



## Matematik och ornamentik – ett upplägg för grundskolan

Nils Kristian Rossing

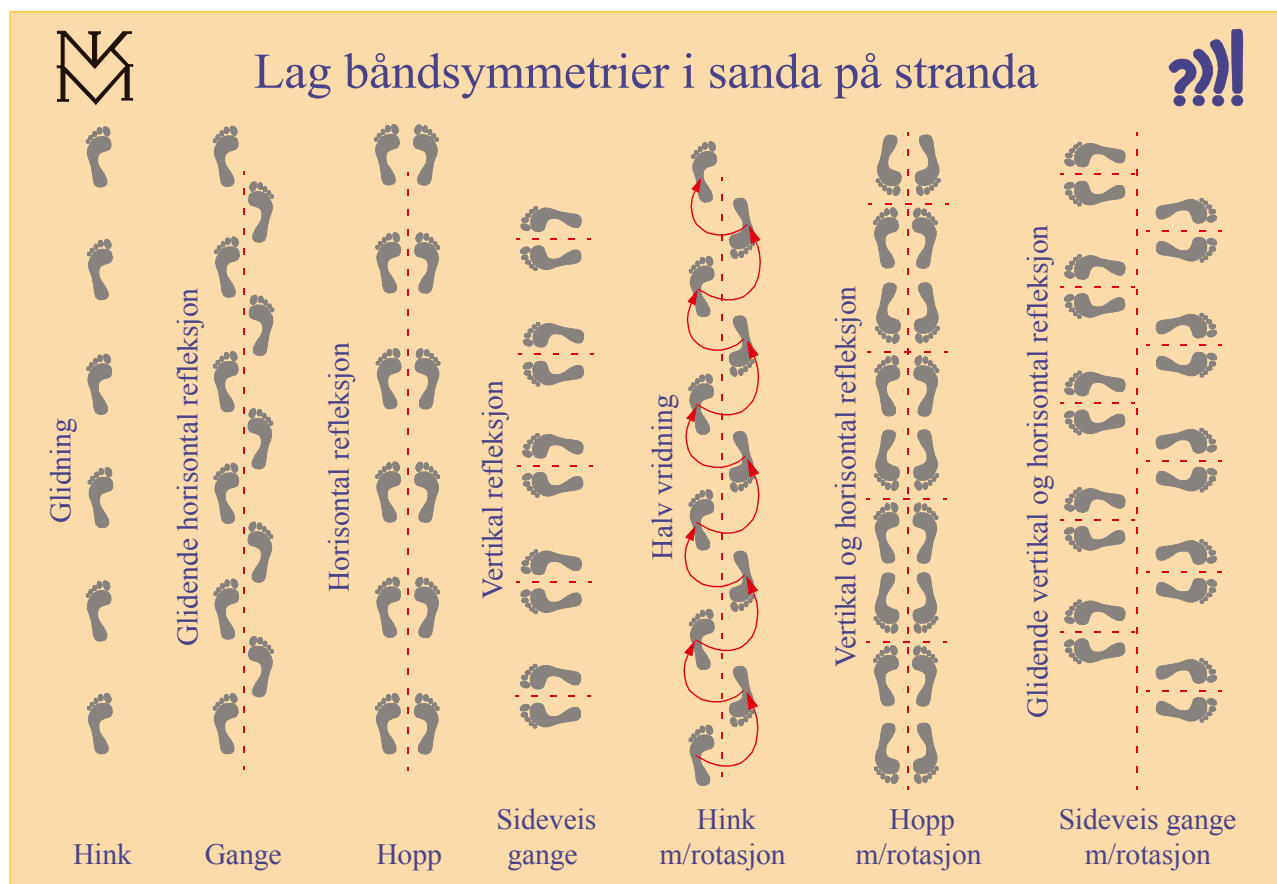
Skolelaboratoriet ved NTNU/Viten-  
senteret i Trondheim

Våren 2009 ble det i et samarbeid mellom Nordenfjeldske Kunstindustrimuseum og Vitensenteret i Trondheim, gitt et tre timers tilbud til alle elever på 5. trinn innen temaet matematikk og ornamentikk. Mens Vitensenteret hadde fokus på matematikken i ornamenter, så tok Kunstindustrimuseet for seg den kunst- og håndverksmessige siden ved temaet. Elevene var 1,5 timer på hvert sted. Avstanden mellom de to institusjonene er slik at elevene går på 10 min. I denne artikkelen vil jeg fokusere på matematikken og det som ble gjort på Vitensenteret.

### "Kjenn" på båndsymmetriene

Når elevene kommer til Vitensenteret blir de møtt av de sju båndsymmetriene, illustrert med fotavtrykk på yogamatter. Ved å bevege føttene etter mønstrene på mattene, kjenner de med hele kroppen hvordan disse mønstrene er bygget opp. Noen er enkle mens andre krever god balanse og koordinering.

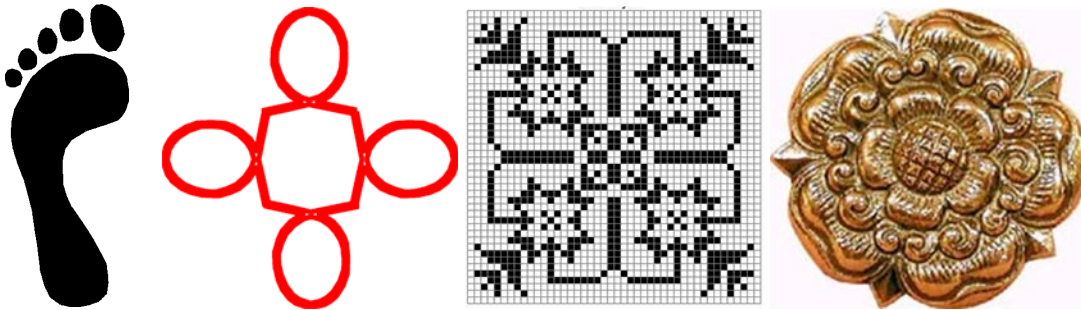
Når de kommer inn i aktivitetsrommet får de et postkort som viser alle båndsymmetriene.



Figur 1 – Postkort med båndsymmetriene.

## Hva er egentlig et ornament?

Når elvene er på plass i aktivitetsrommet gis en kort beskrivelse av hva et ornament er: *Et ornament er et mønster som kan være en dekorasjon eller utsmykning for å gjøre noe pent. Det kan være laget av blomster, geometriske figurer eller andre ting, og er ofte symmetrisk. Et ornament kan også ha en spesiell betydning.* Et fotavtrykk er egentlig ikke et ornament, men brukt på spesielle måter kan det bli en del av et ornament eller mønster.



Figur 2A – D – Eksempler på ornamenter?

## Speil- og båndsymmetri

Det er hovedsakelig symmetrien i et ornament som knytter det til matematikken. De fleste elever forbinder symmetri med *speilsymmetri* (aksesymmetri). Når elevene drar tilbake til skolen skal de ha fått et utvidet symmetribegrep. Dessuten skal de kunne finne grunnfiguren i et mønster og vite at mønster kan ha forskjellige grunnfigurer og likevel være matematisk like. Denne abstraksjonen er en krevende øvelse.

Med utgangspunkt i avtrykket av venstre fot, bruker elevene plane speil for å frambringe det speilsymmetriske høyre fotavtrykket (oppgave 1).

Ved hjelp av speiling har de fått både høyre og venstre fotavtrykk. Dermed vet de nok til å forstå hvordan en av de sju båndsymmetriene bygges opp, nemlig "gange" (glidende horisontal speiling). Her ser vi hvordan både speiling om en horisontal akse, gliding og kopiering inngår i det "utvidete" symmetribegrepet. Her er det viktig å vise at fotavtrykket er én av uendelig mange ulike grunnfigurer.

## Eksempler på speilsymmetri (aksesymmetri)

Elevene oppmuntres til å nevne eksempler på ting som er speilsymmetriske. Kroppen og ansiktet er hyppig nevnte eksempler, men også dagligdagse ting som vinduer, dører, skilt m.m. I oppgave 2 bruker elevene plane speil til og utforske symmetri i ansikter. Elevene får utdelt flere eksempler på kjente ansikter og skal finne hvilket som er mest speilsymmetrisk.

I denne oppgaven oppdager elevene at ansikter er symmetriske, men ikke helt. Dessuten skjønner de at når ansiktet vrís litt så blir den matematiske symmetrien mindre fremtredende. Det er likevel fascinerende at den menneskelige hjerne lett gjenkjenner et ansikt selv om det sees fra svært ulike vinkler.

## Speilsymmetri



**Speilsymmetri** er det som vises i en figur når vi betrakter den gjennom et speil som vi plasserer inntil figuren.



### Oppgave 1

Sett speilet slik at du får fram en høyrefot i tillegg til venstrefoten på oppgave arket.

Figur 3 – De to fotavtrykkene er speilsymmetriske (oppgave 1).

## Er ansikter symmetriske?



### Oppgave 2

Bruk speilet til å undersøke alle ansiktene. Er de helt symmetriske?

Hvilket ansikt er:

- **minst** symmetrisk?
- **mest** symmetrisk?

Hvilken side av ansiktet:

- er **gladest**?
- er **tristest**?



Figur 4A – B – Undersøk speilsymmetri i ansikter (oppgave 2).

I figur 5 ser vi 21 eksempler på symmetriske norske kommunevåpen. Det viser seg imidlertid at ikke alle er *helt* symmetriske. Elevene utfordres til å avsløre hvilke som ikke er helt symmetriske.

## Norske kommunevåpen er også ornamenter



Figur 5 – Mange kommunevåpen er speilsymmetriske.

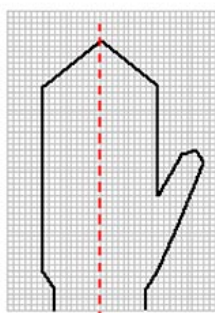


Noe annet som ofte er speilsymmetrisk er mønster på votter. Elevene får se eksempler på vottemønster og utfordres i oppgave 3 til å tegne sitt eget speilsymmetriske vottemønster på en vottemal.

Elevene utfordres først til å tegne bare den ene halvparten av mønsteret for så å bruke et plant speil til å se hvordan det speilsymmetriske mønsteret blir seende ut. Mønsteret tegnes ved å fargelegge eller skravere et utvalg av de kvadratiske rutene (5x5 mm) i malen.

Deretter speiler de mønsteret om midtaksen. For at dette skal kunne tegne det speilsymmetriske mønsteret, må de posisjonere de skraverte rutene riktig om aksen, hvilket krever forståelse av hva speilsymmetri er. Oppgaven viste seg å være mer populær enn vi første hadde trodd. Elevene hadde vondt for å gi slipp på mønstrene sine.

## Lag et speilsymmetrisk vottemønster



### Oppgave 3

Lag et vottemønster på venstre side av midtlinjen på mønsterarket.

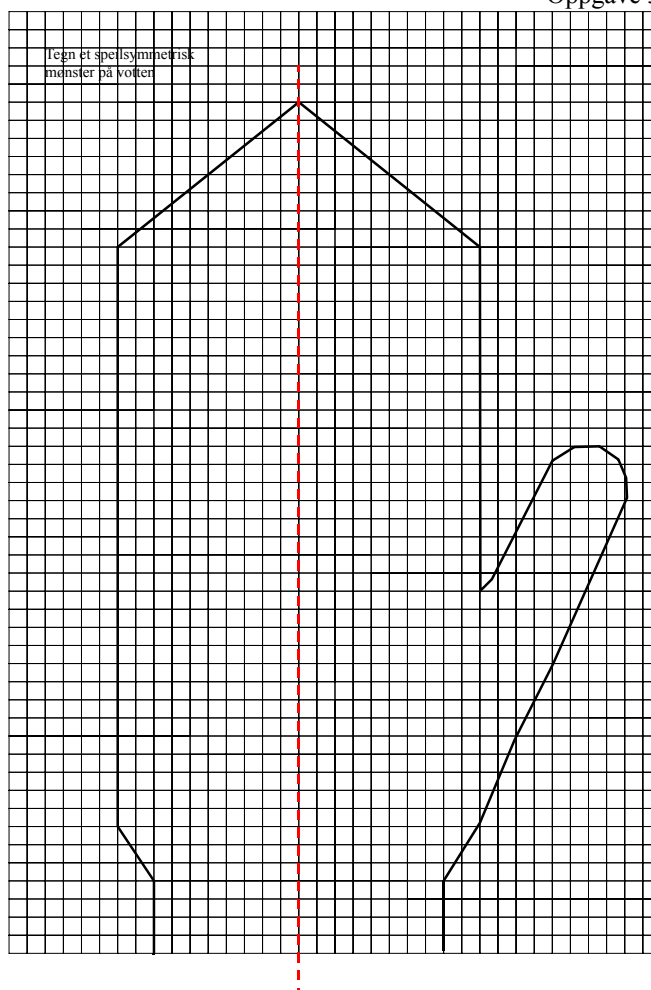
Bruk speilet til å se hvordan det symmetriske vottemønsteret blir.

Figur 6 –

- A) Eksempel på vottemønster,
- B) Elevoppgaven,
- C) Vottemal.



Oppgave 3

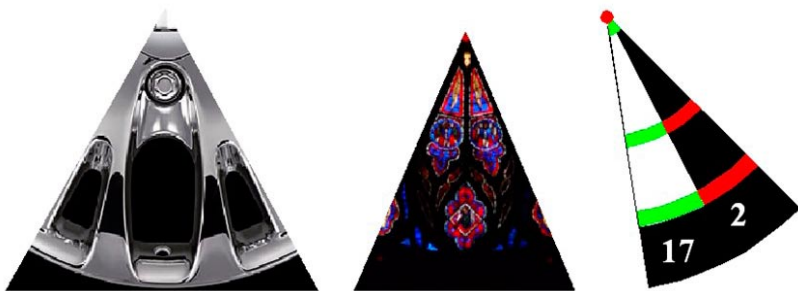


## Hva er rotasjonssymmetri?

Etter speilsymmetriske er det nok rotasjonssymmetriske mønster som er mest kjent blant elevene. For å skape gjenkjennelse introduseres begrepet ved å vise et bilhjul.

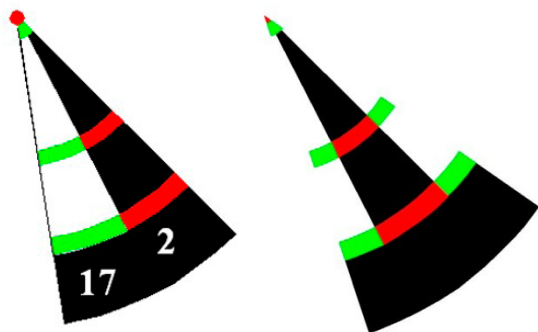
Ved en enkel animasjon i PowerPoint vises hvordan bilhjulet er *femfoldig* rotasjonssymmetrisk. Det kan dreies fem ganger og for hver dreining faller det eksakt over seg selv før det igjen er tilbake til utgangspunktet. Ventilen gjør at hjulet ikke er eksakt symmetrisk, samtidig som den gjør at det er lettere å observere dreiningen.

I oppgave 4 skal elevene utforske rotasjonssymmetri ved hjelp av fleksible vinkelspeil. Dette er to plexiglasspeil (10 x 15 cm) som er hengslet langs en kortsida. Elevene får tre eksempler på grunnfigurer og skal bruke speilet til å finne ut hva de rotasjonssymmetriske figurene forestiller.



Figur 8 – Bruk vinkelspeilet og finn ut hva de tre grunnfigurene forestiller (oppgave 4A).

Elevene oppdager fort at disse forestiller en hjulkapsel, rosevinduet i Nidaros domkirke i Trondheim og en dartskeive. Noen bemerker også at dartskeiven ikke blir som den skal. Grunnfiguren for dartskeiva er strengt tatt ikke riktig. Opprinnelig var denne "feilen" ikke tiltenkt, men den ble et spennende innslag i opplegget. Vi valgte derfor å beholde den. Det viser seg at skal vi få en riktig skive må grunnfiguren ha spesielle egenskaper. Kan du se hvilke egenskaper dette er (se figur 9)? Finnes det flere riktige svar?



Figur 9A - B – Den gale (A) og den riktige (B) grunnfiguren for en dartskeive.

Vinkelspeilet egner seg godt til å utforske rotasjonssymmetriske ornamenter. I oppgave 4B får elevene tre grunnfigurer og tre komplette ornamenter bygget opp av grunnfigurene.

Ved hjelp av vinkelspeilet skal de framstille hele ornamentet av grunnfiguren. Dette krever at de må velge riktig plassering og vinkel mellom speilene.

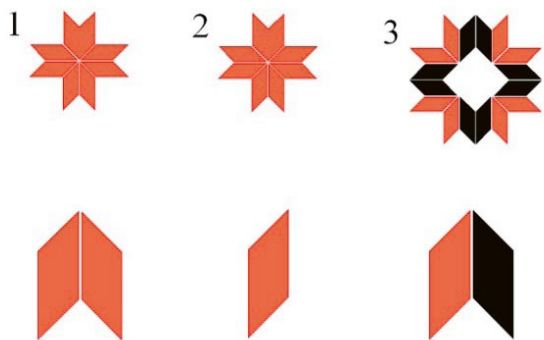
## Rotasjonssymmetri



Figur 7 – Bilhjul, eksempel på rotasjonssymmetri.

## Ornamenter med rotasjonssymmetri

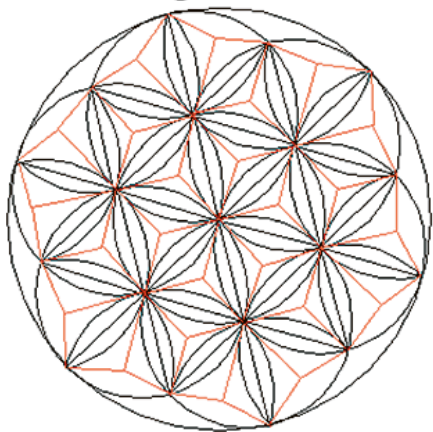
Plasser vinkelspeilet på figurene nederst slik at du ser de øverste ornamentene i speilet



Selv om det er nærliggende å prøve seg fram så oppmuntres det til å tenke systematisk. Det første en da må gjøre er å finne ut hvor mange ganger grunnfiguren gjentar seg i ornamentet.

Dersom den gjentar seg 8 ganger skal vinkelåpningen til speilet være  $360^\circ / 8 = 45^\circ$ . Derneft undersøkes om ornamentet er "åpent" eller "lukket", dvs. om ornamentet har et hvitt felt i midten. Et "åpent" ornament krever at toppunktet i hjørnespeilet ligger utenfor grunnfiguren. Er ornamentet lukket, ligger toppunktet langs kanten av grunnfiguren. Dette kan en gjøre de flinkeste elevene oppmerksomme på.

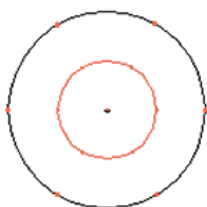
## Lag ditt eget rosevindu



### Oppgave 5

Tegn en rosett ved hjelp av passerens. Begynn med å sett passerspissen i punktene på den innerste sirkelen. Slå seks sirkler som går gjennom sentrum av sirkelen.

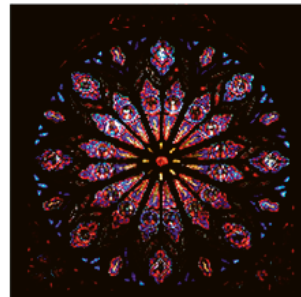
Se om den er rotasjonssymmetrisk.



Figur 10 – Plasser vinkelspeilet slik at hele figuren framkommer (oppgave 4B).



## Rotasjonssymmetri



Vi sier at en figur er **rotasjonssymmetrisk** dersom figuren blir likedan etter at vi har dreid den litt. Vi kan lage rotasjonssymmetriske ornamenter ved hjelp av et vinkelspeil.



Ornament



Grunnfigur

### Oppgave 4

Plasser vinkelspeilet inn til grunnfigurene til du ser ornamentet inne i vinkelspeilet.

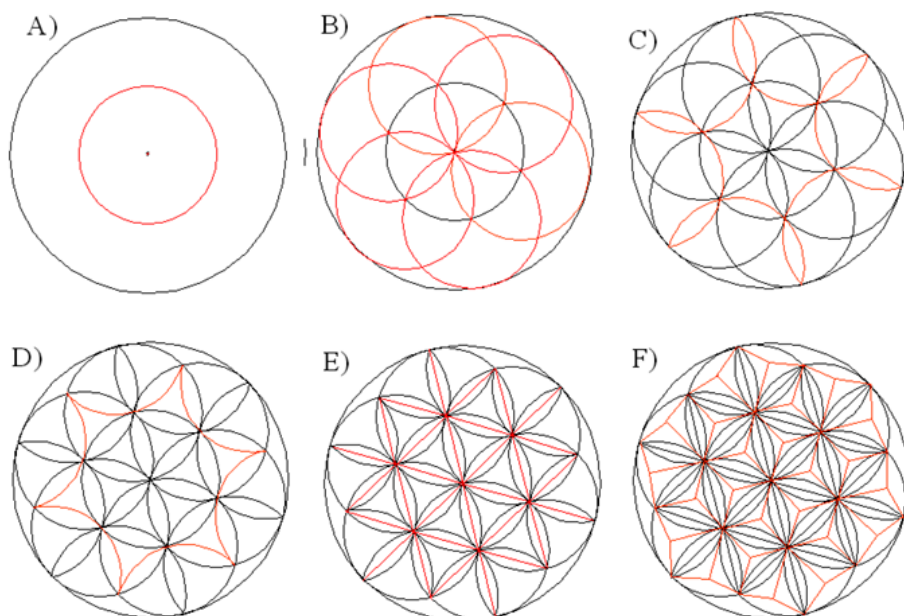
Figur 11A – B – Tegn en rosett.

Inspirert av det flotte rosevinduet i Nidaros domkirke, lar vi elevene i oppgave 5 utforske rotasjonssymmetriske rosetter ved hjelp av passer.

Det varierer svært fra klasse til klasse om elever på 5 trinn har brukt passer. Det var derfor nødvendig å gjennomgå bruken. Spesielt hvordan elevene åpner og lukker passeråpningen, hvordan de holder den slik at åpningen ikke endrer seg når de tegner, og hvordan de lager sirkler uten at passerspissen glipper fra papiret. Elevene lærte dette fort og hadde stor glede av å tegne rosetter. Det ble lagt opp til en ganske detaljert gjennomgang i PowerPoint, men de fleste skjønnte fort og valgte og utforske metoden på egen hånd.

Etter at rosetten var ferdig, fikk de lov til å fargelegge de ulike områdene i tegningen. Det ble ikke satt noe krav til fargesymmetri, men de fleste valgte rotasjonssymmetrisk fargelegging. Elevene ble utfordret til å finne rosettens grunnfigur for så å bruke vinkelspeilet til å gjenskape hele rosetten.





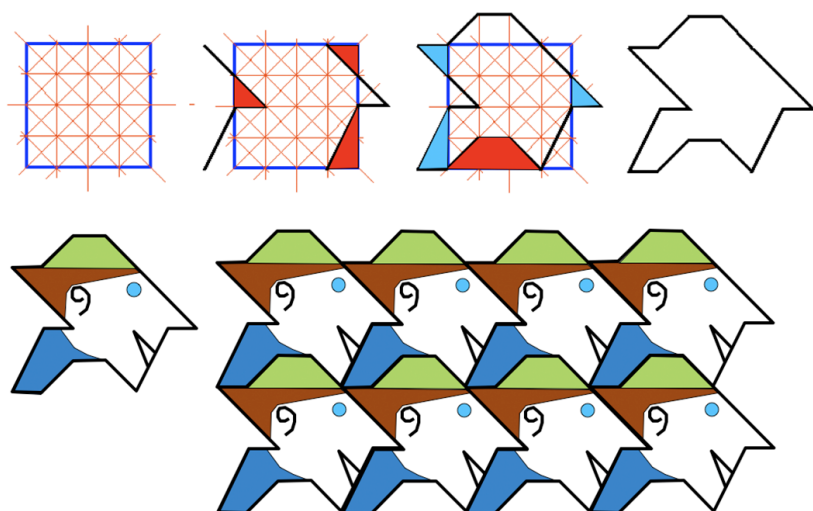
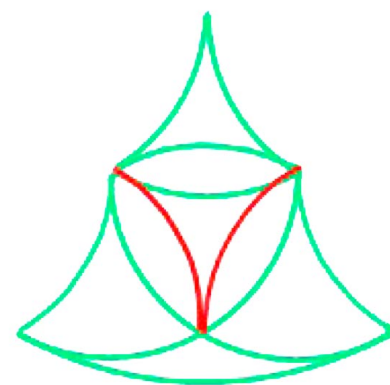
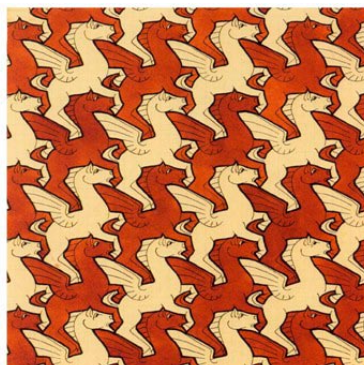
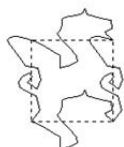
Figur 12 – Tegning av rosetter med passer, trinn for trinn.

På dette tidspunktet i opplegget var det ofte gått ca. 90 min og det var naturlig å oppsummere de tre symmetriene som var gjennomgått: Speil-symmetri (aksesymmetri), rotasjonssymmetri og båndsymmetri for så å avslutte aktivitetene.

## Flatedekkende mønster

Vi hadde imidlertid laget en oppgave 6 med tema flatedekkende mønster. Som en kort introduksjon, tenkte vi å vise et eksempel fra Escher (figur 14) eller ganske kort vise hvordan en kan lage tesselleringer (se figur 15). Imidlertid ble det aldri tid til denne ekstraoppgaven. Vi nøyde oss derfor å bruke den på lærerkursene.

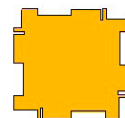
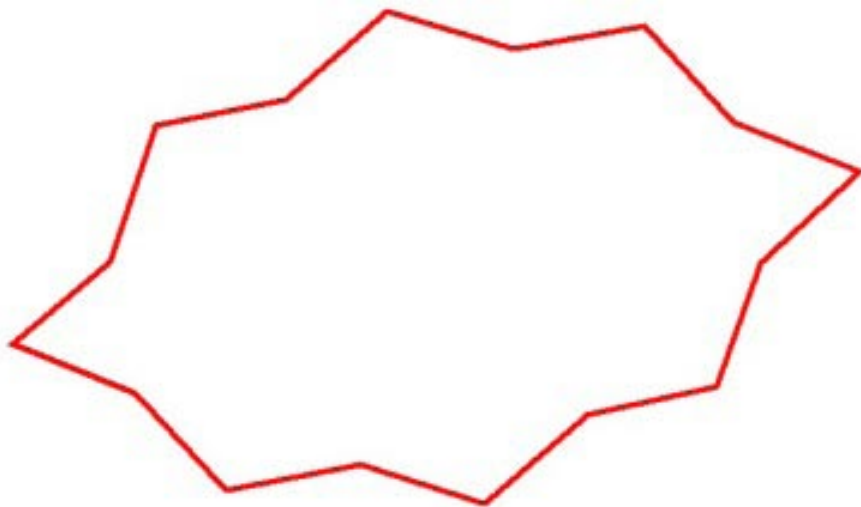
Figur 14 – Et eksempel hentet fra Escher



Figur 15 – Tessellering, trinn for trinn.

I oppgave 6 skal elevene bruke 6 kvadrater og 18 likesidete trekkanter til å dekke en avgrenset flate fullstendig. Det ble brukt Jovo-brikker til oppgaven. For å få til dette må elevene tenke logisk mht. summen av vinkler og hva som kan tillates for å unngå å overskride det avgrensede området (se figur 16). Eleven fikk utdelt det avgrensede området på et A4-ark.

Figur 16 A) Avgrenset område B) 6 kvadrater og 18 likesidete trekkanter (oppgave 6).

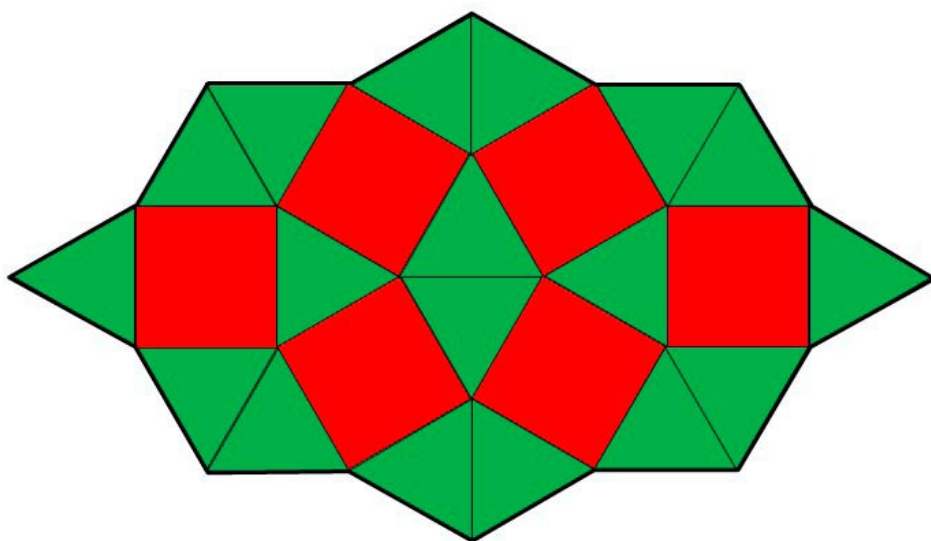


Kvadrat  
6 stk



Likesidet  
trekant  
18 stk

De oppdage snart at det bare var mulig å plassere trekkanter langs kantene. Når disse er plassert ser en tydelig hvor de seks kvadratene skal stå. Til slutt er det noen få trekkanter igjen som finner sin naturlige plass. Her kan en lett bringe inn summen av vinklene i trekantene og kvadratene som grenser opp til et "hjørne" i den tessellerte figuren.



Figur 18 – Flatedekkende mønster (oppgave 6).



## Oppsummering

Opplegget var innkjøpt av Trondheim kommune til samtlige 2000 elever på 5. trinn som en del av Den kulturelle skolesekk. Før oppstart ble lærerne tilbudt kurs for å bli kjent med opplegget slik at de lettere kunne gjennomføre for- og etterarbeid og være en ressurs under gjennomføringen. Informasjon om opplegget og materiell til etterarbeid, ble lagt ut på nettsiden til *Den kulturelle skolesekk*. Både lærere og elever evaluerte opplegget etter besøket. Resultatene viste at en svært stor del av elevene hadde fått økt forståelse av hva ornamentik var og hvilken rolle symmetri har i forholdet mellom matematikk og ornamentikk.

Opplegget med tilhørende utstyr har vært utlånt hele 2010 og vil i løpet av 2012 bli duplisert og spredd til andre Vitensenter i Norge.



### LITTERATUR

- [1] Rossing, Larsen, Adsen, Øien, *Matematikk og ornamentikk – Lærerveiledning*, Vitensenteret i Trondheim, 2009
- [2] Rossing, *Den matematiske krydderhylle*, Tapir akademisk forlag, 2007

Matematik och ornamentik som undervisningsupplägg finns även på webben. I detta rika material finns bland mycket annat lärarhandledning, powerpointpresentation, kopieringsunderlag och fördjupningar.

[www.viten.ntnu.no/matematikk.php](http://www.viten.ntnu.no/matematikk.php)