

Räkna med ägg

När elever möter matematikinnehåll genom arbete med konkret och laborativt material är det av vikt att steget från konkret arbete till abstrakt och generell matematik inte tas för snabbt. Eleverna bör ges möjlighet att också möta halvkonkreta och halvabstrakta representationer. Författaren beskriver hur elever kan utveckla sin taluppfattning genom en äggkartongsmodell.

Att utveckla taluppfattning genom att dela upp tal är mycket vanligt i de tidiga skolorna. Olika representationer används för att illustrera helhet och delar. Här vill jag presentera en modell som används bland annat i Nederländerna. Där använder man sedan länge äggkartonger med plats för tio ägg som taluppfattningsmodell. Äggkartongsmodellen gör det möjligt att stegvis gå från en konkret representation via halvkonkret och halvabstrakt till en helt abstrakt representation. Modellen används inledningsvis för att träna och befästa talbilder och kan sedan användas vid addition och subtraktion, först utan och senare med tiotalsovergångar. Vidare ger modellen möjlighet till differentiering, dels genom acceleration då elever går snabbare fram till nästa övning, dels genom berikning inom det matematiska område klassen arbetar med. Modellen är verkligen enkel: en äggkartong med plats för ett visst antal ägg.

Faserna i äggkartongsmodellen

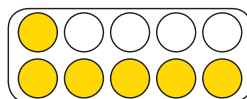
Först vill jag beskriva de olika abstraktionsnivåerna *konkret* – *halvkonkret* – *halvabstrakt* – *abstrakt*. James Heddens beskrev redan 1986 i artikeln *Bridging the gap between the concrete and the abstract* hur lärare kan hjälpa elever med övergången mellan de olika faserna. Dessa övergångar kommer att vara naturliga i äggkartongsmodellen, eftersom själva modellen ser olika ut i de olika faserna.

Konkret: Här använder eleverna den fysiska äggkartongen samt "riktiga" ägg; av praktiska skäl pingisbollar, flörtkulor, skumgummiägg eller något annat som liknar ägg.

Halvkonkret: Eleverna arbetar med en bild av äggkartongen. Bilden kan vara ett foto eller en tecknad bild av en äggkartong.

Halvabstrakt: I äggkartongsmodellen innebär den halvabstrakta fasen att den tecknade bilden abstraheras och att antalet ägg inte kan räknas längre utan symboliseras med hjälp av en siffersymbol.

Abstrakt: Här används enbart siffersymboler som $6 + ? = 10$. Eleven har lämnat tidigare faser och har äggkartongsmodellen som tankestöd men behöver inte ha den representerad vid uppgifterna.



Olika lärandemål – olika typer av uppgifter

Följande uppgifter har sina egna lärandemål och de följer naturligt på varandra som en röd tråd i lärandet inom taluppfattning. Vid varje uppgiftstyp kan eleven behöva gå igenom de olika faserna men det kan också vara så att vissa elever kan gå vidare direkt till en senare fas. Modellen lämpar sig att användas samtidigt i klassen i de olika faserna och, som i all undervisning, är det eleverna och läraren som styr vilken fas som är lämplig för varje individ.

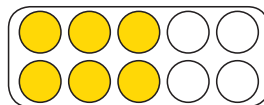
Talbilder

Arbetet i klassrummet börjar med den konkreta fasen där ägg och kartonger används. Exempelvis har man en äggkartong för åtta ägg, som fylls med ett visst antal ägg.



Hur många ägg är det i kartongen? Tals helhet och tals delar tränas. När eleverna ska berätta hur det "vet" att det är sex ägg i kartongen kan de räkna på olika sätt. Vissa räknar ett ägg åt gången enligt ett-till-ett-principen, andra delar upp talet i grupper som de "ser". I exemplet ovan skulle några elever svara att de tar 4 (raden längst upp) + 1 + 1 (de övriga äggen ett i taget), en annan elev räknar 4 + 2 och ytterligare någon elev räknar 2 + 2 + 2.

Modellen stimulerar till att ta steget från räknande till att se talet som en mängd. För att talbilderna ska befästas gäller det att erbjuda olika exempel av en mängd.



Uppdelning av mängden 6 i $5 + 1$ och $3 + 3$ blir nu mycket tydligt. Både den konkreta och halvkonkreta fasen kan användas här och olika talbilder för talet 6 behöver integreras för att ge eleverna en god taluppfattning. Vidare ger uppdelningen möjlighet att arbeta med dubblering samt talbilder av udda och jämna tal.

Talbilder med flashcards

För arbete i helklass kan man sedan fortsätta arbeta halvkonkret, alltså med en tecknad bild av äggkartongen. I detta fall med 'flashcards', dvs inplastade kort där man kan ange olika antal ägg genom att fylla i cirklarna med tuschpennor.

Kortet hålls upp för eleverna ett antal sekunder, varefter de får säga hur många ägg det var. Talbilderna tränas återigen och när eleverna får redovisa hur de räknar äggen får läraren en bra inblick i vilka elever som räknar enligt ett–till–ett-principen, vilka som redan delar upp tal och för vilka elever talrad och antal inte är synkroniserade än.

Talkompisar

När talbilderna är någorlunda befästa kan eleverna fortsätta arbeta med uppdelning av tal. Hur många ägg finns det i äggkartongen? Hur många tomma platser finns det? Skillnaden här är att eleverna nu behöver arbeta med olika talmängder samtidigt.

antal ägg i kartongen

antal tomma platser i kartongen

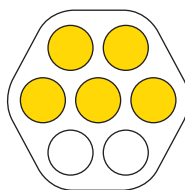
totalt antal ägg som får plats i kartongen

Med fördel börjar även den här övningen i den konkreta fasen med ägg och kartonger, exempelvis med en kartong för sex ägg som fylls med olika antal. Eleverna kan svara på frågorna hur många ägg det finns i kartongen, så som de har arbetat tidigare, men frågorna kan utvidgas till hur många tomma platser det finns och hur många fler ägg som skulle kunna få plats i äggkartongen.

Ibland finns det elever som blir hjälpta av att få helheten representerad på ett annat sätt. Istället för att fråga efter antalet tomma platser ställde jag frågan om hur många fler ägg som skulle få plats i kartongen. Den frågan kunde Sebastian inte svara på. När vi däremot först fyllde hela äggkartongen och tog bort två ägg som vi la i locket, blev det mycket enklare för honom att se uppdelningen.



Nästa steg, för de elever som har förståelse för ett–till–ett-principen, blir den halvkonkreta fasen och arbete med bilder eller tecknade äggkartonger:

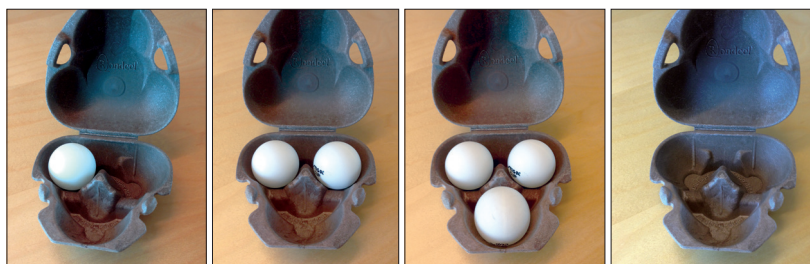


Att variera storleken på äggkartonger gör det möjligt att arbeta med olika talbilder. Några av äggkartonger som jag har på bild i den här artikeln kommer inte från Sverige men finns tillgängliga i mataffärer i Nederländerna. Elever som kommit till den halvkonkreta fasen förstår modellen och de kan använda tecknade äggkartonger för att befästa talkompisarna.

Vill man ändå stanna kvar i den konkreta fasen kan man själv skära till äggkartonger i önskad storlek från tomma äggflak, eller konstruera egna kartonger liknande den här grekiska varianten:



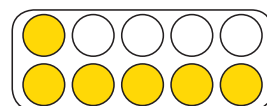
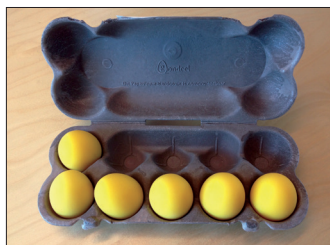
Nedan visas de fyra olika sätten att fylla en äggkartong med plats för tre ägg. Eftersom målet med uppgiften är att befästa talkompisarna kan eleverna skapa en tabell där de anger hur många ägg som finns i kartongen och hur många platser som är tomma. Det gör att eleverna dels får se den kompletta talbilden för 3, dels att de får se ett exempel på hur kombinationer kan struktureras.



3	
<i>Antal ägg i kartongen</i>	<i>Antal tomma platser</i>
3	0
2	1
1	2
0	3

Femstruktur

Ett delmål kan vara att eleverna ska bekanta sig med femstrukturen och då behövs en kartong för tio ägg: att 10 är uppdelat i 5 + 5 blir tydligt och kommer därmed ge möjlighet att synliggöra att antalet 6 i sin tur kan vara uppdelat som 5 + 1, att 7 kan vara 5 + 2 etc.



I exemplet finns det möjlighet att aktivt arbeta med femstrukturen ($6 = 5 + 1$), vilket stödjer elevers vidare taluppfattning.

Addition med tiotalsovergångar

I exemplen nedan utgår jag ifrån att äggkartongen som används har plats för tio ägg och det är viktigt att eleverna arbetar en längre tid med just den kartongen. Vi börjar nu med att arbeta i den konkreta och halvkonkreta fasen men eleverna ska så småningom kunna arbeta inom den halvabstrakta eller abstrakta fasen.

För att räkna ut $38 + 16$ behöver vi två staplar: en stapel med tre fulla äggkartonger och en kartong med åtta ägg (och två tomma platser) samt en stapel med en full äggkartong samt en kartong med sex ägg (och fyra tomma platser). Eleverna kan ha olika sätt att addera:

- ♦ Vissa elever fyller äggkartongen med åtta ägg genom att ta två ägg från äggkartongen med sex ägg, därmed har de räknat: $38 + 16 = 38 + 2 + 14$. De fortsätter sedan med fyra fulla äggkartonger, ytterligare en full kartong och fyra lösa ägg:

$$38 + 16 = 38 + 2 + 14 = 40 + 14 = 40 + 10 + 4 = 54.$$

- ♦ Andra elever lägger helst först ihop alla fulla äggkartonger och sedan de lösa äggen, entalen:

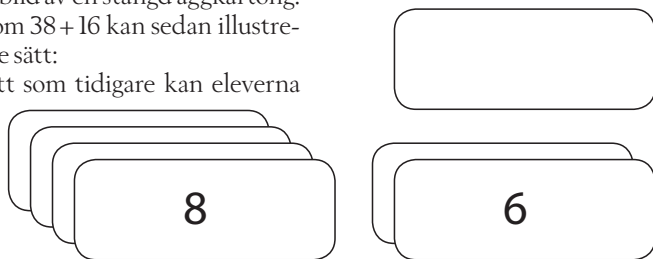
$$38 + 16 = 30 + 10 + 8 + 6 = 40 + 14 = 50 + 4 = 54.$$

Det finns fler sätt att addera dessa två tal på. Låt eleverna förklara hur de tänker med hjälp av äggkartongerna (konkret), vilket ger en bra inblick i hur långt varje elev har kommit och om de är redo för nästa fas.

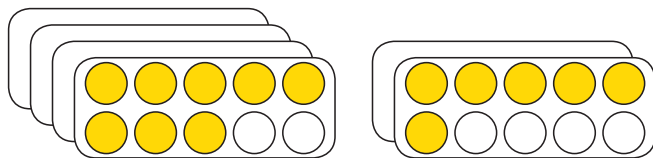
För att kunna gå vidare till den halvabstrakta och abstrakta fasen behöver eleverna ha befäst talstrukturen och förstå skillnaden mellan tiotal och ental. Genom att använda sig av en förenklad bild av äggkartongen introduceras elever till den halvabstrakta fasen. En äggkartong som är full kan nu representeras med en bild av en stängd äggkartong.

En uppgift som $38 + 16$ kan sedan illustreras på följande sätt:

På samma sätt som tidigare kan eleverna



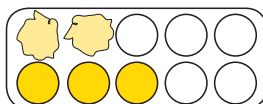
välja att lägga ihop tiotalen för sig (hela äggkartonger) samt att fylla på så att de får fler hela äggkartonger, eller göra på annat sätt. De elever som har behov av att vara kvar ett tag till i det halvkonkreta kan backa ett steg och börja på följande sätt, där de fulla kartongerna kan representeras som ovan (en del av den halvabstrakta fasen), men där kartongerna som inte är fulla representeras genom att visa den halvkonkreta äggkartongen:



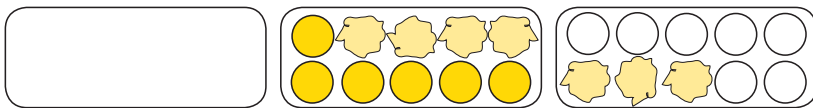
Subtraktion med trasiga ägg

Det kan vara svårt att visa subtraktion med hjälp av bilder. När man illustrerar subtraktion stöter man på en komplikation som man inte har vid addition: så fort vi representerar subtraktion med en bild reducerar vi subtraktionen till ett problem där eleven enbart behöver räkna det som är kvar. Till problemet *Pelle har fem kakor och äter upp tre* finns olika sätt som försöker illustrera situationen. Ibland ser man åtta kakor på bilden, fem i början och sedan tre i Pelles mun. Ibland ser man fem kakor: två kakor i handen och tre i munnen. Till den sista situationen kan man tänka sig additionen $2 + 3$, till den första $5 + 3$.

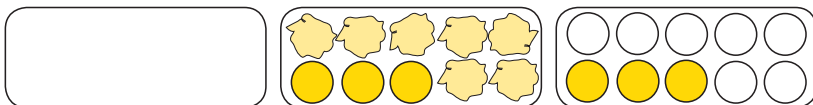
I äggmodellen har de valt att representera subtraktion med hjälp av trasiga ägg. Mycket lik uppätta kakor – förutom att det som ska tas bort finns illustrerat i samma bild, fast med en annan symbol. Subtraktionen $5 - 2$ illustreras därmed på följande sätt:



Problemet är dock att svaret även här finns i bilden och eleven behöver egentligen inte ta hänsyn till de trasiga äggen och inte alls tänka subtraktion. Subtraktion introduceras ändå med bilder men eleverna får snabbt ta över och rita sina bilder till givna subtraktioner. Det visar sig att eleverna tycker det är lätt att avbilda subtraktion med hjälp av äggmodellen. När vi sedan går vidare till mer komplexa subtraktioner med tiotalsovergångar som $23 - 7$ får eleverna direkt använda sig av lämpliga sätt att dela upp tal, i det här fallet talet 7. Uppgiften för eleven blir i den här fasen att kunna representera subtraktionen $23 - 7$ med bilder:



Subtraktionen ovan visar på tankesättet: $23 - 7 = 23 - 3 - 4 = 16$. Det finns fler sätt att illustrera samma subtraktion: $23 - 7 = 10 + 10 + 3 - 7 = 10 + 3 + 3$.



Båda representationer visar på konceptet *växling*. Man behöver öppna en full äggkartong för att kunna ta bort några ägg. Att den äggkartongen sedan inte finns kvar som full äggkartong blir tydligt för eleverna. Om man vill arbeta med algoritmer för subtraktion senare i undervisningen kan man gärna tillfälligt gå tillbaka till modellen och klargöra var växlingen sker och hur det fungerar i modellen. När modellen har blivit till en mental modell blir även växlingen en mental handling av att öppna en äggkartong.

Möjligheter till differentiering

Som beskrivits tidigare ger de fyra faserna en möjlighet till differentiering genom acceleration då elever tar sig genom de olika faserna olika fort. Vissa elever kommer att befinna sig i den halvabstrakta fasen direkt, andra elever kommer att vilja dröja kvar i den konkreta fasen.

Beräkning med tal i olika baser

Modellen i sig ger också en annan möjlighet till differentiering. Vissa elever kanske redan har kommit till en god förståelse för tiotal och ental och uppbyggnaden av vårt talsystem. Genom att använda olika storlekar på äggkartongerna ges möjlighet att utmana dessa elever att tänka kring andra talsystem. Räkning med exempelvis bas sex blir mycket konkret och eleven som får utmaningen kan arbeta med olika uppgifter. Samma modell, med samma möjligheter till konkretisering och abstraktion används, det är 'enbart' storleken på äggkartongen som anpassas. Modellen möjliggör arbete parallellt med bas tio och med bas sex genom användning av två storlekar på äggkartonger samtidigt på bordet. 15 i bas tio är ett tiotal (en full äggkartong) och fem ental: fem lösa ägg. I bas sex skulle detta innebära att två äggkartonger kan fyllas och att tre ägg är lösa: 23_{bas6} . När eleven har testat konkret med bas sex kan arbetet i samma eller någon annan bas ske inom den halvabstrakta eller abstrakta fasen.

Att stanna längre i den konkreta fasen

I Nederländerna används modellen även på särskolor där den konkreta fasen utvecklas med fler övningar än de som har beskrivits här. Att stanna upp i den konkreta fasen för att utveckla talbilder kan göras på olika sätt. Övningarna ovan kan kompletteras med övningar där ett-till-ett-principen tränas en längre tid. Till exempel kan man visa en äggkartong med ett antal ägg i och be elever att lägga lika många ägg i en egen äggkartong. De flesta övningar man gör med elever för att befästa talbilder, eller för att utveckla och träna taluppfattning, går att transformera till den här modellen.

En modell att återkomma till

Som jag skrev tidigare så är äggkartongmodellen en modell som används i Nederländerna, där realistisk matematikundervisning har varit centralt sedan 70-talet. Modellen är ett tydligt exempel på vad realistisk matematikundervisning kan innebära: man strävar efter att använda sig av kontexter som är begripliga och därmed realistiska för elever. Man strävar också efter att använda modeller som går att abstrahera och som stödjer barnens matematiska tankar. Äggkartongmodellen anses vara en sådan modell. Abstraktionen stödjer elever både i sin tidiga taluppfattning och den kan också vara bra att återkomma till även några årskurser längre fram.

LITTERATUR

- Heddens, J. (1986). *Bridging the gap between the concrete and the abstract*. The Arithmetic Teacher, Vol 33 (6).
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

Denna artikel publicerades ursprungligen i tryck form i Nämnaren 2016:4, här utökad med subtraktion.