PROBLEM
AVDELNINGEN

Problemlösning med hjälp av nycklar

I denna problemavdelning finns förutom ett antal geometriproblem även förslag på ett arbetssätt som avser underlätta för elever att komma igång med problemlösning och att redovisa sina tankegångar. Till sin hjälp får de ett antal "nycklar". Med detta menas påståenden som kan vara axiom, definitioner, satser etc. Skisser till lösningsförslag presenteras på Nämnaren på nätet.

I Kängurutävlingen krävs bara svar på frågorna och inga förklaringar. För att ytterligare underlätta ges fem svarsalternativ varav ett är rätt. Eleverna kan använda dem på olika sätt, från att få en bekräftelse när de bland svarsalternativen ser det svar som de själv har kommit fram till genom resonemang, till att gissa ett svar genom att utesluta de mest orimliga svarsalternativen och väga mellan de övriga. Detta i kombination med stor variation av problemens svårighetsgrad gör Kängurun till en tävling som ger utmaningar till duktiga elever och samtidigt gör den tillgänglig för alla.

I andra sammanhang krävs, förutom svaren, förklaringar, bevis att svaren är korrekta eller ibland bara bevis av givna påståenden. De flesta uppgifterna i NCM:s *Månadens problem* är Känguruproblem med borttagna svarsalternativ. Där välkomnas olika sorters svar och fullständiga lösningar värderas högt.

Här presenteras en idé till övning i problemlösning. Valda problem är lite svårare geometriproblem från Kängurutävlingarna. Ska några av dem användas i en lektion bör svar, förklaringar och bevis krävas. För att underlätta lösning av problemen och lösningarnas formulering, ges här ett antal påståenden (axiom, definitioner, kända satser mm), låt oss kalla dem "nycklar". Arbetet med varje problem får bestå av två delar: den första ska i allmänhet vara att välja en eller flera nycklar som ska användas i lösning av problemet och den andra att formulera själva lösningen och rätt svar. Olika lösningar av samma problem kräver i allmänhet olika uppsättningar av nycklar.

Elever kan alltså bland nycklarna söka verktyg för att lösa ett problem eller, efter att ha kommit till en lösningsidé, ha nycklarna till stöd vid dess formulering. Lyckas de inte med en egen nyckeluppsättning kan de använda andras nycklar. Även en elev som själv formulerar sin egen lösning bör i efterhand se om och i så fall vilka av nycklarna som har använts. Kanske behöver nyckellistan kompletteras? Ibland är det så att trots att man har en klar lösningsidé är det först vid formuleringen av lösningen som man blir medveten om vilka nycklar man använder.

Nycklar

Är alla följande påståenden kända eller självklara? Kanske några behöver förklaras eller bevisas. Vad betyder orden, t ex kvadrat i nyckeln E eller vertikalvinklar i F? Hur lyder de satser som bara ges med namn?

A: Om en sträcka delas i flera sträckor så är dess längd lika med summan av delsträckornas längder.

B: Om en geometrisk figur delas i flera geometriska figurer så är den ursprungliga figurens area summan av delfigurernas areor.

C: Om en vinkel delas i flera vinklar så är dess storlek lika med summan av delvinklarnas storlekar.

D: Alla punkter på en av två parallella linjer har lika stort avstånd till den andra linjen.

E: Kvadratens area är kvadrat av dess sidolängd.

F: Vertikalvinklar är lika stora.

G: Basvinklarna i en likbent triangel är lika stora.

H: Alla vinklar i en liksidig triangel är lika stora.

J: Summan av vinklar i en triangel är 180°.

K: En triangels area är hälften av area av en rektangel med samma bas och samma höjd.

L: Om sträckan AB korsar sin spegelbild CD i punkten E så ligger E på symmetrilinjen.

M: Om sträckan AB korsar sträckan CD i punkten E så gäller AE · EB = CE · ED om och endast om vinklarna ABD och ACD är lika.

N: Cirkelns radie som går till en tangeringspunkt är vinkelrät till tangenten.

O: Trianglar med lika stora baser och lika höjder har lika stora areor.

P: Trianglar med lika höjder har areor proportionella till basernas längder.

Q: Summan av en rektangels längd och bredd är hälften av dess omkrets.

R: För positiva tal a, b, c och d är följande tre likheter ekvivalenta $a/b = c/d$, $a/c = b/d$ och $ad = bc$.

S: Pytagoras sats.

T: Randvinkelsatsen och dess omvändning.

U: Kordasatsen och dess omvändning.

V: En liksidig triangel med sidolängden 2 har arean $\sqrt{3}$.

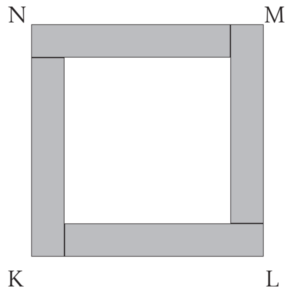
W: En cirkel med radie r har arean πr^2.

X: Om man förflyttar sig längs en sträcka, ändrar riktning och fortsätter längs en ny sträcka så är vinkeln mellan dessa sträckor plus kursändringen lika med 180°.

Y: Två trianglar är likformiga om och endast om deras respektive vinklar är lika stora.

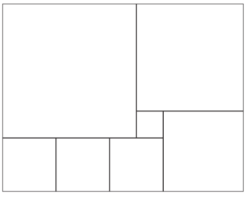
Problem

4123 Kvadraten KLMN är sammansatt av en vit inre kvadrat och fyra likadana färgade rektanglar. Var och en av de färgade rektanglarna har omkretsen 40 cm.



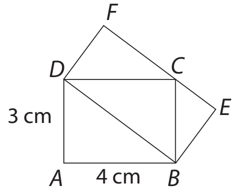
Hur stor area har kvadraten KLMN?

4124 Rektangeln är uppdelad i 7 kvadrater.



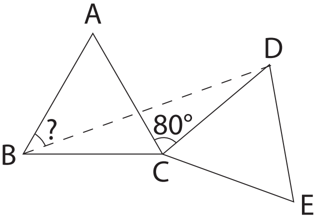
Hur många kvadrater av den minsta kvadratens storlek får plats i den största kvadraten?

4125 Två rektanglar ABCD och DBEF syns på bilden.



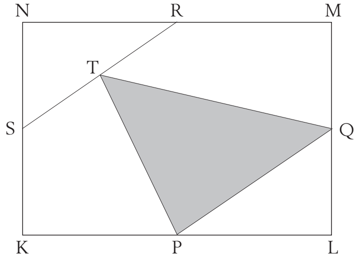
Vilken area har rektangeln DBEF?

4126 ABC och CDE är två lika stora liksidiga trianglar. Vinkeln ACD= 80°.



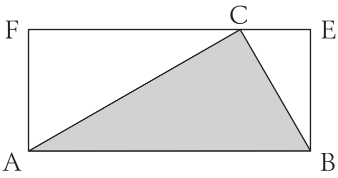
Hur stor är vinkeln ABD?

4127 I rektangeln KLMN betecknar P, Q, R och S mittpunkterna på sidorna KL, LM, MN respektive KN. T är mittpunkt på sträckan RS.



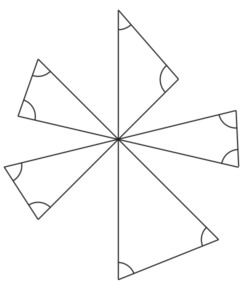
Hur stor del av arean hos rektangeln KLMN täcks av den skuggade triangeln, PQT?

4128 Bilden visar en rektangel ABEF och en triangel ABC.

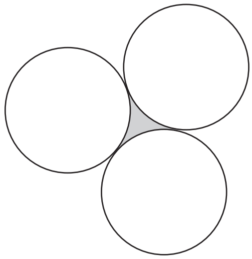


Man vet att vinkeln ACF är lika med vinkeln CBE. Om FC=6 och CE=2, vilken är arean av ABC?

4129 Hur många grader är de tio markerade vinklarna tillsammans?

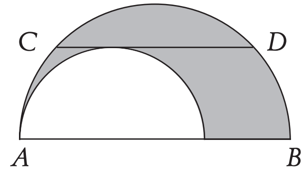


4130 Tre lika stora cirklar tangerar varandra som figuren visar.



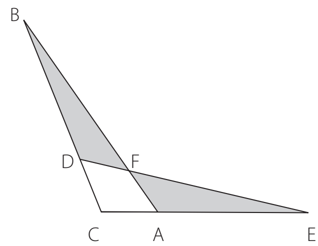
Hur stor del av figurens area är skuggad?

4131 Två halvcirklar är uppritade i figuren. Kordan CD, som har längd 4, är parallell med halvcirklarnas diameter AB och tangerar den mindre halvcirkel.

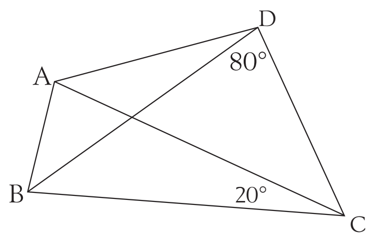


Hur stor area har det skuggade området?

4132 DC = AC = 1. CB = CE = 4. Om arean av triangeln ABC är S, hur stor är då arean av fyrhörningen AFDC?



4133 I fyrhörningen ABCD är diagonalen BD bisektris till vinkeln ABC och AC=BC. Om vinkeln BDC är 80° och vinkeln ACB är 20°, hur stor är vinkeln BAD?



Förslag till nyckelval

Stora bokstäver syftar på nycklar som ger lösningsidén, små på sådana som behövs i en fullständig lösning. Flera "ord" innebär olika lösningar.

Svar

4123	QAe	400 cm²
4124	Ae	25
4125	K, YB	12cm²
4126	Gcjh	40°
4127	DOk, Bk	1/4
4128	YRa	8·√3
4129	FCj, X	720°
4130	VNw	(√3-0,5π)/(√3+2,5π)
4131	NDsw	2·π
4132	LPB	2/5·S
4133	cgjYRM, cgjT, cgjU	120°

Kommentarer

Följande lösningsförslag är skisser och att komplettera dem kan utgöra nya utmaningar för elever, i synnerhet för dem som inte har lyckats prestera egna lösningar. Eleverna kan arbeta med dem enligt följande:

- Läs problemtexten.
- Gör kopplingar mellan text och figur.
- Vilka slutsatser kan man dra ur premisserna?
- Vad skulle man behöva veta för att kunna svara på frågan?
- Undersök nycklarna som refereras med bokstäver inom parentes.
- Läs lösningsskissen.
- Var i lösningen bör nycklarna åberopas?
- Ibland säger en nyckel mer än vad som behövs för lösningen. Skilj ut den nödvändiga delen.
- Behöver någon nyckel utvecklas?
- Leder lösningen till svaret?
- Skriv en mer fullständig lösning.

Ibland är det först när man skriver en lösning som man ser vilka nycklar som behövs. Det visade sig att i en av de följande lösningarna behövs en nyckel som inte finns med i pappersversion av Nämnaren. Den nya nyckeln får bokstaven Z och lyder:

Z: För en cyklisk fyrhörning är summan av två motsatta vinklar 180°.

Lösningsförslag

4123 (QAe)
Den stora kvadratens sida är hälften av en rektangels omkrets.

4124 (Ae)
Om den minsta kvadraten har sidolängd a, var och en av de tre lika stora kvadraterna nertill b och den största c, så $c = b + 3a$. Samtidigt är $c + a = 3b$ alltså $b + 4a = 3b$ vilket ger $b = 2a$ och $c = 5a$.

4125 (K)
Triangeln BCD:s area är hälften av $ABCD$:s area och samtidigt hälften av $BDFE$:s area, alltså har rektanglarna lika stora areor.

(YB)
Dra höjden AG i triangeln ABD. ADG är likformig med BCE och ABG med DBC. Då är de kongruenta eftersom $AD = BC$ och $AB = DC$, alltså har de lika stora areor.

4126 (Gcjh)
$\angle ABC = \angle ACB = 180° / 3 = 60°$.
$\angle BCD = 60° + 80° = 140°$.
$\angle CBD = \angle CDB = (180° - 140°) / 2 = 20°$.
$ABD = ABC - CBD = 60° - 20° = 40°$.

4127 (DOk)
SR är parallell med PQ så trianglarna PTQ och PSQ har lika stora höjder mot basen PQ, alltså lika stora areor. PQS har hälften av arean av rektangel $KLQS$ som är hälften av $KLMN$.

(Bk)
Dela fyrhörningarna $QMRT$ och $KPTS$ i trianglarna MRT, MTQ, KPT och KTS. Den skuggade triangelns area är rektangeln $KLMN$:s area minus sex vita trianglars areor.

4128 (YRa)
Trianglarna ACF och CBE är likformiga. $CE / AF = BE / CF$,
$AF \cdot BE = CE \cdot CF = 2 \cdot 6 = 12$, $AF = BE = \sqrt{12}$

4129 (FCj)
Figuren består av fem trianglar med total vinkelsumma $5 \cdot 180° = 900°$. De omarkerade vinklarna i trianglarna är lika stora som vinklarna mittemot dem, d v s de mellan trianglarna. Omarkerade vinklar i trianglarna är sammanlagt lika stora som vinklarna mellan trianglarna sammanlagt, alltså $360° / 2 = 180°$. De markerade vinklarna är $900° - 180° = 720°$.

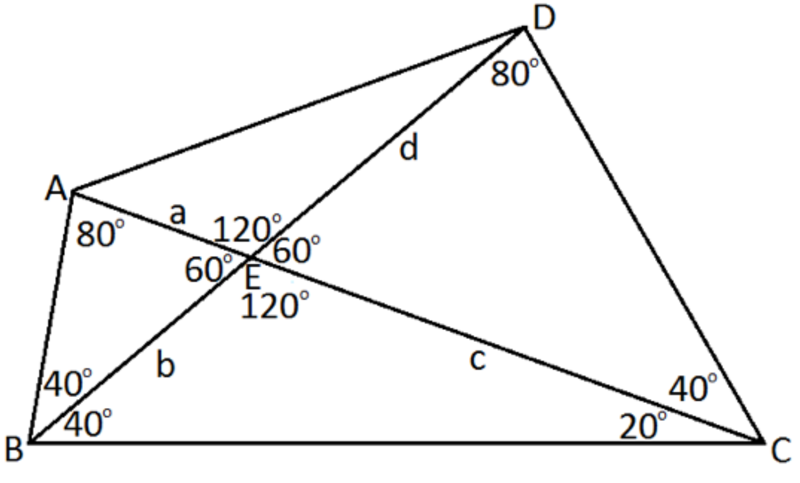
(X)
Detta är ett mera intuitiv resonemang: Figuren är en polygon där fem av dess tio sidor korsar varandra i mitten. Går man längs den så roterar man tre varv runt sin ryggrad innan man är tillbaka i startpunkten, alltså svänger man totalt $3 \cdot 360° = 1080°$. Varje sväng i ett hörn motsvaras av en av de 10 markerade vinklarna där sväng plus markerad vinkel är 180°. Alltså är de markerade vinklarna $10 \cdot 180° - 1080° = 720°$.

4130 (VNw)
Rita en sexhörning med hörnen i cirklarnas medelpunkter och i de tre tangeringspunkterna. Sexhörningens alla sidor är cirklarnas radier. Två sidor som möts i en tangeringspunkt är vinkelräta till samma tangent, vinkeln mellan dem är $2 \cdot 90° = 180°$. Alltså är sexhörningen egentligen en liksidig triangel. Det skuggade områdets area är triangelns area minus tre sektorer à 60°, $\sqrt{3} - 3 \cdot \pi r^2 / 6$. Hela figurens area är triangelns area plus tre sektorer à 300°, $\sqrt{3} + 3 \cdot \pi r^2 \cdot 5 / 6$.

4131 (NDsw)
Låt R vara den stora halvcirkelns radie och r den lilla halvcirkelns radie. Låt E vara mittpunkten av AB (stora cirkelns medelpunkt) och F mittpunkten av CD. CEF är en rätvinklig triangel. $R^2 = r^2 + CE^2 = r^2 + 4$. Det skuggade områdets area är $\pi R^2 / 2 - \pi r^2 / 2 = \pi (R^2 - r^2) / 2 = \pi \cdot 4 / 2$.

4132 (LPB)
D är spegelbild till A och E är spegelbild till B i bisektrisen till vinkeln BCE. F ligger på bisektrisen. Trianglarna ACF och DCF är kongruenta. Låt T vara arean av BCF, U arean av DCF och V arean av ACF, då gäller $U = V$, $T = 4 \cdot U$ och $S = 5 \cdot U$. Fyrhörningen $ACDF$:s area är $U + V = 2 \cdot U$.

4133 (cgj)
Den lätta delen av problemet är att fastställa vinklarna markerade i följande figur.



Fortsättningen kan ta olika vägar:

(YRM)
Trianglarna BAE och CDE har lika vinklar och är alltså likformiga. $a / d = b / c$ alltså är $a / b = d / c$. Trianglarna BCE och ADE är likformiga, alltså är $\angle DAE = \angle CBE = 40°$.

(T)
$\angle BAC = \angle BDC$, alltså är fyrhörningen $ABCD$ cyklisk. $\angle CAD = \angle CBD = 40°$.

(UZ)
Trianglarna BAE och CDE har lika vinklar, de är likformiga, alltså är $a / d = b / c$, $a \cdot c = b \cdot d$, fyrhörningen $ABCD$ är cyklisk och alltså är $\angle BAD = 180° - BCD = 180° - 20° - 40°$.

De mest kända bevisen av kordasatsen (U) bygger på trianglarnas likformighet eller på randvinkelsatsen. Detsamma gäller nyckeln Z som betraktas som en följdsats till randvinkelsatsen. Därför förefaller den senaste lösningen vara en omväg i jämförelse med de två föregående. Men det finns också ett bevis av kordasatsen som bygger på Pythagoras sats och ett annat på cirkelns ekvation. Nyckeln Z kan ses som en följdsats till kordasatsen. I det ljuset är den senaste lösningen en självständig annorlunda lösning.

Leo Rubinstein