



Rosettfönster

I Nämaren 2015:1 skriver Juan Parera Lopez om Rosettfönsters ornamentik och matematik. Artikeln följs här upp med tre förslag på arbetsuppgifter.

Vi ska försöka rita en rosett bestående av en cirkel i mitten och sex cirkelformade blad.

1. Utgå från en cirkel med centrum i origo och bestäm en punkt på cirkeln genom att dra en vinkel på 60° .
2. Genom denna punkt och spetsen där cirkeln träffar y-axeln ritas en regelbunden hexagon.
3. Rita från en spets en cirkel som tangerar x-axeln med kommandot *cirkel med centrum och punkt på cirkel*. Upprepa förfarandet och dra linjer från övriga spetsar så att de tangerar varandra.
4. Utgå från origo och dra en cirkel som tangerar övriga. Man kan ana att denna cirkel är lika stor som de omgivande cirklarna.
5. Dölj hjälpkonstruktionerna och färglägg figuren. Resultatet visas i bilden till vänster.

Från ritningen som algoritmen genererar vet man att alla cirklar som bildar blad är lika. Det går att visa att den centrala cirkeln också är lika med övriga cirklar och att alla de små cirklarna tangerar varandra i kontaktpunkterna. Det går att visa att den centrala cirkeln också är lika med övriga cirklar och att alla de små cirklarna tangerar varandra i kontaktpunkterna.

Uppgift 1.

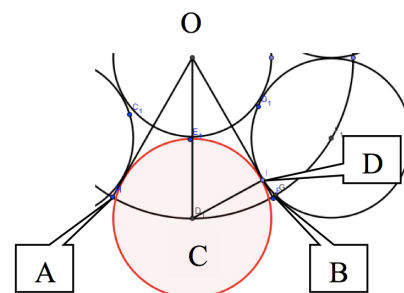
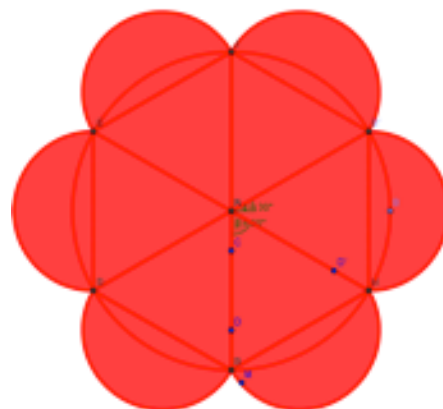
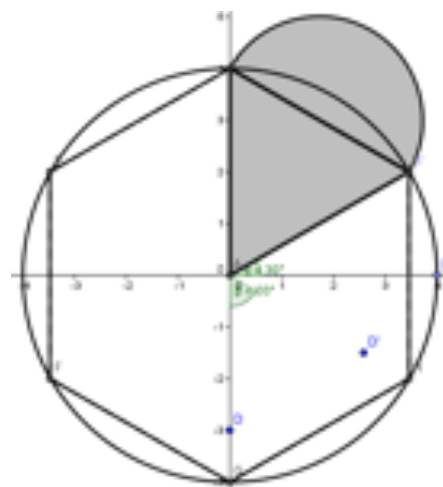
Visa att den centrala cirkeln i rosetten är lika med övriga små cirklar. Visa också att de små cirklarna tangerar varandra i kontaktpunkterna.

Förslag till lösning av uppgift 1:

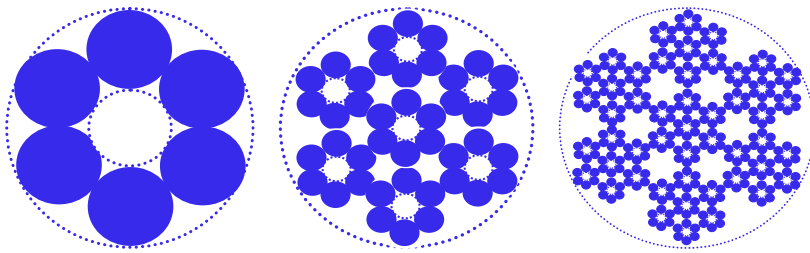
- a. I konstruktionen tangerar de stora radierna OA och OB den lilla cirkeln. CD är vinkelrät mot OB. Radien hos den stora cirkeln betecknas R och hos den lilla röda cirkeln r . Man ser att $\angle AOB$ är 60° och då blir $\angle COD$ 30° . I den lilla rätvinkliga triangel COD är $\sin(\angle COD) = CD/CO \Rightarrow \sin 30^\circ = r/CO$. Flyttar man över blir det $CO = 2r$. Då har den centrala lilla cirkeln lika radie som den röda cirkeln, alltså är de lika.
- b. Efter konstruktionen ovan tangerar radierna OA och OB de små cirkelnas omkretser.

En fraktalrosett

En annan symmetrityp är figurer som är likformiga med sig själva när man betraktar dem i mindre skala, så kallade fraktaler. Betraktar man huvudstrukturen hos rosetten på fasaden i Stockholms synagoga ser man att den yttre konstruktionen med sex cirklar upprepar sig inåt, i allt mindre skala. Det ger en ledtråd till en geometrisk algoritm för att utveckla en fraktalfigur. I samma figur visas sedan de två första stegen vid utvecklingen av en sådan fraktal.



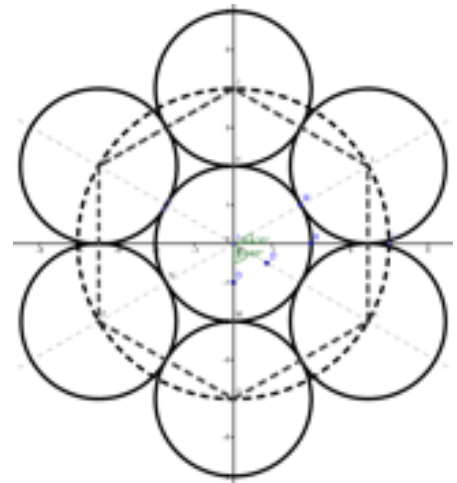
Jämför man fraktalen som denna process resulterar i ser man att den liknar Sierpinski's triangel där den ursprungliga figuren är en cirkel i stället för en liksidig triangel.



Fraktaler är sönderfallna figurer som är likformiga med sig själv i mindre och mindre skala. Fraktaler är intressanta i samband med deras rumsdimensioner. Exempelvis är fraktalen ovan inte endimensionell, men inte heller tvådimensionell – de mindre och mindre cirkarna räcker inte för att täcka ett tvådimensionellt område, så dess dimension ligger mellan 1 och 2.

Uppgift 2.

- Bestäm kvoten mellan arean hos den stora cirkeln och arean hos en av de små cirkarna.
- Formeln för fraktal dimension är $D_F = \log N / \log n$ där N är antalet mindre cirklar som används för att delvis täcka den stora cirkels yta, n är kvoten mellan den linjära dimensionen hos stora cirkeln och den lilla cirkeln, dvs (R/r) . Bestäm dimensionen hos fraktalen i fråga.



Förslag till lösning av uppgift 2:

- Som vi visade i uppgift 1 har alla små cirklar samma radie och tangenter varandra i kontaktpunkterna, så om vi sätter den lilla cirkelns radie lika med 1 har den stora cirkeln radien 3. Alltså är arean hos den stora cirkeln nio gånger större än arean hos lilla cirkeln.
- Efter analysen ovan ser vi att det behövs nio små cirkels area för att få ringens area och vi har bara sex cirklar till vårt förfogande. Kvoten mellan radierna $R/r = 3$, alltså blir fraktaldimensionen

$$D_F = \log(6)/\log(3) = 1,631$$

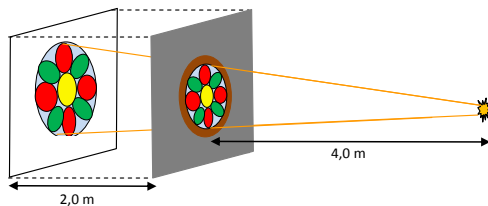
Ljus genom färgade glas – tema för projektiv geometri

De färgade glaserna ger upphov till vackra figurer och mönster när ljuset som passerar genom dem projicerar de dekorationer som finns i glaset på väggar, golv och andra strukturer i byggnaden. Bilden från Nasir al-Molk i Shiraz visar ett vackert exempel på det. Denna typ av fenomen kan man utnyttja i geometrilektioner.



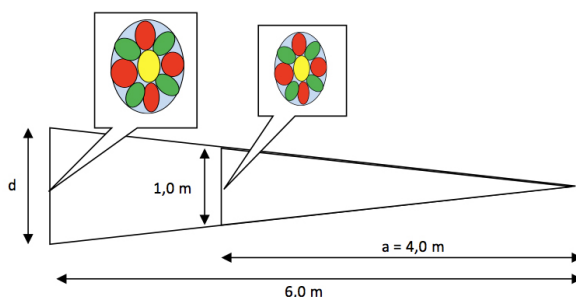
Uppgift 3:

Ett ljusknippe från en punktformad ljuskälla passerar en cirkulärt glasfönster av diametern 1,0 m med ett blommotiv. Ljusknippet träffar en vägg parallell med glasfönstret där blommotivet avbildas likformigt och i större skala. Bestäm förhållandet mellan arean hos avbildningen och fönstrets area. Avstånden visas i figuren.



Förslag till lösning av uppgift 3:

Som stöd för ett resonemang går det att använda en tvådimensionell representation av situationen: Triangelarna är likformiga med förhållande $6/4 = 1,5$ mellan sidorna. Rosetten och dess avbildning på väggen är också likformiga så förhållandet mellan respektive areor är $A_{\text{avbildning}}/A_{\text{rosett}} = 1,5^2$.



LITTERATUR.

R. Penrose, The Emperor's New Mind, Oxford Univ. Press (1989)

P.A.M. Dirac, "The Evolution of the Physicist's Picture of Nature", Scientific American, may 1963

Viv Foster, El Arte del Vidrio, Lisma (2006)

Juan Parera-Lopez, Blomstrande matematik. Nämnaren 2012:2

Juan Parera-Lopez, Från modern konst till skolmatematik. Nämnaren 2012:4

Juan Parera-Lopez, Rosettfönster. Nämnaren 2015:1