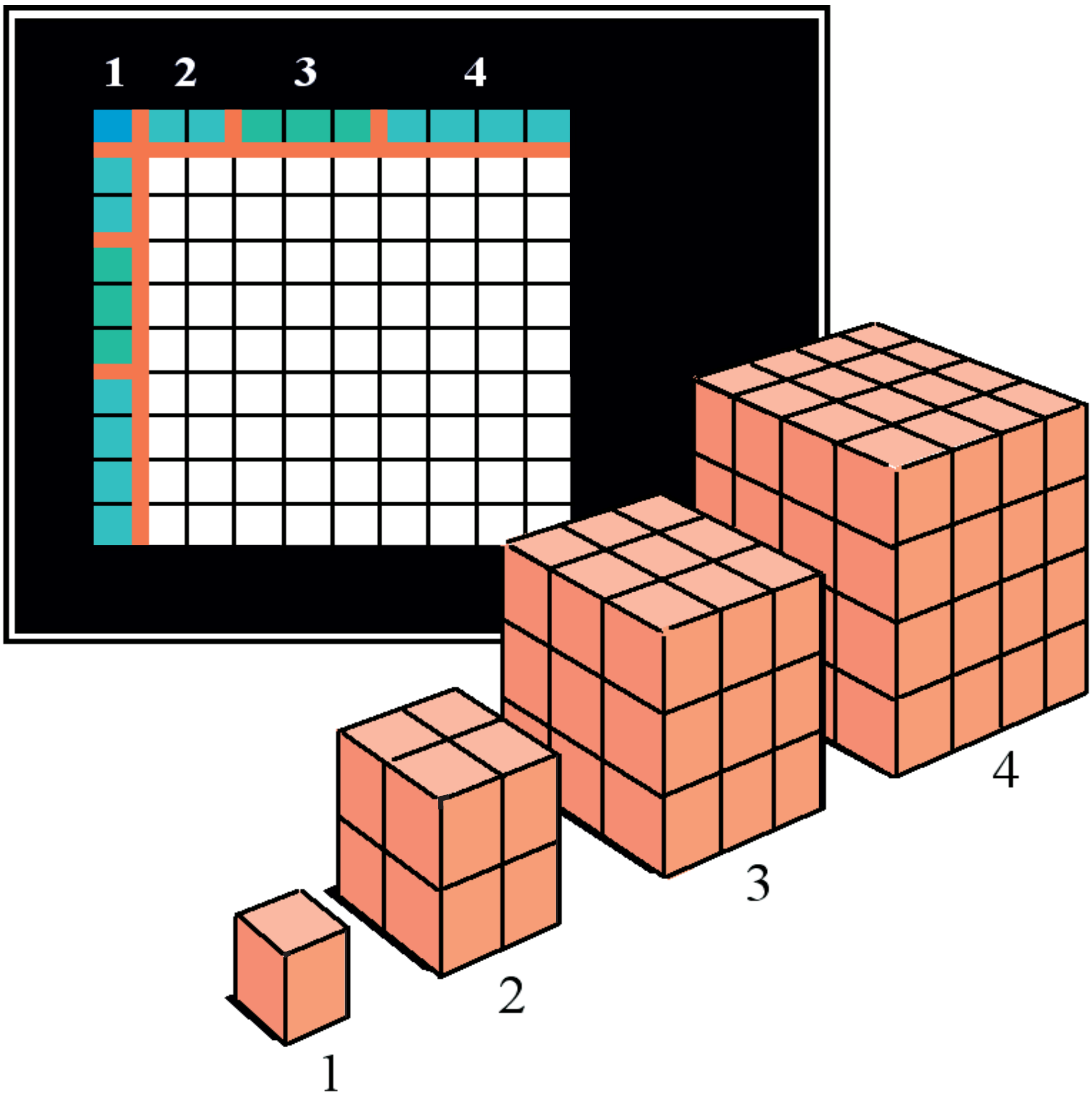
De två sambanden nedan kan vid en första betraktelse tyckas märkliga. I vänsterleden har vi R^3, dvs rummet, och i högerleden R^2; planet. Det mest märkliga är, att hur många termer man än tar med i summorna, så gäller likheten.

$$1^3 + 2^3 = (1+2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$$

Vad vi ser är att ”summan av kuberna är lika med kvadraten på summan”. Det som först framstod som märkligt är dock bara en chimär; med matematisk induktion kan man enkelt bevisa att sambandet gäller ända ut i oändligheten. Figuren nedan visar sambandet då antalet termer är fyra. Vi har att antalet småkuber är lika med antalet rutor.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$$



Eftersom vi nu är bekanta med summasymbolen, utnyttjar vi den och skriver sambandet ovan kompakt och, för den estetiskt lagde, elegant:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Som sagt: summan av kuberna är lika med kvadraten på summan. Vackert.