

Matematik

– ett kommunikationsämne

Matematik – ett kommunikationsämne behandlar grundläggande matematikundervisning. Materialet tar upp nyheter i grundskolans kursplan och ger undervisningsexempel. I varje kapitel finns elevaktiviteter och studieuppgifter med litteraturförslag. Kursplan och betygskriterier ingår.

Detta material är sammanställt av

Ronny Ahlström, Berit Bergius, Göran Emanuelsson,
Lillemor Emanuelsson, Mikael Holmquist,
Elisabeth Rystedt och Karin Wallby.

NCM
Nämnamn
Göteborgs universitet

I samband med den nya läroplanen i grundskolan Lpo 94, hade Skolverket ett projekt för att ta fram material med syfte att diskutera den inledande matematikundervisningen och uppmärksamma

- målsättningen för ämnet matematik,
- elevernas erfarenheter av och sätt att lära matematik,
- metodik och arbetssätt.

Materialet gör inga anspråk på att vara heltäckande. Erfarenhetsmässigt betydelsefulla områden har valts ut av arbetsgrupp och projektledning. Elev- och studieuppgifter är avsedda som underlag för diskussion kring frågor om hur vi får bättre utbyte av utbildningen i matematik.

Projektledning

Gull Olsson

Göran Emanuelsson

Bengt Johansson

Redaktion

Göran Emanuelsson, Karin Wallby,
Bengt Johansson & Ronnie Ryding

Omslag Ronnie Ryding

© 1996 Författarna och Nämnamnaren
ISBN 91-88450-06-6 Upplaga 1:23

Tryck:

Litorapid Media AB, Göteborg, 2011

Adresser

NCM/Nämnamnaren
Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Fax. 031-786 22 00

e-post:

bestallning@ncm.gu.se

Innehåll

Medverkande 7

Matematik – ett kommunikationsämne 8

En förändrad skolmatematik 8
Stöd- och stimulansmaterial 8
Bokens uppläggning 9
Materialets användning 9
Skolutveckling 10
Kompetensutveckling 10
Utveckling av kursplanen 10
Litteratur 10

Kapitel 1

Arbetsätt och arbetsformer 11

Enskild tyst räkning 11
Hur gör vi för att utveckla arbets-
sätt och arbetsformer? 14
Tankeinstrument för val av
arbetsätt 14
Det sociala samspelet 16
Elevuppgifter 18
Litteratur 24

Harriet Axelsson

Räknar du med föräldrar? 27

Matematik ett pojkkämne? 27
Begåvning och ansträngning 27
Föräldrar betyder mer än lärare 28

Pierre Jamot

Matematik med hjälp av teckningar 29

En idé tar form 29
Trögt i starten 30
Problem för alla 30
Andra ville pröva 31

Ulla Runesson

Olikheter i klassen – tillgång eller problem? 33

En empirisk studie 33
Matematikundervisningen i
klasserna 34
Arbetsätt och lärande 34
Konsekvenser för lärande 35
Outnyttjade möjligheter 36
Läraren som arbetsledare 36
Är problemen generella? 37
Referenser 37

Arnost Rusek

Matematik och demokrati – när mötas de två? 38

Blåval 38
Resan Eslöv–Lund 38
Några principer 40
En ny start för Sverige 41
Kostnader och behov 43
Avslutande reflektioner 43

Kapitel 2

Samtal och resonemang 45

Frågor för att få igång diskussion 47

Elevuppgifter 48

Litteratur 52

Karl Henrik Eriksson

Om barns förmåga att bilda begrepp 54

Basfärdigheter 54

Material 54

Några ryska bidrag 55

Könsdifferenser 55

Att benämna tingen 56

Förklarande kontra upptäckande metod 56

Experiment med begreppsbildning 58

Referenser 58

Bengt Bratt och Jan Wyndhamn

Språket – vår mentala tumme 59

Referenser 62

Grupparbetsuppgifter 63

Inger Wistedt

Matematiska samtal 65

Kommunikationens roll 65

Hur långt kommer bilen? 66

Att förstå varandra 67

Referenser 68

Kapitel 3

Problemlösning 69

Varför är problemlösning så viktigt? 69

Hur kan vi arbeta? 70

Undervisningens innehåll 71

Låt kreativiteten blomma 72

Problemsamling 74

Litteratur 83

Frank Lester

Problemlösningens natur 85

Problemlösningens förmåga 85

Att undervisa i problemlösning 87

Problemlösningens program 87

Läraraktiviteter vid problemlösning 90

Barn är problemlösare 91

Referenser 91

Barbara Jaworski

Kan alla elever vara matematiker? 92

Vad innebär det att vara matematiker? 92

Att vara matematisk 93

En matematisk miljö 94

Att vara matematisk i en matematisk miljö 95

Ett teoretiskt perspektiv 98

Sammanfattning.

Att vara matematiker 100

Referenser 100

Kapitel 4

Ett kulturarv 101

Talsystem från olika kulturer 101

Talsystemens uppbyggnad 102

Det babyloniska talsystemet 103

Det egyptiska talsystemet 104

Det kinesiska talsystemet 105

Mayafolkets talsystem 106

Litteratur 109

Mikael Holmquist

Historiskt perspektiv i klassrummet 111

Varför och hur 111

Ett klassrumsförsök 112

Resultat och funderingar 112

Elevuppgifter 113

Referenser 115

Frank Swetz

Matematiken är en del av vår kultur 117

Införliva historia i matematikundervisningen 118

Att illustrera hur matematiska idéer växer och utvecklas 124

Sammanfattning 126

Referenser 126

Kapitel 5

Miniräknare 127

Bakgrund och motiv 127

Attityder till miniräknaren 128

Olika beräkningsmetoder 128

Miniräknarkunskap 128

Ett räknetekniskt hjälpmedel 129

Ett metodiskt hjälpmedel 130

Ett motivationsskapande hjälpmedel 131

Ett individualiserande hjälpmedel 132

Elevaktiviteter 133

Litteratur 136

Björn Forsberg

Miniräknaren i min klass 137

Miniräknaren slår inte igenom 137

Uppläggning av ett försök 138

Metod och genomförande 138

Resultat 139

Diskussion 140

Referenser 141

Kapitel 6

Talmönster 143

Att upptäcka mönster 143

Vinkelsummor i månghörningar 145

Udda och jämna tal 145

Flera mönster 146

Individualisering 149

Talmönster och algebra 150

Fibonaccital och mönster 153

Elevaktiviteter 155

Litteratur 161

Kapitel 7

Rumsuppfattning och geometri 163

Rumsuppfattning 163

Hur utvecklas grundläggande rumsuppfattning? 164

Aktiviteter i rumsuppfattning 166

Aktiviteter kring ord och begrepp i geometri 174

Litteratur 177

Kapitel 8

Statistisk kommunikation 179

Elevaktiviteter 181

Litteratur 187

Andrejs Dunkels

Den första statistiken 189

Stam-bladdiagrammet 189

Den första lektionen i åk 1 190

Svårigheter med verkligheten 192

Pulsen 192

Referenser 192

Lisbeth Åberg-Bengtsson

Elevers förståelse av diagram 193

Att förstå grafisk representation 194

Det empiriska materialet 195

En kategorisering av problem 196

Något om olika diagramtyper 199

Sammanfattande reflektioner 203

Referenser 203

Bilaga 1

Grundskolans kursplan i matematik 205

Ämnets syfte och roll 205

Ämnets uppbyggnad och karaktär 206

Mål som eleverna skall ha uppnått
i slutet av det femte skolåret 206

Mål som eleverna skall ha uppnått
i slutet av det nionde skolåret 207

Kursinfo 2002/03 från Skolverket med
Grundskolans timplan 207

Bilaga 2

Bedömning i ämnet matematik 210

Bedömningens inriktning 210

Betygskriterier 211

Bilaga 2a: Lpo 94, 2.7

Bedömning och betyg 212

Medverkande i

Matematik – ett kommunikationsämne

Ronny Ahlström, Veingeskolan, Laholm

Harriet Axelsson, Högskolan i Halmstad

Berit Bergius, Fiskebäcksskolan, Göteborg

Bengt Bratt, Institutionen för lärarutbildning, Linköpings universitet

Andrejs Dunkels, Institutionen för matematik & Institutionen för pedagogik
och ämnesdidaktik, Högskolan i Luleå

Göran Emanuelsson, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet

Lillemor Emanuelsson, Fiskebäcksskolan, Göteborg

Karl-Henrik Eriksson, Institutionen för pedagogik och psykologi,
Linköpings universitet

Björn Forsberg, Lövsåsensskolan, Billingsfors

Mikael Holmquist, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet

Pierre Jamot, Asklandaskolan, Vårgårda

Barbara Jaworski, University of Oxford, Department of Educational Studies

Bengt Johansson, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet

Frank Lester, University of Indiana, Bloomington

Gull Olsson, Skolverket, Göteborg

Ulla Runesson, Institutionen för metodik, Göteborgs universitet

Arnost Rusek, Vårdgymnasiet, Hässleholm

Ronnie Ryding, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet

Elisabeth Rystedt, Polhemsskolan, Trollhättan

Frank Swetz, Pennsylvania State University

Karin Wallby, Sollebrunns skola

Inger Wistedt, Institutionen för pedagogik, Stockholms universitet

Jan Wyndhamn, Institutionen för lärarutbildning, Linköpings universitet

Lisbeth Åberg-Bengtsson, Institutionen för pedagogik, Göteborgs universitet

Vid en författarkonferens med arbetsgruppen gav följande lärare värdefulla synpunkter som inarbetats i boken:

Elisabeth Callenberg, Ytterbyskolan, Kungälv

Ulla Engström, Kålltorpsskolan, Göteborg

Lillemor Kunder, Höjdensskolan, Färgelanda

Matematik – ett kommunikationsämne

I denna inledning ges en kort redogörelse för bakgrund, målsättning och arbete som lett till detta Nämnaren TEMA. Här beskrivs materialets innehåll och hur det är tänkt att användas.

En förändrad skolmatematik

Matematik är ett av skolans viktigaste ämnen. Målen uttrycks i den nya kursplanen som tillsammans med nya förordningar, ny läroplan, ny timplan och ett nytt betygssystem skall medverka till en förbättrad matematikundervisning i grundskolan [1].

Genom det nya styrsystemet för skolan har en stor del av ansvaret för undervisningen förskjutits från nationell till lokal nivå. Lärare och elever har fått ett större ansvar vid utformningen av de lokala arbetsplanerna. Detta gäller även för val av innehåll, hur detta organiseras och vilka arbetssätt och arbetsformer som skall väljas. Lärare har därmed större möjligheter att påverka undervisningen, men också ett större ansvar.

För att läroplanens värdegrund skall respekteras, mål uppnås och riktlinjer följas måste undervisningen utvecklas. Detta ställer nya krav på lärares kunskande.

Det material vi här presenterar är till för att stödja en sådan utveckling och för att illustrera de tankar som kursplanen ger uttryck för.

Stöd- och stimulansmaterial

Skolverket började 1994 ett arbete för att ta fram ett studiematerial för lärare som undervisar i matematik, utifrån de beskrivna förändringarna. I arbetet med *Matematik – ett kommunikationsämne* har en grupp lärare med erfarenhet från olika stadier medverkat. Valet av innehåll är gjort utifrån följande prioriteringsgrunder:

- Vilka är de viktigaste nyheterna i läroplan och kursplan?
- Vad kan behöva konkretiseras? Vad är svårt att tolka?
- Vilka områden vet vi av erfarenhet är viktiga att utveckla [3]?

Boken innehåller 8 kapitel:

1 Arbetssätt och arbetsformer

2 Samtal och resonemang

3 Problemlösning

4 Ett kulturarv

5 Miniräknare

6 Talmönster

7 Rumsuppfattning och geometri

8 Statistisk kommunikation

Bokens uppläggning

Vi lärare är intresserade av att utveckla och förbättra matematikundervisningen. En sådan utveckling hoppas vi kommer att belönas i form av ett ökat matematikintresse och ett ökat kunnande hos eleverna.

Syftet med materialet är att stimulera reflektion och diskussion kring och i matematikundervisningen. Innehållet skall inte ses som anvisningar! Det är tänkt att utan pekpinna ge stöd och stimulans till att ”frigöra och tillföra energi” i lärarkåren.

Varje kapitel inleds med en ingress som ger en kort beskrivning av kapitlets innehåll. Det följande avsnittet skall ge perspektiv och nya tankar. För att stimulera till reflektion och erfarenhetsutbyte finns elevuppgifter att pröva tillsammans med elever och studieuppgifter att diskutera med kollegor. Vissa elevuppgifter är utförligt beskrivna, medan andra kan fungera som inspiration. Vi hoppas att alla skall kunna finna användbara exempel.

I boken finns också återpublicerade eller översatta artiklar. De har valts ut för att de bedömts aktuella, angelägna och värdefulla med tanke på bokens syften.

Kapitlen kan studeras oberoende av varandra. Samtidigt finns det kopplingar mellan kapitlen, så att frågor belyses utifrån olika perspektiv i flera kapitel.

I varje kapitel ges referenser och lästips under rubriken *Litteratur*. Svensk litteratur har prioriterats. Med hjälp av *Nämnares databas* har vi valt ut ett antal artiklar, böcker och rapporter för de som vill fördjupa sig kring innehåll i olika kapitel. Det ges också förslag på

utländsk litteratur. I litteraturförteckningarna presenteras Nämnares artiklar först, därefter (avskilda av streck) annan svensk litteratur och sist litteratur på engelska eller skandinaviska.

Nyutkommen metodisk och didaktisk litteratur anmäls i Nämnares [4] och litteratur med vetenskaplig inriktning i *NOMAD* [5]. I dessa tidskrifter ges också information kring svenska, nordiska och internationella konferenser samt dokumentation kring dessa. Litteratur kan skaffas via bibliotek, bokhandel eller via högskolor och universitet.

Materialets användning

Vi vill stimulera till erfarenhetsutbyte och utvecklingsarbete, till fortbildningsaktiviteter och vidare studier. Tanken är att boken skall kunna användas vid enskild planering, i arbetslagets diskussioner, i ämnesdiskussioner på skolorna, på studiedagar och i andra fortbildningssammanhang samt i grundutbildningen. Materialet kan med fördel diskuteras i studiecirkel. Om någon vill ha hjälp med planering eller av t ex föreläsare eller seminarieledare, kontakta någon av de medverkande (s 7) eller Nämnares redaktionen.

För att underlätta diskussioner och vardagsarbete ingår följande bilagor:

Bilaga 1 Grundskolans kursplan i matematik, och tillhörande timplan.

Bilaga 2 Skolverkets föreskrifter och allmänna råd om betygsriterier för matematik samt Lpo:s och grundskoleförordningens texter om betyg.

För gymnasieskolan ges ett motsvarande material ut, *Matematik – ett kärnämne*. Den boken behandlar bl a frågor som rör övergången från grundskola till gymnasium, resultat av nationella utvärderingar samt elevernas intresse och ansvar för sina studier. I boken finns exempel på undersökande aktiviteter i matematik och elevuppgifter, som också kan användas i de senare skolåren i grundskolan.

Skolutveckling

Kommunerna har sedan 1991 arbetsgivaransvar för lärare och är enligt skollagen skyldiga att se till att fortbildning anordnas för undervisande personal. Staten ansvarar för att det finns tillgång till fortbildning av god kvalitet. Detta gäller i synnerhet vid införandet av nya läroplaner. Rektor är enligt läroplanen ansvarig för den kompetensutveckling som krävs för att lärarna skall kunna utföra sina arbetsuppgifter i en god arbetsmiljö.

Kompetensutveckling

Nya förutsättningar med högre krav på kvalitet och likvärdigt utbud av fortbildning gör att vi strävar efter bättre former för kompetensutveckling. Om denna skall fungera som ett bra instrument i lokal skolutveckling måste varje kommun och skola analysera behoven av fortbildning. Läroplan, kursplan och

arbetsplan samt egna behov i relation till utvärdering och uppföljning är utgångspunkter vid denna analys. Lärares inflytande och delaktighet är en förutsättning för kvalitet i utvecklingen av skolan och den egna professionen.

Utveckling av kursplanen

Enligt förarbeten till läroplanerna skall vi ha en kontinuerlig utveckling av kursplanernas innehåll. Vid diskussioner och studier av den här boken kommer det säkert förslag till förbättringar och kompletteringar.

Vi välkomnar bidrag för vidare spridning i t ex *Nämnamnaren*. Hör av dig till oss! Adress, telefon, fax och e-post på sidan 2.

Litteratur

- [1] *Regler för målstyrning*. (1995, Tredje upplagan). Grundskolan: Skollagen, Grundskoleförordningen, Läroplan, Kursplaner. Stockholm: Svensk Facklitteratur.
- [2] *SKOLFS 1995:66*. Skolverkets föreskrifter och allmänna råd om betygskriterier för grundskolans ämnen.
- [3] Skolverket (1993). *Den nationella utvärderingen av grundskolan våren 1992*. Matematik, åk 5. Skolverkets rapport nr 14. Matematik åk 9. Skolverkets rapport nr 15. Stockholm: Liber distribution och publikationstjänst.
- [4] *Nämnamnaren, tidskrift för matematikundervisning*. Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.
- [5] *Nordisk matematikdidaktik, NOMAD, Nordic Studies in Mathematics Education*. Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Redaktionen

Arbetssätt och arbetsformer

Lämpliga arbetssätt och arbetsformer beror av mål för och innehållet i den matematik som behandlas och av de elever och lärare som ska arbeta med detta innehåll. Det väsentliga blir då hur man väljer aktiviteter så att de bäst svarar mot matematikens syfte, idéer och natur samt möter elevernas nyfikenhet och lust att lära.

Harriet Axelssons artikel behandlar föräldrars olika förväntningar på pojkar och flickor. Pierre Jamot visar hur en teckning kan användas som utgångspunkt för problemhantering. Ulla Runesson diskuterar olikheter i klassen som tillgång eller problem och Arnost Rusek belyser lektionssamtalets innehåll.

Enskild tyst räkning

I Skolverkets rapport nr 61 (Pettersson, 1994) redovisas hur elever i årskurs 9 har löst standardprovsuppgifter och gruppuppgifter 1992. Rapporten visar att många elever har svårigheter att lösa problem av mer komplex natur och att de är ovana att arbeta med och redovisa gruppuppgifter.

I Bilden av skolan (1993c) konstateras att eleverna är duktiga på enklare problemlösning och numeriska beräkningar men att det finns stora skillnader mellan elever och skolor. Cirka 90 procent av eleverna i åk 5 och i åk 9 bedöms ha de nödvändiga kunskaperna och färdigheterna enligt Lgr 80. Enskild tyst räkning och gemensamma genomgångar av uppgifter dominerar lektionerna. Eleverna får god träning att räkna, men inte tillfälle att analysera och lösa problem, argumentera för sina lösningar eller befästa begrepp (Skolverket, 1993a & 1993b). Svårigheterna att individualisera undervisningen missgynnar inte bara elever som har svårt att lösa uppgifter på egen hand, utan också elever som kan och vill lösa mer komplexa problem.

Resultaten förefaller att hänga samman med hur arbetet i skolan organiseras och hur tiden för matematik används. Skolans arbetsformer och arbetssätt samt elevernas möjligheter till inflytande är av betydelse för att svara mot de krav på kommunikationsförmåga, kreativitet och självständighet som ett framtida samhälls- och arbetsliv ställer.

Ur Lgr 80:

Mål och riktlinjer Arbetsformer och arbetssätt (s 42 ff)

Arbetsformer handlar om olika sätt att organisera undervisningen. Eleverna kan arbeta med gemensamma uppgifter i klassen eller i mindre grupper, i par eller helt individuellt. Läraren kan vända sig till hela klassen, handleda gruppvis eller individuellt. En variation efter stoffets art bör eftersträvas. Om lärarna samarbetar i arbetslag kan olika arbetsformer lätt växla inom ett arbetsområde.

Med **arbetssätt** brukar avses den metod med vilken man försöker uppnå ett mål, t ex tillägna sig eller lära ut olika kunskaper och färdigheter. I vissa fall är arbetssättet givet. Det går inte att lära sig samarbeta, om man inte får praktisera samarbete, man kan inte lära sig disponera en uppgift och redovisa den klart och åskådligt, om man inte tillämpar arbetssätt som kräver detta...

Läraren får inte inskränka sina insatser till att enbart organisera själva arbetssituationen för att sedan låta verksamheten ledas av i förväg producerade uppgifter. Hemuppgifter för eleverna utgör en del av skolans arbetssätt. Skolans arbetssätt måste också få prägla hemuppgifternas utformning.

Ur Lpo 94

Mål och riktlinjer

Kunskaper

Skolan skall sträva efter att varje elev (s 17)

- utvecklar nyfikenhet och lust att lära,
- utvecklar sitt eget sätt att lära
- ...
- lär sig att arbeta både självständigt och tillsammans med andra
- ...
- lär sig att använda sina kunskaper som redskap för att
 - formulera och pröva antaganden och lösa problem,
 - reflektera över erfarenheter och
 - kritiskt granska påståenden och förhållanden.

Läraren skall (s 19)

- utgå från varje elevs behov, förutsättningar, erfarenheter och tänkande,
- stärka elevens vilja att lära och elevens tillit till den egna förmågan,
- ge utrymme för elevens förmåga att själv skapa och använda olika uttrycksmedel,
- stimulera, handleda och ge särskilt stöd till elever som har svårigheter,
- samverka med andra lärare i arbetet för att nå utbildningsmålen och
- organisera och genomföra arbetet så att eleven
 - utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga,
 - upplever att kunskap är meningsfull och att den egna kunskapsutvecklingen går framåt,
 - får stöd i sin språk- och kommunikationsutveckling,
 - succesivt får fler och större självständiga uppgifter och ett ökat eget ansvar,
 - får möjligheter till ämnesfördjupning, överblick och sammanhang och
 - får möjlighet att arbeta ämnesövergripande.

Elevernas ansvar och inflytande

Skolan skall sträva efter att varje elev (s 20)

- tar ett personligt ansvar för sina studier och sin arbetsmiljö,
- succesivt utövar ett allt större inflytande över sin utbildning och det inre arbetet i skolan.

Läraren skall

- utgå från att eleverna kan och vill ta ett personligt ansvar för sin inläring och sitt arbete i skolan,
- se till att alla elever oavsett kön och social och kulturell bakgrund får ett reellt inflytande på arbetsätt, arbetsformer och undervisningens innehåll samt att detta inflytande ökar med stigande ålder och mognad,
- verka för att flickor och pojkar får ett lika stort inflytande över och utrymme i undervisningen,
- svara för att eleverna får pröva olika arbetssätt och arbetsformer,
- tillsammans med eleverna planera och utvärdera undervisningen.

I diskussionen av resultaten i matematik i Bilden av skolan menar man att skolan måste satsa på en mer förståelseinriktad och helhetspräglad undervisning och inläring, där det finns utrymme för eleverna att diskutera och argumentera för sina lösningar och att föra matematiska resonemang. Det är också väsentligt att undervisningen mer än nu inriktas mot att eleverna utvecklar tilltro till det egna tänkandet, kunnandet och lärandet i och om matematik.

Utbildningen skall utformas så att eleverna förstår värdet av att behärska grundläggande matematik och får tilltro till sin förmåga att lära sig och använda matematik. Den skall ge en god grund för studier i andra ämnen, fortsatt utbildning och lärande.

Matematik är en levande mänsklig konstruktion och en kreativ och undersökande aktivitet som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition. Undervisningen i matematik skall ge eleverna möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på olika problem.

Undervisningen i matematik skall främja elevernas allsidiga utveckling och särskild uppmärksamhet skall ges elever som kan behöva särskilt stöd och längre tid för att upptäcka och lära viktiga begrepp, metoder och samband.

Kursplan för grundskolan

I Lgr 80:s mål och riktlinjer beskrevs Arbetsformer och arbetsätt. I Lpo 94 beskrivs däremot vilka mål man ska nå och lärare och skola får indirekt anvisningar för hur undervisningen kan läggas upp, se föregående sida.

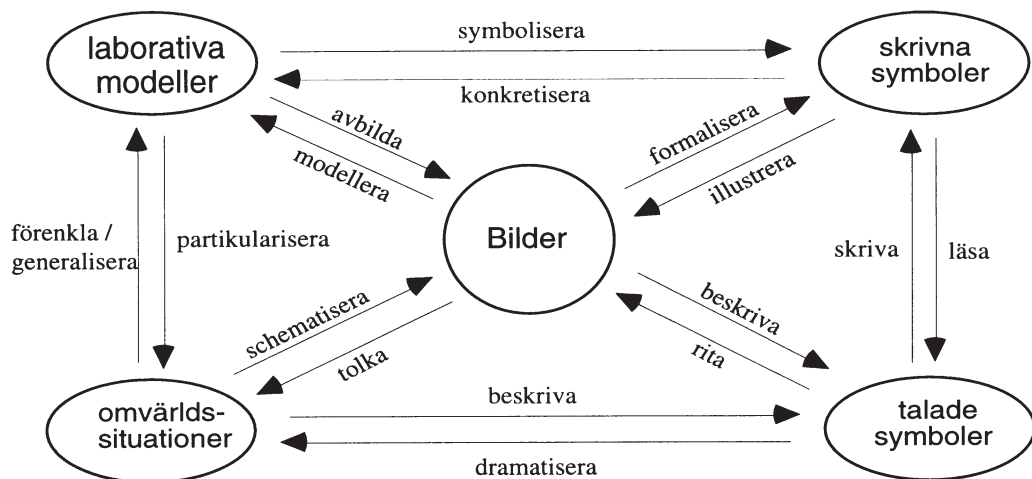
- Vilka likheter och skillnader finns det i beskrivningarna av arbetsätt och arbetsformer i Lgr 80 och Lpo 94?
- Hur väljer jag arbetsätt och arbetsformer i matematik i samklang med Lpo 94, med tanke på
 - a) diagnostisering vid skolstarten och sedan kontinuerligt,
 - b) elevens deltagande i planering,
 - c) elevens ansvar för sitt lärande,
 - d) elevens hemarbete,
 - e) flickors-pojkars förhållningssätt till matematik?

Hur gör vi för att utveckla arbetssätt och arbetsformer?

Eleverna har personliga erfarenheter och uppfattningar av matematik och lärande i matematik med sig till skolan. Läraren ska svara för att dessa kan relateras till och utvecklas i överensstämmelse med kursplanens mål (Eriksen, 1993). Skolans matematikundervisning skall möta och utveckla barnens uppfattningar om vad matematik är, vad den kan användas till och hur man lär. För läraren blir det därför viktigt att undersöka hur elever tänker och lär. Lärarens roll blir också att utmana eleverna med frågor, uppmuntra dem att söka svar, tala med dem om möjliga lösningar och få dem att göra egna upptäckter och skaffa nya kunskaper. För att man ska kunna anknyta till barns kunskaper, erfarenheter, nyfikenhet och se matematikens värde, möjligheter och sociala sammanhang så behöver man söka matematiska aktiviteter utanför läromedel och stenciler. Man kan utnyttja det som händer i och utanför skolan i vardagen för att utveckla tal- och rumsuppfattning och för att visa det meningsfyllda i matematikens redskap. Elevernas känslomässiga inställning till matematik har stor betydelse för hur de lär sig och använder sin kunskap. Läraren är naturligtvis nyckelfiguren när det gäller att utveckla synen på matematik och lusten att lära matematik. Det gäller att ta vara på möjligheter till resonemang med elever och mellan elever kring matematikidéer, begrepp och metoder, hur de beskrivs, tolkas, används och utvecklas i spontant uppkomna situationer och organiserade aktiviteter. Alla elever ska få möjlighet att upptäcka mönster och samband i matematik. Elever som är vana att vara passiva, och har en lärare som är den som talar mest, behöver ledning och uppmuntran för att aktivt kunna delta i matematiksamtal.

Tankeinstrument för val av arbetssätt

Att utveckla kunnande om teckensystem och vedertagna symboler är en avgörande faktor för att utveckla tänkande (Vygotskij, 1981). En intellektuell utveckling förutsätter att man tillägnar sig kulturens redskap i olika former. Bruner (1973) tar upp de välkända formerna handlingsmässig (enactive), bildmässig (ikonisk) och språklig (symbolisk) representation. I vår vetenskapliga och teknologiska kultur har vi lagt stor vikt på symbolsystem där vi reorganiserar och bearbetar vårt vetande. Symbolsystem är bra för framställning, diskussion och kommunikation. Som tankeredskap har de dels en subjektiv funktion som hänger ihop med personliga uppfattningar, dels en objektiv funktion därför att symbolerna utvecklats under en lång kulturhistorisk process till ett gemensamt verktyg (Mellin-Olsen, 1989; Sällström, 1991).



Figur från Emanuelsson (1995), s 3.

För att tillägna sig vetande och kunnande i matematik bör eleverna få möjlighet att bygga upp relationer, se överensstämmelser och konflikter mellan olika former (Eriksen, 1993). Lärande i matematik är en process där målet är insikt i abstrakta strukturer och relationer. Men för att nå dit vet vi som lärare att man inte enbart kan arbeta och träna med symboler. Man måste "tala matematik", "anknyta till verkligheten", "arbeta laborativt", "börja med det konkreta", "lära sig tänka". Det är viktigt att barn får möjlighet att möta och arbeta med olika representationer som t ex konkreta modeller, vardagsspråk, teckningar, diagram, skriftspråk, matematikterminologi, matematisk notation och symboler. Ordningsföljden i undervisningen mellan representationerna kan växla beroende på barn, begrepp och erfarenheter.

Detta ger utgångspunkter för ett slags tankeinstrument för hur man kan välja arbetssätt, när det gäller matematikinnehåll. Det handlar självklart inte bara om tankar utan också om olika sätt att lösa en uppgift: i omvärldssituationer, laborativt, med bild, muntligt, skriftligt, med symboler, eller med andra representationer. Man kan se representationer i ett schema, se ovan, där förståelse innebär att kunna utföra några av de handlingar som är avbildade (Emanuelsson, 1995; Lesh, 1981). Att tillägna sig förståelse i matematik är en kumulativ process, där man stegvis får tillgång till allt fler och mer avancerade representationer. För att få meningsfullt innehåll och minimera manipulerande med innehållslösa symboler bör man ta hjälp av konkreta modeller, elevernas vardagsspråk och egna notationsformer som mellanled till formellt och vedertaget matematikspråk (Eriksen 1993; Skemp 1982).

Representationer är viktiga i det sociala samspelet mellan elever och mellan elever och läraren för att bygga upp vetande och kunnande. Parallellt med vedertagen symbolisering borde man pröva arbete med informella representationer för att stötta och engagera diskussioner.

Det sociala samspelet

Lärarens roll blir att leda och organisera elevernas aktiva deltagande. Det räcker inte att ge eleverna tillfälle att tala matematik med varandra, att argumentera för lösningar och att lyssna till andras argument. Eleverna behöver hjälp av en vuxen, som försöker förstå vad eleven säger och som kan hjälpa eleven att tydliggöra och utveckla sina tankar (Eriksen, 1993). Planeringen för elevernas lärande är en viktig del av lärararbetet. Läroboken i matematik får inte styra undervisningen. Målen i matematik kan inte nås om eleverna enbart räknar enskilt, var och en i sin bok. Lärarens arbete blir ineffektivt om alla elever i en klass ska handledas enskilt om samma innehåll men vid olika tillfällen, då eleverna arbetar i det som brukar kallas egen takt.

Som lärare måste man tillrättalägga situationer och välja eller utveckla intressanta problem, som skapar relevanta elevaktiviteter. Om elever inte har kognitiva eller affektiva förutsättningar för att kunna engagera sig i dessa aktiviteter är det lärarens sociala och professionella plikt att stimulera och stötta eleverna. Men eleverna förväntas å sin sida att göra vad de kan för att uppfylla de krav som ställs på dem. Morten Blomhøj har i Nämnaren 21(4) beskrivit hur en osynlig överenskommelse, ett didaktiskt kontrakt, utvecklas och vilka konsekvenser detta har för arbetet i en klass. Han menar att bildandet av ett didaktiskt kontrakt är ett uttryck för att läraren tillsammans med sin klass måste söka en balans mellan olika uppfattningar, förväntningar och krav.

I det sociala samspelet i klassrummet kan varierade arbetssätt och arbetsformer ge elever möjlighet att tillägna sig matematik på olika sätt och med olika metoder. Man kan möta elevers olika behov i ett klassrumsklimat där elevers tankar respekteras och tas på allvar. Aktiviteter väljs så att eleverna ser det lustfyllda och meningsfulla i olika situationer, engagerar sig, och får tilltro till sitt lärande och att de inser att matematik handlar om att lösa problem och att upptäcka mönster eller samband. En uppgift eller ett problem bör inte väljas för dess egen skull utan för vad den är till för i lärandeprocessen (Wyndhamn, 1991).

Genom att medvetet välja uppgifter kan arbetssätt ändras och utvecklas. Vid valet av arbetssätt i undervisningen kan man följa en struktur (fritt efter NCTM, 1991):

- fri undersökning när nya material eller representationsformer introduceras
- praktiska aktiviteter före formaliseringar och räknande
- förståelse är viktigare än procedurer och regler
- språklig utveckling med hjälp av olika representationer
- undersökningar och laborationer utvecklar begreppsbyggnad

- Vilken roll spelar användningen av vedertagna matematiksymboler och andra skrivsätt i diskussioner i klassen? Vilka representationer andra än formella notationer och korrekt terminologi kan gynna samtal och lärande?
- Fundera på det matematikmoment ni håller på med i klassen just nu. Vilka olika representationer är aktuella och lämpliga att ta in i undervisningen?
- Ge till varje pil i figuren s 15 ett konkret exempel på elevuppgift som kan utveckla det aktuella kunnandet. Prova uppgifterna i din klass.
- På följande sidor finns förslag på aktiviteter och uppgifter att prova med dina elever. Välj själv eventuella hjälpmedel och om eleverna skall arbeta enskilt eller i grupp. Observera att a och b-uppgifterna behandlar i stort samma innehåll men med olika arbetssätt. Diskutera med dina kollegor för- och nackdelar med de arbetssätt som kommer fram i uppgifterna.
- Vilka fördelar eller nackdelar är det med att eleverna arbetar enskilt eller i grupp med de presenterade aktiviteterna och uppgifterna?

Elevuppgifter

1

a) Eva har 3 röda, Beda har 2 svarta och Cesar har 6 blåa bilar. Hur många har de tillsammans? Hur många fler har Cesar än Eva?

b) På en parkeringsplats står 3 röda, 2 svarta och 6 blåa bilar. Det finns tomma platser också. Hur ser din parkeringsplats ut?

Kommentar

Barnens egna bilder används i lektions-samtal. Jämförelser görs om villkoren stämmer och mellan likheter och skillnader i barnens bilder. Bilderna kan också användas för att göra parkeringsplatser för leksaksbilar, för att kontrollera att bilarna kan köra in och ut osv. Kan din parkeringsplats verkligen se ut så här?

Frågor av olika slag kan ställas: Hur många bilar står på parkeringsplatsen? Hur många lediga platser är det? Hur många fler blåa bilar är det än röda? Hur många färre är de svarta än de röda? Hur många bilar är det när parkeringsplatsen är full? Hur många fick plats om det fanns dubbelt så många platser? Hälften så många platser? Hur många bilar är det om det kommer 2 röda och 1 blå bil och parkerar? Om någon elev har svårt att lösa uppgifter genom att rita kan han/hon lösa dem med hjälp av leksaksbilar, klossar eller annat material.

2

a) Beräkna i huvudet

$6 \cdot 4, 18 + 6, 48/2$ och $31 - 7$.

b) Beskriv olika sätt att få 24 som resultat av en eller flera räkneoperationer. (24 kan naturligtvis bytas ut mot ett annat tal eller uttryck som passar elevgruppen bättre).

Talet skrivs på tavlan och eleverna uppmanas att finna så många sätt som möjligt. Olika räknesätt samlas i grupper på tavlan och eleverna uppmuntras att beskriva hur de tänkt och att hitta mönster och samband. (Se MacIntosh, 1995).

3

Eleverna i grundskolan ska förvärva god taluppfattning, allsidiga räknefärdigheter och bli förtrogna med miniräknare. Ett inslag, som kan bidra till att nå dessa mål, är att låta eleverna öva huvudräkning med räknare.

a) Beräkna följande uppgifter med huvudräkning. Kontrollera svaret med miniräknare.

$8 + 25, 33 + 7, 41 + 13, 234 + 25$.

b) På nästa sida beskrivs två miniräknarspel (Johansson 1991). Genomför något av dessa i lärargruppen och i din klass.

24				
$16 + 8$	$28 - 4$	$6 \cdot 4$	$48 / 2$	$\sqrt{576}$
$2 + 22$	$100 - 76$	$2 \cdot 12$	$12/0,5$	$4!$



Först till 67

En av spelarna, t ex du själv, trycker in ett ensiffrigt tal (inte 0) och sedan $\boxed{+}$. Din motspelare trycker därefter in ett ensiffrigt tal (inte 0) och sedan $\boxed{+}$. Turas sedan om tills någon efter en plustryckning fått 67. Den som först når 67 har vunnit matchen. Om någon av er får ett tal större än 67 har han/hon förlorat.

Varianter: Börja med **Först till 21** och att man bara får utnyttja talen 1, 2 och 3.

En annan variant är att man bara får använda 1, 4 och 7 och ser vem som först kommer till 47.

Gör egna liknande spel!

Målet är 999

Låt motspelaren börja. Han/hon har ensam hand om miniräknaren och slår in ett hemligt tresiffrigt tal. Du får alltså inte veta vilket tal som slagits in. Därefter ska din motspelare tala om för dig hur många nior som finns i talet och en annan siffra.

Din uppgift är att med så få additioner som möjligt komma fram till 999. Du får bara ge din motspelare additioner att utföra. Efter varje addition måste han/hon tala om hur många nior som finns i miniräknarfönstret och en annan siffra.

Skulle någon addition ge ett svar som är större än 999 ska motspelaren säga: "Du gick över" och sedan subtrahera med det tal som föreslogs sist, så att man kommer tillbaka till det tal som fanns före sista additionen.

Skriv upp antalet additioner som behövdes för att komma till 999.

Därefter byter ni roller och upprepar spelet. Den som kommer till 999 med minsta antalet additioner har vunnit matchen. Om man vill kan man spela en match med poängräkning som i tennis med game och set.

Hitta på egna liknande spel, t ex först till 99, 9999 eller 0,999!

4

Att studera antalet kvadrater av olika storlekar i rutnät är en aktivitet, som kan varieras i svårighetsgrad genom hela grundskolan. Aktiviteten anknyter till flera mål i de nya kursplanerna i matematik (Emanuelsson & Emanuelsson, 1994). Syfte är att studera och upptäcka mönster, resonera, beskriva, förutsäga och verifiera samband genom att räkna kvadrater i kvadratnät. Jämför arbetsätt i a och b-uppgifterna.

4 a) Gör följande deluppgifter 1-9:

1 Hur många kvadrater med sidan 1 cm finns det i kvadratnäten på nästa sida? Hur många kvadrater med sidan 2 cm finns det i 2x2-nätet? Med sidan 3 cm i 3x3-nätet, osv?

2 Hur många kvadrater med sidan 2 cm är det i
1x1-nätet 2x2-nätet 3x3-nätet
4x4-nätet 5x5-nätet 6x6-nätet?

Klipp ut den skuggade kvadraten med sidan 2 cm och pröva dig fram i de olika kvadratnäten.

3 Hur många kvadrater med sidan 3 cm är det i

1x1-nätet 2x2-nätet 3x3-nätet
4x4-nätet 5x5-nätet 6x6-nätet?

Klipp ut den skuggade kvadraten med sidan 3 cm och pröva dig fram i de olika kvadratnäten.

4 Hur många kvadrater finns det om man räknar alla storlekar – i följande nät:

1x1-nätet 2x2-nätet 3x3-nätet
4x4-nätet 5x5-nätet 6x6-nätet?

5 Hur många fler är det i 4x4-nätet än i 3x3-nätet? Hur många fler i 5x5-nätet än i 4x4-nätet?

6 Kan du se något mönster? Hur många kvadrater blir det allt som allt i ett

7x7-nät? 10x10-nät 100x100-nät?

7 Beskriv hur man kan bestämma antalet kvadrater av olika storlekar i olika kvadratnät? Skriv ner med ord hur man kan göra eller försök ställa upp en tabell.

8 Hur många kvadrater blir det i ett kvadratnät med sidan n cm? Hur många fler kvadrater är det i $(n + 1) \times (n + 1)$ -nätet än i $n \times n$ -nätet?

9 Rita nät med andra figurer, t ex rektanglar och liksidiga trianglar. Gör egna problem till dina kamrater.

4 b)

Hur många kvadrater finns det i de olika rutnäten på nästa sida? Kan du se något mönster? Hur många kvadrater tror du att det finns i ett kvadratnät med sidan 10? Med sidan 100?

Klipp ut kvadrater lika stora som de överst på förra sidan, gärna i olika färger i litet styvare papper. Flytta runt en efter en av de skuggade kvadraterna i rutnäten, och se hur många positioner du hittar i olika nät, och titta efter mönster. Det finns spännande upptäckter att göra. Om du hittar mönster kan du försöka förutsäga hur många kvadrater av en viss storlek det blir i ett större kvadratnät och pröva om förutsägelsen stämmer. Beskriv de upptäckter och samband du får fram, t ex i en tabell.

Kommentar

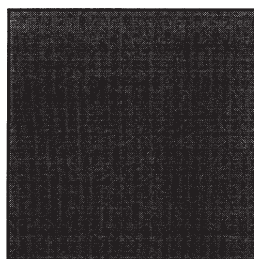
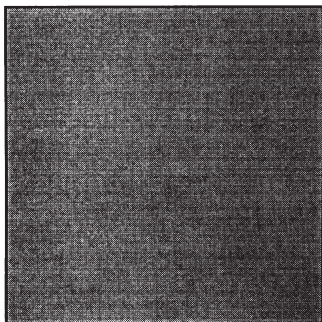
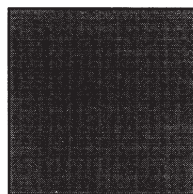
Det är viktigt att stimulera eleverna att beskriva och anteckna sina resultat med något slags systematik för att de lättare ska kunna se mönster eller på vilket sätt antalet kvadrater ökar. En översikt ungefär som den övre delen av tabellen på s 22 kom eleverna själva fram till, när vi prövade Uppslaget i åk 3.

Grupperna kan beskriva sina resonemang muntligt eller skriftligt för varandra och diskutera likheter och skillnader i det man gjort.

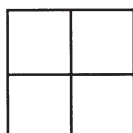
Arbetet kan utvidgas på olika sätt och tex leda till generaliseringar språkligt eller med symboler beroende på stadium eller elevernas mognad, se nedre delen av tabellen.

Man kan rita nya nät med andra figurer, t ex rektanglar och liksidiga trianglar. Eleverna kan göra egna problem till sina kamrater.

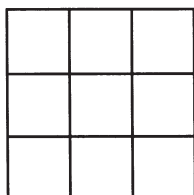
Som en fortsättning kan eleverna få i uppgift att fundera ut egna nätverk med andra figurer, t ex rektanglar eller trianglar.



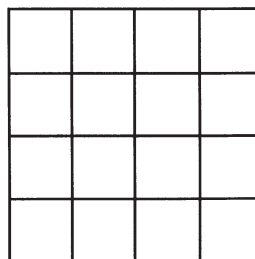
1 x 1



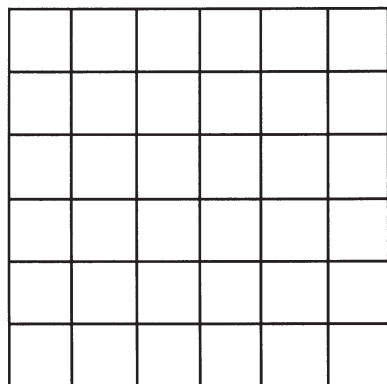
2 x 2



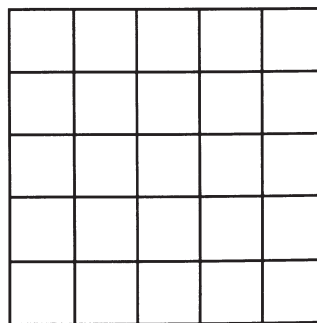
3 x 3



4 x 4



6 x 6



5 x 5

Antal kvadrater av olika storlek i kvadratnätet							
	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	summa
1x1	1						1
2x2	4	1					5
3x3	9	4	1				14
4x4	16	9	4	1			30
5x5	25	16	9	4	1		55
6x6							
7x7							
nxn	n^2	$(n-1)^2$	$(n-2)^2$	$(n-3)^2$			S^*

*) Summan är $S = n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \dots + 1 = n(n + 1)(2n + 1)/6$

5

I god taluppfattning ingår förståelse för positionssystemets uppbyggnad.

a) Vad betyder de olika siffrorna i talet 29 351?

b) Gör ett tal med siffrorna 1, 2, 3, 5, 9 som ligger så nära 20 000 som möjligt.

6

För att få god förståelse för decimalsystemets uppbyggnad måste man skaffa sig förtrogenhet med att tolka och arbeta med tal i decimalform.

a) Hur många tiondelar och hundradelar är det i talet 1,456?

b) Vilka tal i decimalform finns det mellan 1,4 och 1,5? Ge exempel!

7

I god taluppfattning ingår förståelse för tal i bråkform.

a) Skriv $\frac{1}{3}$ som ett bråk med nämnaren 6, 9 och 12.

b) Vilka tal i bråkform finns det mellan $\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{3}$?

För resonemang kring uppgifter och aktiviteter kring taluppfattning liknande dem i uppgifterna 5-7, se Reys & Reys, 1995, Reys m fl 1995a och 1995b, Reys, Reys & Emanuelsson, 1995.

8

a) Rita en rektangel med längden 7 cm och bredden 5 cm. Räkna sedan ut omkretsen och arean.

b) Tänk dig att du har ett stängsel som är 24 m långt. Du ska bygga en inhägnad åt din hund. Vilket är det största – minsta utrymme din hund kan få?

9

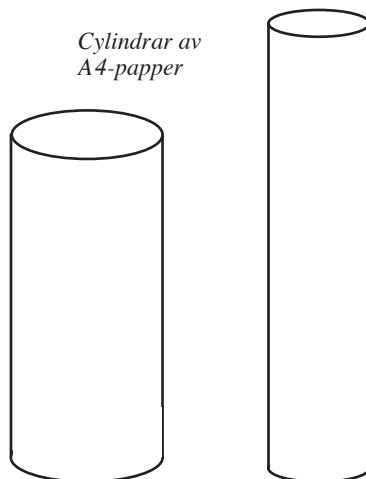
a) Beräkna volymen av en cylinder med diametern 7 cm och höjden 30 cm.

b) Av ett A-4 papper kan man göra två olika cylindrar. Kommer de att ha samma volym?

Kommentar

I aktivitet 8 kan man lägga på olika villkor, t ex att inhägnaden ska vara rektangulär, att den ska byggas mot ett garage och garagets ena sida kan användas som inhägnad. Ett cirkelområde ger allra störst area. För en beskrivning hur elever hanterar 9b, se Larsson (1992).

*Cylindrar av
A4-papper*

**Studieuppgifter till följande artiklar**

- Enligt artikeln (på s27) av Harriet Axelsson har mammor och pappor omedvetet olika förväntningar på sina flickor och pojkar. Stämmer det med dina erfarenheter? Hur kan man försöka uppmärksamma och förändra detta i kontakterna med eleven och hemmet?
- Klassrumsstudier i matematik visar att pojkar får mer av lärarens tid än flickor. Det sägs att undervisningen läggs upp på pojkarnas villkor och att tysta flickor får litet hjälp. Hur kan vi verka för att flickor och pojkar får lika stort inflytande och utrymme i undervisningen?
- Är matematikaktiviteter och uppgifternas innehåll lika intressanta för flickor som för pojkar? Vilka skillnader finns och vad gör vi åt dem?
- Pierre Jamot beskriver i sin artikel (s 29) hur han använder en teckning, som utgångspunkt för att eleverna ska formulera och lösa problem. Vilka fördelar är det med en bild jämfört med en text? Hur kan man kombinera bild och text?
- Diskutera olika sätt att använda bilder för att t ex ta reda på och utveckla a) barns tal- och rumsuppfattning, b) barns syn på matematik.
- Hur kan barn skapa egna bilder för att stärka begrepp, utveckla språk, reflektera över sitt kunnande och lösa problem?
- Ulla Runesson skriver om elevers olikheter som tillgång i matematikundervisningen (s 33). Diskutera hur elevers olikheter kan bli en tillgång.
- I inledningen tar hon upp att nivågruppering ökar på högstadiet (homogenisering) medan antalet åldersblandade klasser (heterogenisering) ökar år 1-6. Har man olika motiv eller olika syn på elever och undervisning? Vad medför detta för olika val av arbetsätt och metodik?
- Hur ska vi kunna ge elever större medvetenhet om och ansvar för sitt lärande?

- Matematiklektioner i Sverige domineras av enskilt arbete i egen takt.
 - Vad får det för konsekvenser för elever och lärare enligt Ulla Runessons artikel? Stämmer det med dina erfarenheter?
 - Kan matematikämnets mål nås genom enskilt arbete i egen takt? Vilka mål blir problematiska?
- Arnost Rusek beskriver ett lektionssamtal som utgår från läroboksuppgifter (s 38). Från början funderar eleverna inte över uppgifternas verklighetsanknytning eller relevans. Skolans matematik verkar inte ha med verkligheten att göra. Stämmer det med din erfarenhet? Hur kan man ändra på det? Hur får vi eleverna att bli mer engagerade och ta större ansvar?
- Tal om ett annat arbetsätt binds ofta samman med arbete i mindre grupperingar. Måste det alltid vara så? Artikeln ger exempel på reflekterande arbetsätt i helklass. Kan detta användas i din klass och i så fall hur?
- Vad har artikeln med demokrati att göra? Hur ska vi få eleverna att inse matematikens betydelse, när det gäller att granska beslutsfattare och politikers argumentation?

Litteratur

- Ahlberg, A. (1995). Att synliggöra matematikens språkliga och sociala karaktär. *Nämnanaren* 22(4), 3-7.
- Ahlström, R. (1994). Kan vi nå bättre resultat på högstadiet? *Nämnanaren* 21(4), 13-15.
- Alander, S. (1990). Skolgårdsmatematik. *Nämnanaren* 17(2), 24-25.
- Andersson, K. (1988). Läroboken en autolots. *Nämnanaren* 15(1), 42-47.
- Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnanaren* 21(4), 36-43.
- Dunkels, A. (1985a). Ett undersökande arbetsätt. *Nämnanaren* 12(2), 32-33.
- Dunkels, A. (1985b). VDM - Vår Dagliga Manipulation. *Nämnanaren* 12(1), 32-35.
- Dunkels, A. (1992). Lek med tal på allvar. *Nämnanaren* 19(4), 26-27.
- Ekback, B. K. & Wahlgren, J. (1993). CD-skiva i stället för räknebok? *Nämnanaren* 20(2), 35-39.
- Ekström Holm, W. (1990). Samarbete – Självkänsla – Ansvar. *Nämnanaren* 17(2), 18-21.
- Emanuelsson, G. (1995). Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnanaren* 22(2), 2-3.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1989). Vad ska en matematiklärare kunna? *Nämnanaren* 16(1), 2-5.
- Emanuelsson, G. & Emanuelsson, L. (1994). Kvadrater i kvadrat. *Nämnanaren* 21(4), 26-27.
- Garmannslund, K. (1984). Kan ikke jenter regne? *Nämnanaren* 10(4), 32-34.
- Grevholm, B. & Areskoug, M. (1987). Vems matematik? *Nämnanaren* 14(1), 32-37.
- Grevholm, B. (1994). Ett centralt uttalande om flickor och matematik. *Nämnanaren* 21(3), 18-25.
- Gustafsson, L. (1989). Föräldrar – en resurs att räkna med. *Nämnanaren* 16(1), 10-12.
- Hedberg, K. (1989). Tärningen i träningen. *Nämnanaren* 16(2), 30-31.
- Henriksson, M-L. (1990). Temperaturen är hög. *Nämnanaren* 17(2), 26-28.
- Holmström, G. (1986). Laborativa och undersökande arbetsätt. *Nämnanaren* 13(2-3), 67-71.
- Johansson, B. (1991). Två spelare och en miniräknare. *Nämnanaren* 18(3/4), 94-95.
- Johansson, I. (1995). Spel för kunskapande. *Nämnanaren* 22(3), 42-45.
- Kilborn, W. (1986). Att individualisera är inte att organisera. *Nämnanaren* 13(2-3), 55-59.
- Larsson, S. (1992). Man lär så länge man har elever. *Nämnanaren* 19(3), 34-35.

- Lerman, S. (1989). Att göra matematik. *Nämnnaren* 16(2), 6-12.
- Levander, S. (1990). Tar skolan hänsyn till könskillnader? *Nämnnaren* 17(2), 7-10.
- Lindberg, L. (1991). Arbetsätt i Vux. *Nämnnaren* 18(3/4), 142-144.
- Macdonald, M.A. (1991). Have you done your homework? *Nämnnaren* 18(3/4), 71-77.
- Malmer, G. (1988). Ett ändrat arbetsätt - den viktigaste reformen. *Nämnnaren* 15(1), 13-18.
- Malmer, G. (1991). Matematiken – i går, i dag och i morgon. *Nämnnaren* 18(3/4), 63-70.
- McIntosh, A. (1995). Vitalisera huvudräkningen. *Nämnnaren* 22(3), 23-25.
- Nordquist, B. & Wikenfalk, A. (1990). Vad lär lärare av elever? *Nämnnaren* 17(2), 22-24.
- Pehkonen, E. (1993). Problem med kvadrater. *Nämnnaren* 20(3), 28-29.
- Pettersson, A. (1994). Högstadielära syn på matematiken. *Nämnnaren* 21(1), 34-35.
- Reys, B. & Reys, R. (1995). Perspektiv på Number Sense och taluppfattning. *Nämnnaren* 22(1), 28-33.
- Reys, B. m fl (1995a) Svenska elevers taluppfattning. *Nämnnaren* 22(3), 34-40.
- Reys, B. m fl (1995b). Vad är god taluppfattning? *Nämnnaren* 22(2), 23-25, UPPSLAGET, 25-29, Problemavdelningen, 51.
- Reys, B., Reys, R. & Emanuelsson, G. (1995). Meningsfulla tal. *Nämnnaren* 22(4), 8-12.
- Råde, L. (1991). Upptäckter med datorn. *Nämnnaren* 18(3/4), 135-139.
- Sjungargård, U-B. (1990). Barn och gamla räknar tillsammans. *Nämnnaren* 17(2), 3-6..
- Unenge, J. (1986). Form och innehåll. *Nämnnaren*, 13(2-3), 23-24.
- Unenge, J. (1992). Hur länge är en elev lågpresterande? *Nämnnaren* 19(4), 38.
- Unenge, J. & Wyndhamn, J. (1988). Var står vi nu? och Vart vill vi komma? *Nämnnaren* 15(2), 6-16.
- Wallentin, E. & Johansson, R. (1989). Mellanstadiematematik i Vårgårda. *Nämnnaren* 16(4), 36-39.
- Wyndhamn, J. (1987). Matematikundervisningens viktigaste variabel – Läraren. *ResursNämnnaren*, 29 -31.
- Öberg, U. (1992). Uppslaget: Vad kan eleverna lära i matematikverkstan? *Nämnnaren* 19(3), 24-25.
- Ahlberg, A. (1991). Att lösa problem i grupp. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 85-99.
- Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *NOMAD* 1(1), 8-17.
- Dahlgren, L-O, Eriksson, R. & Hellström, L. (1985). *Gruppera mera?* Erfarenheter från försök med olika grupperingar i engelska och matematik på högstadiet. Skolöverstyrelsen R 85:35.
- Ds 1995:5. "Där man inte har något inflytande finns inget personligt ansvar". En översyn av elev- och föräldrarinflytandet i skolan.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommentarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bidrag till Sveriges matematiklärarförenings sommarkurs i Mullsjö 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T. (Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning*. Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
- Kilborn, W. & Danielsson, K. (Red) (1994). *Sexåringen i skolan*. Rapport från biennalarbetsgruppen. Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
- Läroplan för grundskolan, Lgr 80. (1980). Allmän del. Stockholm: Liber förlag.
- Larsson, C. & Hake, K. B. (1985). *Ett försök med fri och rörlig gruppering över kursgränserna i matematik (högstadiet)*. Malmö.
- Löthman, A. (1990). *Perspektiv på matematikundervisningen*. En pilotstudie på Komvux och grundskolans högstadium angående elevers och lärares uppfattningar av undervisningsprocessen. Rapport från Pedagogiska institutionen, Uppsala universitet, 151.
- Löthman, A. (1992). *Om matematikundervisningen – innehåll, innebörd och tillämpning*. Uppsala Studies in Education. Diss No 40.
- Malmer, G. (1988). *Matematik – ett ämne att räkna med*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Malmer, G. (1990). *Kreativ matematik*. Solna: Eke-lunds förlag.
- Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Pettersson, A. (1994). *Hur löser elever uppgifter i matematik?* Skolverkets rapport nr 61. Stockholm: Liber distribution.
- Skolverket (1993a). *Den nationella utvärderingen av grundskolan våren 1992. Matematik åk 5*. Skolverkets rapport nr 15. Stockholm: Liber distribution.
- Skolverket (1993b). *Den nationella utvärderingen av grundskolan våren 1992. Matematik åk 9*. Huvudrapport. Skolverkets rapport nr 15. Stockholm: Liber distribution.
- Skolverket (1993c). *Bilden av skolan*. Fördjupad anslagsframställning 1994/95-1996/97. Stockholm: Författaren.

- Sundell, K. (1993). *Åldersindelad eller åldersblandad?* Lund: Studentlitteratur.
- Sällström, P. (1991). *Tecken att tänka med*. Om symbolisk notation inom musik, dans, kartografi, matematik, fysik, kemi, teknologi, arkitektur, färglära och bildkonst. Malmö: Carlssons Bokförlag.
- Utbildningsdepartementet (1994). *Kursplaner för grundskolan*. Stockholm: Fritzes
- Westin, H. (1995). *Matematiken i nationell utvärdering. Analys av gruppuppgifter genomförda av elevgrupper i åk 9, 1992*. Rapport från PRIM-gruppen, nr 9. Högskolan för lärarutbildning i Stockholm.
- Wyndhamn, J. (1988). *Tankeform och problemmiljö. Skolan som kontext för tänkande i elementär matematik*. SIC 26, 1988. University of Linköping: Studies in Communication.
- Wyndhamn, J. (1991). Problem miljö och miljöproblem. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 51-65.
-
- Bolt, B., & Hobbs, D. (1989). *101 mathematical projects*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bruner, J.S. (1973). The growth of representational processes in childhood. In J.S Bruner. *Beyond the information given*. London: George Allen & Unwin.
- Eriksen, D. B. (1993). *Personlige og sociale sider ved tilegnelse af faglig viden og kunnen i folkeskolens matematikundervisning*. Ph.D-avhandling. København: Danmarks Lærerhøgskole.
- Good, T. L., & Mulryan, C., & McCaslin, M. (1992). Grouping for Instruction in Mathematics: A Call for Programmatic Research on Small-Group Process. I D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Hunting R. P. & Lamon, S. J. (1995). A re-examination of the rôle of instructional materials in mathematics education. *NOMAD* 3(3), 45-64.
- Johnsen Høines, M. (1995). Hva skjer med matematikpedagogiske samhandlinger når tester tas i bruk? *NOMAD* 3(3), 27-44.
- Kirfel, C. (1994). *Eksperimentering med matematikk*. Bergen: Caspar Forlag.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational studies in mathematics*, 12, pp 235-264.
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work. Volume 1 & 2*. Canberra: Australian Academy of Science.
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work. Volume 1 & 2. Teachers guide to 1 & 2*. Canberra: Australian Academy of Science.
- Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet*. Larvik: NKI-forlaget.
- Mellin-Olsen, S. (1989). *Kunnskapsformiddling. Virksomhetsteoretiske perspektiver*. Rådal: Caspar Forlag.
- Mellin-Olsen, S. (1991). *Hvordan tenker lærere om matematikundervisning*. Bergen lærerhøgskole.
- NCTM (1991). *Professional Standards for teaching mathematics*. Reston, Va.: Author.
- NCTM (1994). *Professional Development for Teachers of Mathematics*. Yearbook 1994. Reston, Va.: Author.
- NCTM. *Grade Specific Books K-6*. Reston, Va.: Author. (Var och en av de årskursinriktade böckerna använder ett undersökande arbetsätt för undervisning kring mönster, taluppfattning och operationer, statistik, geometri och rumsuppfattning.)
- NCTM. Math by the Month. *Teaching Children Mathematics*. Reston, Va.: Author. (I varje nummer av denna tidskrift för förskola till år 6 presenteras aktiviteter för var och en av månadens veckor. Lösningar i samma nummer.)
- Nickson, M. (1994). The culture of the mathematics classroom: an unknown quantity? In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematical classroom*. Dordrecht: Kluwer.
- Skemp, R. R. (1982). Communicating mathematics: Surface structures and deep structures. *Visible language*, Vol. 16, No.3.
- Vygotskij, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. I J. V. Wertsch, (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. New York: M.E. Sharpe.

Räknar du med föräldrar?

Harriet Axelsson

Tycker du att din dotter jobbar hårt och att din son är begåvad men lat? Har du tänkt på att dina kommentarer betyder mer för barnen än lärarnas?

Matematik ett pojkämne?

Föräldrar tycker att deras döttrar har större nytta av litteraturläsning än av matematik och att deras söner ska välja svårare kurs i matematik. Detta framgår av en undersökning som utförts vid sociologiska institutionen vid universitet i Michigan, USA.

Tycker föräldrar i Sverige likadant? Hur påverkar vi våra döttrar och söner? I Michigan har man undersökt elever i åldrarna 10–19 år och deras föräldrar. Undersökningarna har utförts i flera etapper med enkäter och intervjuer. Nästan 2 000 föräldrar har tillfrågats vid olika tillfällen. I de undersökta grupperna har det inte funnits några mätbara skillnader mellan flickors och pojkars provresultat i matematik. 80 föräldrar tillfrågades om sina barns matematiska förmåga och ombads kommentera barnens framgångar eller misslyckanden på prov i matematik.

Mammor till pojkar tyckte att deras barn var duktigare i matematik än mammor till flickor.

Mammor till flickor tyckte att deras barns ansträngningar i matematik var större än mammor till pojkar.

Pappor till pojkar ansåg att deras barn inte presterade på toppen av sin förmåga, pappor till flickor tyckte tvärtom.

Denna artikel har tidigare publicerats i *Nämnamn* 15(1), 1988.

Om föräldrar gör olika tolkningar av flickors och pojkars framgångar i matematik så kan de utveckla olika syn på sina döttrars och söners matematiska kompetens trots en likartad information om skolprestationer.

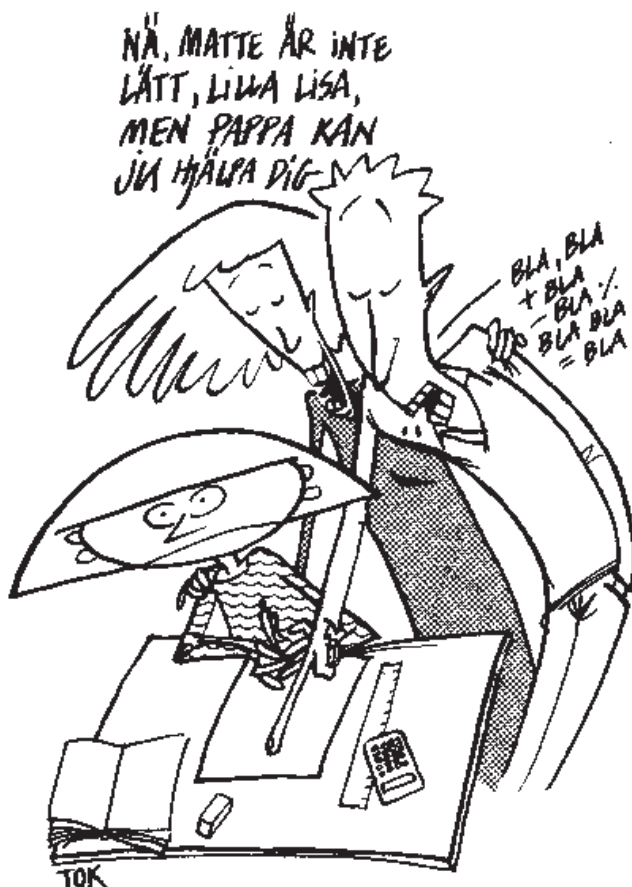
Begåvning och ansträngning

I en annan undersökning ombads föräldrar kommentera någon framgång respektive motgång i matematik som de kunde erinra sig att deras barn haft.

Pojkföräldrar, speciellt mammor, tyckte att begåvning var en troligare orsak till barnens framgång i matematik än flickföräldrar.

Flickföräldrar, speciellt mammor, tyckte att ansträngning var en troligare orsak till barnens framgång i matematik än pojkföräldrar.

Kommentarerna understryker föräldrarnas könsbundna åsikter om barnens förmåga i matematik. Att koppla framgång till begåvning har en positiv effekt på barnets förmåga. Att koppla framgång till ansträngning har en negativ effekt – ansträngning och begåvning är ej utbytbara orsaker. Jämför detta med föräldrarnas åsikter om barnens framgång i matematik och deras värdering av ansträngning respektive begåvning. Detta mönster av relationer kan förklara varför föräldrar anser döttrarna vara sämre



i matematik än sönerna trots det faktum att de har samma provresultat.

Föräldrar betyder mer än lärare

Slutligen undersöktes den samlade effekten av föräldrarnas åsikter om sina barns begåvning i matematik och modersmålet (engelska) under de första skolåren. Flickföräldrar värderade sina barns prestationer i engelska som bättre än i matematik – trots samma betyg i båda ämnena. Dessutom ansåg de att goda kunskaper i engelska var viktigare för barnet än goda kunskaper i matematik.

Pojkföräldrar visade det motsatta mönstret. Föräldrar och lärare tillfrågades på hösten, och barnens åsikter samlades in på våren. Föräldrarnas, speciellt mammornas, åsikter om sina barns prestationer hade en direkt påverkan på barnens åsikter om sina prestationer i matematik och engelska. Dessutom tycktes mammornas åsikter minska lärarnas möjlighet att påverka barnens självförtroende i matematik och deras intresse för matematik.

Föräldrarnas positiva värdering av barnets förmåga i engelska inverkar negativt på barnets åsikt om sin matematiska förmåga.

Flickornas självförtroende när det gäller matematik undermineras av två föräldraattityder:

1. Föräldrar överdriver hur svårt matematik är för flickor.
2. Föräldrar överdriver sina döttrars förmåga i modersmålet.

Av undersökningen framgick att föräldrar tycks styra in sina döttrar och söner på olika utbildning och yrken, områden där föräldrar tror att barnen är bäst begåvade – trots att barnen i undersökningen ju presterade lika bra i matematik och engelska!

Dessa undersökningar presenterades vid den fjärde internationella GASAT-konferensen i USA 1987 och är hämtade ur den ena av de bokvolymerna som distribuerades till konferensen.

GASAT står för Gender and Science and Technology. Svensk kontaktperson är A-M Israelsson, Teknikens Hus i Luleå. Nästa GASAT-konferens äger rum i Indien 1996.

Matematik med hjälp av teckningar

Pierre Jamot

Bilder kan användas som utgångspunkt för aktiviteter. Genom ett undersökande arbetsätt kan man lära sig mycket om elevernas sätt att resonera. Dessutom kan eleverna få en bredare syn på matematik. Här beskrivs hur en teckning med rikt innehåll kan användas i undervisningen.

En idé tar form

Idén till bilder som hjälpmedel i matematikundervisningen fick jag när jag åt blodpudding i vår skolmatsal. Två matematikpedagoger, den ene tidningsutgivare och den andre läroboksförfattare, satt vid min sida. Någon riktig matro fick jag ju inte, förstås.

– *Om du tar tre bitar blodpudding, ger mig den ena, Håkan den andra, och själv äter upp den tredje, hur mycket lingonsylt har du då kvar? Ni förstår säkert att jag snabbt övergick till knäckebröd och mjölk.*

– *Har du någon gång tänkt på att rita en bild och låta barnen räkna med hjälp av den?*

Nej, det hade jag ju inte, fick jag motvilligt erkänna.

– *Kan du inte göra en bild till i morgon och låta dina elever få pröva den? Ring sedan till mig, sa tidningsutgivaren. Prata bara med telefonsvararen om jag inte är hemma.*

Denna artikel har tidigare publicerats i *Nämnan* 15(4), 1988.

– *Jag är också intresserad, sa läroboksförfattaren. Jag är pigg på nya idéer. Vi kan alltid ge ut en bok till. Det blir bra! Gör gärna ett tema på ca tjugo bilder, men du får skriva till mig, för jag har ingen telefonsvarare . . . än.*

Sent på kvällen, efter det att jag hade rättat en hög med glosböcker och förberett morgondagen, sa min fru:

– *Skulle du inte rita något också?*

– *Just det, sa jag, och började skissa på bilden som du ser här bredvid.*

Det jag tänkte på när jag ritade var:

- att många saker skulle hända i bilden
- att den skulle vara användbar i en vanlig klass med både duktiga och mindre duktiga elever
- att man skulle få lista ut vissa fakta själv, t ex hur många fönster det fanns på baksidan av kaféet, eller hur fort glassen smälte.

När jag nästa morgon, glad i hågen, ställde in mig i kön till kopieringsapparaten på skolan, hostade den plötsligt till och stannade. Katastrof! Där, bokstavligt talat, rök första

timmans planering. Jag och de andra lärarna som inte hunnit fram, fick skynda oss att hitta på något nytt. Vi kastade avundsjuka blickar på våra kolleger som travade iväg med varma stencilbuntar och lyckliga leenden.

— *Va, ska vi inte ha matte nu, sa mina elever, när jag började lektionen med good morning boys and girls.*

— *Nej, sa jag. Kopieringsmaskinen gick sönder, men när den blir lagad, ska ni få en överraskning.*

På tiorasten fungerade den välsignade apparaten igen, och jag kunde trycka mina mateteteckningar. När det ringde in undrade förstas eleverna vad överraskningen var för något.

Trögt i starten

Jag delade ut bilden till barnen och frågade om de kunde se någon matte i bilden. De satt bara och stirrade på mig och undrade om jag hade blivit helstollig. Sedan började jag fråga:

- Vad är det som händer?
- Vart ska killen?
- Varför?
- Hur långt är det till kaféet?
- Hur många gånger måste han gå? osv

Då kom eleverna igång. De kom med massor av olika förslag på vad man kunde räkna. De hade en otrolig fantasi och tyckte tydligen att det var väldigt roligt att få hitta på egna problem.

Jag sa så här till klassen:

— *Hitta på egna problem med hjälp av bilden, skriv ner era förslag på löst papper, räkna ut svaret och skriv det på baksidan. Jag tänker nämligen samla in papperen och använda dem som klassens egen räknebok.*

Bra förslag, tyckte någon, och så satte de igång. De jobbade mycket bra i ca 25 minuter. Under tiden gick jag omkring och tittade och löste deras problem.

Problem för alla

Jag sa till en av mina duktiga elever (som gärna smiter undan):

— *Så där lätta problem får du inte hitta på. Du borde göra en något mera komplicerad uppgift, så får vi se om någon kan klara av att lösa den sedan.*

Det kändes verkligen bra att kunna ge samma material till alla i klassen och att alla kunde jobba efter sin förmåga. Den var varken för lätt eller för svår utan passade ganska bra för alla. Elevlösningar på s 32.

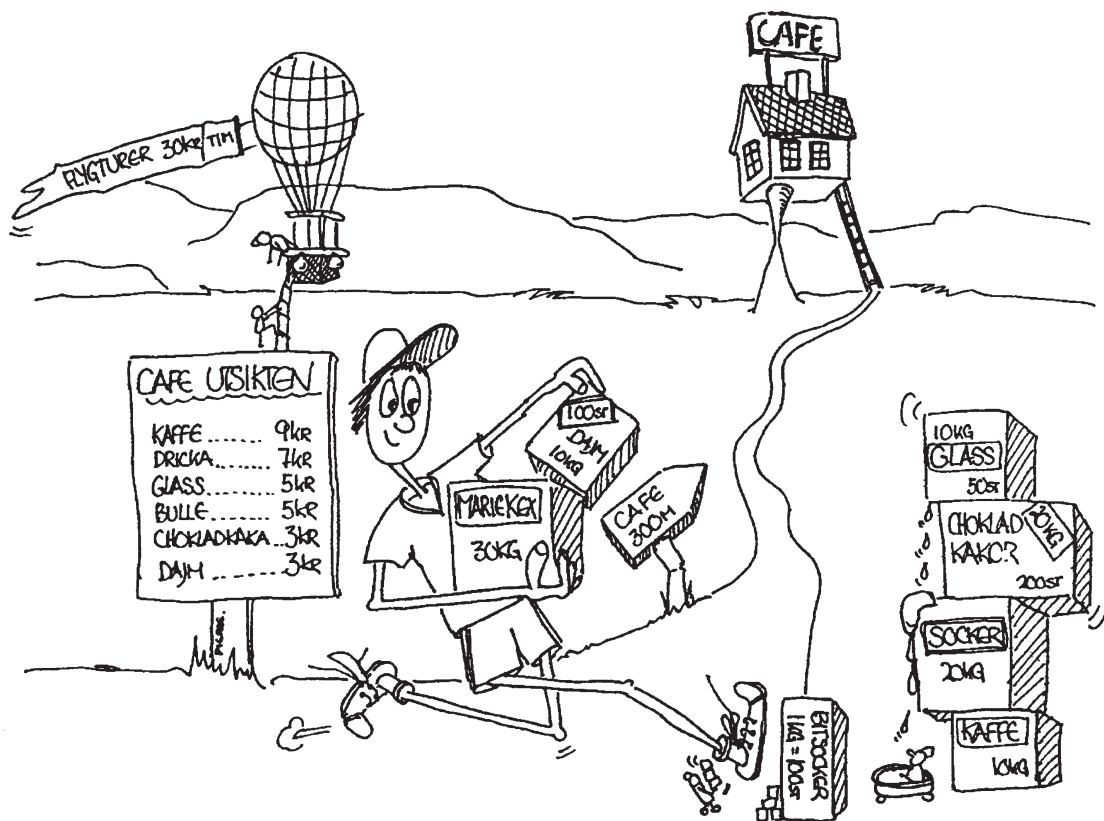
Jag hittade också en elev som hade dålig förståelse för sådana här problem. Han koncentrerade sig bara på att få siffrorna att gå ihop. Han visade mig stolt sitt första problem. Det löd så här:

*Om man har 30 kg Mariekex och tar bort 10 kg Dajm. Hur mycket Mariekex har man sedan kvar?
Svar: 20 kg.*

När jag hade läst den högt för honom och sett lite frågande ut, kom han på att den uppgiften nog inte var så bra. Vi pratade om hur man skulle kunna ta bort Dajm från Mariekex, och jag tror att han började förstå en del av hur saker och ting hänger ihop.

En annan elev kom ”bara” på att alla lådorna vägde 100 kg tillsammans. Men det tog honom 25 minuter att formulera problemet och skriva det, så det var fullt tillräckligt för honom.

En tredje räknade ut att den lilla gubben fick gå 9 mil för att få alla sockerbitarna till kaféet. Gubben orkade bära åtta sockerbitar, men tappade två varje gång. Uträkningen var två A4-sidor lång. Han lovade att försöka kolla den hemma med miniräknare.



Efter 25 minuter bad jag eleverna sluta med problemlätandet och i stället berätta vad de tyckte om det här sättet att jobba. De allra flesta tyckte att det hade varit roligt att arbeta med bilden. 5 – 6 stycken fick läsa upp sina problem, och så löste vi dem tillsammans på tavlan.

Andra ville pröva

Mina kolleger i arbetsenheten ville gärna pröva mattebilden. De fick ungefär samma reaktioner som jag, trögt i början men efter ett inledande samtal med eleverna lossnade

det, och eleverna arbetade bra. Nästa gång jag använde matteteckningen var ca två veckor senare. Eleverna skulle hitta på fler egna problem med hjälp av bilden. Jag behövde inte ha någon genomgång innan, och de flesta arbetade väldigt bra med problemformulerandet. Sedan fick de lösa varandras uppgifter. Även det fungerade bra. Det svåraste var att kunna tyda vad kamraterna hade skrivit.

Pröva gärna själv med en matteteckning i din klass. Det är nog roligast om du eller någon med anknytning till klassen eller skolan har gjort teckningen. Eleverna kommer gärna med många förslag och tips om vad som ska ritas.

6. Kan du säga hur långt han
får gå där?

1-100-100

b. Svar: Han får gå 60.000 meter

$$100 \cdot 600 = 60000 = 6 \text{ m}^2$$

En dag blåser det kornett i bergen. Då tycker Engelbratt som kör luftballongen att det ska bli lite billigare att åka. Han låter det bli 25% billigare. Hur mycket kostar det då?

Svar $30 \cdot 0.25 = 7.50$

$$30 - 7.50 = 22.50 \div$$

Det kostar 27.50:-

Vägen till cafét är lång, en vuxen person
får ta 50 steg från stora vägen.
Ett barn tar bara ett halvt vuxen
steg hur många steg får ett barn ta?

Svar: Ett barn får ta 100 steg till café't från stora vägen.

50+50=100

50
+50
100

Jag vill ha en dricka och en pulle
och en glass. Det kostar 17 kronor.
Jag ser en luft pallong.

Jag vil oka till holländ. Det tar 10

timmar: Det kostar

$\frac{2}{3} + \frac{0}{9} = \frac{2}{3}$

Café utsikten har 2 fönster på
lång sidorna o 1 fönster på gavlarna.
Hur många fönster har
Café utsikten?

Hur många fönster har
Café utsikten?

Svar: Café' utsiktern har 6
fönster.

2 Gunnar för-acordelen efter hur
många låder han bör upp.
På en dag för han 50 styck.
Hur mycket för han i lön om
han bör upp 7 st Marielac och
9 låder dagen och dess en dag då
han slutar tidigt?

Svar: Han får 105kr i lön
den dagen.

$$a. \quad 7.30 - 2.10 \quad \begin{array}{r} 30 \\ 1 \\ 210 \end{array} \quad \frac{210}{2} = 105$$

$$b \quad 9 \cdot 10 = 90 \quad \frac{90}{2} = 45$$

c. $9 \cdot 10 = 90$ $\frac{90}{2} = 45$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 105 \\ 45 \\ + 45 \\ \hline 195 \end{array}$$

Om man har äkt luftballong i 2h 13 min
hur mycket kostar det?

Svar: Det koster 66.50 kr.

$$2 \cdot 30 = 60$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 30 = 60 \\ \text{Varje minut kostar} \\ 50 \text{ öre. } 50 \cdot 13 = 650 \\ \begin{array}{r} 50 \\ \cdot 13 \\ \hline 150 \\ + 50 \\ \hline 650 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ + 6.50 \\ \hline 66.50 \end{array}$$

Olikheter i klassen – tillgång eller problem?

Ulla Runesson

Åldersblandad undervisning har blivit allt vanligare de senaste åren. Vad finns det för möjligheter och begränsningar för elevernas utveckling i matematik? Vilka konsekvenser får undervisning i heterogena grupper när det gäller metodik och arbetssätt? Det är intressanta frågor som belyses utifrån en genomförd studie.

Vi har länge diskuterat hur undervisningen bäst skall utformas så att vi tar tillvara elevernas skiftande förutsättningar, möjligheter och behov. När det gäller vilken grupp sammansättning, heterogen eller homogena, om skulle vara lämpligast för detta syfte, kan man se en intressant utveckling. GEM-projektet visade att antalet homogena undervisningsgrupper ökade då man slopade alternativkurserna i engelska och matematik på högstadiet [1]. På låg- och mellanstadiet har utvecklingen gått mot att öka heterogeniteten, genom att antalet åldersblandade grupper har ökat [2]. Även om skälen för införandet av åldersblandad undervisning varierar, framhåller man ofta att denna organisationsform skapar möjligheter att ta vara på elevers olikheter och utveckla kunskaper och färdigheter på elevernas villkor. Dessa skilda sätt att se på grupp sammansättning kan förefalla paradoxala då motiven är likartade.

Sättet att organisera undervisningen säger emellertid inget om hur undervisningen är. Precis som för andra organisationsformer

kommer undervisningen i åldersblandade klasser att variera beroende på klass och lärare. Att tala generellt om undervisningen i åldersblandade grupper är därför inte möjligt.

Syftet med följande framställning är att problematisera huruvida ett visst sätt att organisera undervisningen också medför vissa konsekvenser vad gäller arbetssätt, arbetsformer och metodik. Jag kommer att söka belysa en specifik aspekt av undervisning, att ”arbeta i egen takt” eller att individualisera matematikundervisningen. Utgångspunkt för diskussionen är en pilotstudie som omfattade två åldersblandade klasser på mellanstadiet [3].

En empirisk studie

Genom intervjuer med lärare, elever och rektor samt genom att följa undervisningen under ett antal lektioner, ville jag få svar på följande frågor: Hur går undervisning i åldersblandade grupper till? Vad innebär individualiserad matematikundervisning i åldersblandad grupp? På vilket sätt kan denna undervisningsform sägas ta till vara varje elevs förutsättningar?

Denna artikel har tidigare publicerats i *Nämnan* 21(2), 1994.

Studien genomfördes vid en skola där man flera år arbetat åldersblandat. Lärarna hade själva sökt sig till denna undervisningsform. De var i huvudsak positiva till åldersblandad undervisning, men kunde också se vissa problem förknippade med denna.

Matematikundervisningen i klasserna

Merparten av tiden arbetar eleverna enskilt, antingen genom att konstruera egna och lösa kamraternas "mattesagor" eller med arbete i läroboken. Det är det senare som dominerar. Såväl lärarnas uppskattning som observationsdata visar att 75-80 % av matematiklektionerna används till arbete i läroboken. Den lärobok som används är av traditionellt slag. Matematikämnets egen struktur utgör utgångspunkten (ett kapitel om multiplikation, ett annat om volym etc). Den är uppbyggd så, att först presenteras en matematisk modell eller ett mönster. Därefter följer ett antal exempel där det är meningen att eleverna skall upprepa detta mönster. Sedan följer olika tillämpningsexempel. Läromedlet domineras av beräkningar. I de fall problemlösning förekommer, är det aritmetisk problemlösning, dvs avsikten är att problemen skall lösas med hjälp av beräkningar. Eleverna arbetar "i egen takt" genom böckerna. Det innebär att olika elever kommer att arbeta med olika avsnitt.

I de undersökta klasserna, var eleverna spridda från att arbeta med den första boken för mellanstadiet till läroboken för åk 8.

Förutom enskilt arbete förekommer också arbete i grupp eller pararbete. Det kan innebära att gruppen tillsammans konstruerar uppgifter, arbetar med mätning av olika slag, löser sk "kluringar" som läraren presenterar, rättar varandras läxor eller att läraren presenterar ett innehåll gemensamt för hela klassen.

En konsekvens av detta sätt att arbeta, blir att en viktig del av lärarens arbete är att planera och följa upp enskilda elevers arbete

en gång per vecka. Eftersom eleverna möter "nytt" innehåll vid olika tidpunkter, kommer hon också att behöva ha genomgångar med enskilda elever.

Lärarna framhåller att detta sätt att arbeta motiveras av att undervisningen måste få bygga på att eleverna har individuella lärogångar i matematik, att de måste få arbeta i egen takt. De framhåller sin roll som arbetsledare och betonar värdet av de individuella genomgångarna. De menar att de i lugn och ro kan gå igenom nytt stoff och ge eleven den hjälp han behöver. Detta framhåller de som den stora skillnaden mot då de undervisade i åldershomogen klass. De vänder sig mot de gemensamma genomgångar de hade; "Om fröken står där framme, så är det hälften som inte begriper. Det är hemskt". Men lärarna uttrycker ändå att det är viktigt att ibland ha gemensamt arbete, och de menar att undervisningen i den åldersblandade gruppen inte får bygga på att äldre elever ska hjälpa yngre.

Arbetssätt och lärande

På vilket sätt visar studien att undervisningen tillvaratar elevers olikhet och på vilket sätt kan den sägas vara individualiserad?

När det gäller elevernas skiftande behov av tid att lära, är detta väl tillgodosett. Detta arbetssätt, som kan karaktäriseras som en långt driven sk hastighetsindividualisering, innebär många fördelar. Snabba elever behöver inte invänta långsammare kamrater, som i stället får den tid de behöver. Det finns också flera nackdelar.

Den första gäller undervisningsinnehållet. Om eleven skall arbeta individuellt och stegvis krävs, att innehållet kan struktureras på något sätt och presenteras skriftligt, tex i svårighetsnivåer i ett tryckt material och där de olika stegen bygger på varandra. När det gäller aritmetik finns en sådan struktur beskriven utgående från de ingående delberäkningarnas komplexitet [4]. Frågan

gäller då om även annat innehåll i skolmatematiken låter sig stuktureras på detta sätt. När det gäller t ex problemlösning, vet vi att svårigheten i ett problem, beror på så mycket annat än uträkningens komplexitet [5]. Inte heller passar allt innehåll att framställa skriftligt t ex i en lärobok. Många av målen för matematikundervisningen, t ex att eleven skall kunna kritiskt granska matematiska modeller, deras förutsättningar och begränsningar osv [6], låter sig kanske inte nås via enskilt arbete i en lärobok.

Vad jag menar är, att man måste ställa sig frågan om ett arbetsätt där eleven huvudsakligen arbetar enskilt med förproducerat, tryckt material kommer att innebära att ett visst innehåll kommer att dominera och därmed att vissa typer av matematiskt kunnade kommer att få större plats än andra.

Vidare bör vi fundera över vad vi menar med ”att gå vidare”. Ofta menar vi kanske att det innebär att eleven skall möta nya talområden, större komplexitet i uträkningar, nya matematiska modeller och räknesätt. Om det är detta vi avser, ja då är det en naturlig konsekvens att inte låta lärobokens årskursbeteckning följa elevens. Men om vi avser något annat, nämligen att det handlar om att utveckla, förändra och förädla sitt tänkande, att pröva begränsningar och möjligheter i matematiska modeller, att kunna se mönster och samband, att kunna generalisera osv, är det inte säkert att en elev har uppnått detta bara för att hon i åk 5 har ”räknat ut” matteboken för åk 7.

Konsekvenser för lärande

Vad menar vi med ”att arbeta i egen takt”. I sämsta fall kan det innebära att alla elever får möta samma innehåll och med samma metoder men vid olika tidpunkter. Den kunskap vi idag har om elevers komplexa kunnande och om hur vi lär, pekar på att det inte är tillräckligt att låta eleverna få olika lång tid för sitt lärande, utan att de också be-

höver få möta innehållet på olika sätt. Här ger individuella genomgångar, som studien visar förekommer, möjligheter till en metodisk differentiering. Om detta sker och på vilket sätt läraren varierar sina undervisningsmetoder till olika elever och innehåll, vore angeläget att studera. Det har inte varit möjligt att göra inom ramen för detta arbete.

Det är inte bara frågan om vad eleven skall kunna som vi bör ta ställning till när vi väljer arbetsätt och arbetsformer. Vi bör också fundera över på vilket sätt eleven lär sig det vi vill att hon skall lära sig. Den typ av hastighetsindividualisering som detta arbetsätt innebär, har tidigare kritiserats. Utifrån erfarenheter av det sk IMU-projektet [7], väcktes frågan om inte de goda syftena att anpassa undervisningen till varje enskild elev motverkades och att arbetssättet i stället blev ett utslagningsinstrument [8]. Projektet visade att matematiklärande knappast är en enskild aktivitet. I debatt och forskning om matematikundervisning har värdet av den sociala interaktionen, av att tala matematik osv, uppmärksamats. Även lärarna i denna studie är uppmärksamma på detta och inslag av gemensamma aktiviteter förekommer i deras undervisning. Här framkommer emellertid några problem i den åldersblandade gruppen p g a att heterogeniteten är så stor. I de undersökta klasserna hade man flera lösningar på detta. När hela klassen har gemensam problemlösning, presenterar läraren problem som hon bedömer är av olika svårighetsgrad. Varje elev får då själv välja det problem som hon anser passar bäst. I detta ligger såväl möjligheter som risker. I bästa fall tar eleven ansvar för sitt lärande och väljer svårighetsgrad i nivå med sitt kunnande, i sämsta fall väljer eleven för lätt eller för svår uppgift. I en annan gemensam aktivitet som förekommer i de undersökta klasserna, då eleverna konstruerar och löser varandras problem, uppmanas de att göra sådana problem som alla kan klara av. Detta resulterar ofta i att problemen blir för lätta för några.

Vid en analys av sådana elevproducerade uppgifter, bedömde lärarna att dessa passade bäst för elever i årskurs 4 och 5.

Outnyttjade möjligheter

Ändå är det i situationer då eleverna arbetar i heterogena grupper som jag ser den stora utvecklingspotentialen i den åldersblandade undervisningen och där studien pekar på att man inte i så särskilt stor utsträckning tagit vara på den möjlighet som en heterogen grupp innebär. Men för att göra det ställs vissa krav på undervisningsinnehållet.

Om man ser kunskap som en relation mellan eleven och det som skall läras [9] och lärande som en förändring av denna relation, kommer undervisning bl a att handla om att skapa situationer där elevens eget tänkande får stort utrymme. Detta kräver av innehållet att det är sådant att det inbjuder till att eleverna kan möta det på olika sätt, exempelvis genom problemlösning som öppnar för olika lösningsmodeller (formaliserade så väl som informella) eller olika representationssätt (abstrakta såväl som konkreta) [10]. Genom att eleven får använda sig av sitt eget sätt att tänka och att detta görs till föremål för reflektion, kan eleven också bli medveten som sitt tänkande. Hon kan se att det finns andra, mer ändamålsenliga sätt att tänka hos kamraterna och få möjlighet att utveckla, förädla och förfina sitt eget tänkande.

Ser man på elevers olikhet på detta sätt, vidgas individualiseringsproblematiken till en mer generell princip för undervisning, som innebär att man kan se elevers olikhet som en tillgång i stället för ett hinder i undervisningen. Olikheten i gruppen kan användas som ett redskap för att utveckla elevers tänkande. Här bjuder just den åldersblandade gruppen stora möjligheter! Man gör olikheten till ett innehåll i undervisningen. Den blir en tillgång som kan användas, inte ett problem som måste organiseras bort.

Åldersblandad undervisning skulle kunna utvecklas om man i högre grad arbetade med innehåll som öppnar för olika angreppssätt, om man använde arbetssätt och arbetsformer som ger eleverna möjlighet att reflektera över sitt tänkande och där olika sätt att uppfatta matematik görs till ett innehåll i undervisningen.

Om eleven skall utveckla sin matematiska kompetens, krävs en avvägning mellan å ena sidan innehåll och å andra sidan arbetsätt och arbetsformer. Om undervisningen organiseras så att en viss arbetsform och ett visst arbetssätt tillåts att dominera, menar jag att det är stor risk att ett visst innehåll också kommer att dominera. Frågorna om vad eleven ska lära sig och hur hon ska lära sig detta, hänger intimt ihop.

Vi har en lång tradition inom matematikundervisningen där uppgiftslösande, gärna sett ur en kvantitativ aspekt, setts som vägen till matematisk kunskap [11]. Men med de krav på matematiskt kunnande som den nya kursplanen ställer, är enskilt arbete med en mängd likadana uppgifter, troligen inte det bästa sättet att nå dessa mål. Med den ökade frihet att skapa grupperingar (nivågrupper, åldersblandade, åldershomogena osv) som den nya läroplanen ger, krävs att vi kritiskt granskar vår undervisning. Risken är stor att vi med andra grupperingar väljer samma innehåll behandlat med samma metoder som tidigare, men i en ny organisationsform.

Läraren som arbetsledare

Slutligen vill jag peka på vilka konsekvenser en viss organisationsform kan få när det gäller lärarrollen. Lärarna betonar sin roll som arbetsledare. Denna studie tyder på att läraren får en kontrollerande och administrerande roll i klassrummet. Observationsdata visar att 25 % av all interaktion mellan lärare och elev är av kontrollerande slag. Troligen

är behovet av bokföring, uppföljning och kontroll stort i det arbetsätt som förekommer. Även de individuella genomgångar, som lärarna själva framhåller som det mest positiva, kan sägas ha en kontrollerande karaktär. När läraren sitter med en elev i taget, innebär det att hon kan kontrollera hur eleven uppfattar hennes undervisning, hon "vet exakt vad var och en kan". Detta kan man inte få veta, menar lärarna, när man har genomgång med 25 elever på en gång.

I dessa situationer finns självklart stora möjligheter. Den kunskap om elevernas tänkande som en sådan situation kan ge läraren, skulle t ex kunna användas för en metodisk differentiering. Frågan är bara vad det är som läraren tycker sig ha kunskap om. Är det hur långt eleven har hunnit i boken eller att eleven ger rätt svar på lärarens frågor? Detta är något annat än lärarens kunskap om på vilket sätt eleven uppfattar innehållet och går till väga då hon löser en uppgift. Att föra samtal med eleven är inte tillräckligt i sig. Frågan är med vilket syfte samtalet sker.

Är problemen generella?

Självklart är det så, att de problem som här belysts i samband med den åldersblandade undervisningen också kan gälla andra organisationsformer. De utvecklingsmöjligheter som antytts kan därför gälla all undervisning. Att elevers olikheter uppmärksammas i samband med åldersblandad undervisning är naturligt. Den blir "fysiskt påtaglig". Därför kan det ligga en fara i att man vid homogen, sk nivågrupperad undervisning faktiskt glömmar eller bortser från att eleverna även i en sådan grupp är mycket heterogena. Att

eleverna har olika erfarenhet medför att de också kommer att förstå sin omvärld på olika sätt. I konsekvenserna av detta ligger, som jag ser det, den största utmaningen – och fascinationen – med läraryrket.

Referenser

- [1] Dahlgren, L-O, Eriksson, R. & Hellström, L. (1985). *Gruppera mera? Erfarenheter från försök med olika grupperingar i engelska och matematik på högstadiet*. Skolöverstyrelsen R 85:35.
- [2] Andrae Thelin, A. (1991). *Undervisning i åldersblandade grupper*. Skolöverstyrelsen R 91:32.
- [3] Runesson, U. (1994). Matematik i åldersblandad klass. I Emanuelsson, Johansson, Rosén & Ryding. *Dokumentation av 8:e Matematikbiennalen i Göteborg 26–28 januari 1994*. Mölndal: Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.
- [4] Kilborn, W. (1979): *PUMP-projektet – bakgrund och erfarenheter*. Skolöverstyrelsens Utbildningsforskning FoU-rapport 37. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- [5] Setex Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited. On school mathematics as situated practice*. Linköping Studies in Arts and Science No. 98.
- [6] Utbildningsdepartementet, (1994). *Kursplaner för grundskolan*.
- [7] Larsson, I. (1973). Effektundersökningens huvudresultat, i Larsson, I. (red.) *Individualiserad matematikundervisning: en bok om IMU-projektet*. s. 162-175. Malmö: Hermods.
- [8] Matematik i skolan. Ett servicematerial. (1986). *Nämnamn* 13(2–3). Stockholm: Utbildningsförlaget.
- [9] SOU (1992:94). *Skola för bildning*. Betänkande av läroplanskommittén. Stockholm: Allmänna förlaget.
- [10] Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- [11] Mellin Olsen, S. (1991). *Hvordan tenker lærere om matematikundervisning?* Bergen lærerhøgskole.

Matematik och demokrati – när mötas de två?

Arnost Rusek

Artikeln handlar om undersökande och intresseväckande lektionssamtal vars syfte är att ge eleverna exempel på matematikens betydelse i vardag och samhälle samt behoven av prognosinstrument.

Blåval

I Räkna med Vux, Grundbok, Etapp 1, från 1991 återfinns följande uppgift:

En blåval som fångades 1947 vägde ca 150 ton varav endast tungan vägde 4,3 ton. Hur många procent av vikten utgjorde tungan?

I klass efter klass fick jag alltid svaret $4,3/150 = 2,86\%$. I klass efter klass har jag förklarat, att det inte går att väga en blåval ute till sjöss. Att det inte går att skära ut en valtunga perfekt, eller att ens väga den. Att eleverna lika gärna kunde räkna med $4/150$, vilket vore lättare. Eller varför inte $5/150$ eller $4/160$, vilket vore ännu lättare. Att det är ingen som vet om valen vägde 140 ton, eller 167 ton. Att jag inte bara skulle höftat till svaret, men även till siffrorna i uppgiften. Svaret i facit (3 %) förbryllade många av mina elever. Facit avrundade nästan lika friskt som jag! Förbluffande nog reagerade ingen över mitt val av uppgift! Ingen anmärkte om det etiskt riktiga över att överhuvudtaget ha en sådan här uppgift i en matematikbok.

Denna erfarenhet av elevernas rädsla att handskas vårdslöst med siffror har lett till att jag så småningom har tagit fram ett antal lektioner i konsten att väga handskas med

siffror på ett ledigare sätt. En introduktion till gissningens ädla konst i Monte Carlos tecken kan gå till så här.

Resan Eslöv – Lund

- Hur kan man göra, om man vill ta reda på avståndet härifrån till Lund?
- Man kan ta det på trippmätaren. På tavlan skrev jag:

Mäta

- Man kan titta på en karta.
- Och när man har tittat på kartan – blir man klokare?
- Ja-a, för då ser man hur långt det är.
- Man får väl ändå mäta avståndet på kartan. Sen får man titta på skalan och räkna om det till mil?
- Nej, jag menar att om man är bekant med kartan, så syns det faktiskt hur långt det är. På tavlan skrev jag:

Titta på kartan

- Och om man inte känner till kartan?
- Ja, då får du räkna om det. På tavlan skrev jag:

Artikeln har tidigare varit publicerad i *Nämnan* 21(2), 1994.

Räkna

- Du kan ringa till Fröken Ur. (Vilket väckte en viss munterhet.)
- På tavlan skrev jag:

Fråga

- Finns det flera sätt?
- Man kan ju stega...
- Visst kan man gå. Förr i tiden gick man till Lund för att jobba. På morgonen gick man dit, på kvällen gick man tillbaka. Hur lång tid tog det? Hur långt är det till Lund?
- Det kan vara två mil.
- Två och en halv, faktiskt.
- På tavlan skrev jag:

Gissa

Under det skrev jag 2 mil och under det 2,5 mil.

- Du, jag gissade inte, faktiskt.
- Två och en halv mil. Menar du att det är på pricken två och en halv mil?
- Nä, inte precis...
- Du har höftat till det, något?
- Ja-a.
- Ok. Jag kunde lika gärna ha skrivit uppskatta som gissa. Skall jag ändra på det?
- Ja, det tycker jag.
- På tavlan skrev jag:

Uppskatta

framför Gissa

- Ja, då så. Vi behöver flera gissningar. Jag vill att alla gissar.
- Så småningom, med hjälp av lite övertalning, fick jag hela klassens medverkan. De flesta låg i närheten av två mil. Någon gissade på 5 mil, en annan på 5,3 mil och en gissade på 7,5 km.
- Ja. Det sättet att räkna som jag tänkte presentera idag kallas Monte Carlo och ...
- Varför just Monte Carlo?
- OK, vad gör man i Monte Carlo?
- Förlorar pengar?

– När man spelar roulette eller tjuget. Då vet man inte på förhand, vilket nummer, eller vilket kort det blir. Man får gissa. Vissa saker går helt enkelt inte att komma underfund med på annat sätt. Och då gissar man.

- Vad har det med matte att göra?
- Som sagt, det som går att beräkna på vanligt vis, det beräknar man. Sen finns det saker som inte går att beräkna och man vill ändå ha ett svar.

– Och då gissar man?

– Ja.

– Bara så där? Gissar?

– Du, det är inte bara så där. När vi nu gissade på avståndet till Lund, så är det faktiskt rätt kvalificerad gissning vi har fått fram. Allesammans är vi boende här omkring. Hur tror du att kineser eller eldsländare skulle ha gissat på sträckan Eslöv-Lund? Skulle de ha haft en chans?

– Nej, men...

– OK, då. De här gissningarna på tavlan, vi fortsätter med dem. Om jag nu vill veta hur långt det är till Lund så stryker jag de sträckor, som avviker mycket. På tavlan strök jag, 5 mil, 5,3 mil och 7,5 km.

– Varför gör du det?

– Tja, jag tar bort det som avviker alltför mycket från det andra. Det är det hela.

– Men du vet att det är fel?

– Ja, det vet jag. Men även om jag inte visste, så skulle jag stryka dom. Just för att dom avviker så våldsamt från de andra. På resten beräknar vi ett medelvärde. Hur mycket blir det?

– Det vet jag inte.

– Jag vill att ni räknar fram det.

– 22,3 kilometer.

– Då så. Nu har vi med Monte Carlometoden beräknat avståndet mellan Eslöv och Lund. Är det det exakta avståndet?

– Det kan det väl ändå inte vara?

– Nej, det kan det inte. Vi har rätt så stort fel i beräkningen. Hur stort är det?

– ?

– Jo, det går att komma åt det. Man tar skillnaden mellan den största och den minsta rimliga gissningen och någonstans där emellan kan man vara rätt så säker att det rätta avståndet ligger. Hur mycket är skillnaden?

– 13 km.

– Hälften blir ungefär 7 km. Tja, vi kan säga att till Lund är det 22 ± 7 km. Tja, omkring två, tre mil ungefär. Poängen när man gissar så här är, att man skall ha fler som gissar. Ju fler, desto bättre. Sen gäller det, att man får kvalificerade gissningar. Det gäller att få tag i folk som vet något om det man skall gissa. Och för det tredje så gäller det att de som gissar är engagerade. Att de har något att vinna på att gissa rätt – och något att förlora om de gissar fel. Om du satsade en tia, skulle du hugga till med 5 mil då?

– Nej, det skulle jag inte.

– Sen var det en sak till. Det är billigt att gissa. Jag menar, att köra till Lund, det kostar både tid och pengar. Att få tag i en karta tar också sitt. Om man är ute efter en uppskattning, ett närmevärde, så är Monte Carlo nog det bästa, billigaste och snabbaste sättet.

– Är det?

– Hur långt är det till Stockholm?

– 60 mil.

– Om vi nu gissar allihop igen, så skulle det ta sina fem till tio minuter. Vi skulle få ett tal i närheten av 60 mil i stort sett gratis. Dessutom är vi inte intresserade av att veta något annat. Vem skulle vilja veta om det är 611 km 234 m och 56,5 cm?

– Ingen?

– Det där med 60 mil är just det svar vi är ute efter. Det är väl ändå så?

– Ja.

Några principer

– Varför tror ni att man skall ha många som gissar? Det måste finnas folk som är experter

på saker och ting? Som kan sina saker bättre än andra?

– Jag vet inte.

– Det hela började hos astronomerna. Om en astronom med anseende, förr i världen, skrev i en bok att han såg en dubbelstjärna där eller där, så gällde det även om ingen annan kunde se ett dyft. Någon gång på artonhundratalet, tror jag, blev det ändring. Sedan dess krävs det att fler människor kan bekräfta en observation, innan man accepterar den. Nu för tiden är det så att man skall ha fler som bekräftar en sak innan man tror på den. Ett experiment skall kunna upprepas av andra, annars gäller det inte.

Sen har ni hela Östeuropa. Där styrde man med hjälp av experter. Min syster, som bor i Tjeckoslovakien, blev smått chockad när hon fick reda på att vi har haft folkomröstning om kärnkraften. Hon tyckte att det var hemskt, att två städerskors röster var mera värda än en experts som har studerat kärnkraften länge. Tack och lov sköttes Tjeckoslovakien bättre. Tyckte min syrra, alltså.

– Tycker du det också?

– Jag tycker att desto fler kockar, desto bättre soppa, men, kockarna skall veta att de måste äta av soppan också. Är det klart?

– Ja.

– Du, det heter inte Tjeckoslovakien längre.

– Nej, det gör det inte.

– Säg, har man någon nytta av det? Jag menar, det är väl ändå bara trams, det här?

– Ja du, har du varit på semester någon gång?

– Ja?

– Har du haft pengar med dig? Så att det räckte?

– Ja?

– Hur bar du dig åt? Jag menar, hur gjorde du för att få tillräckligt med dig? Inte satt du och räknade i förväg varena bärs eller pizza du tänkte sätta i dig?

– Nä för katten.

– Hur gjorde du?

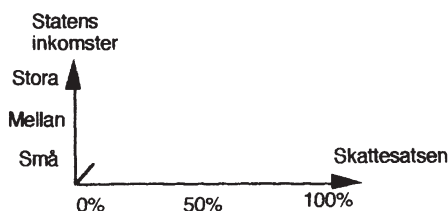
- Jag höftade till det och så tog jag lite till.
- Men du räknade alltså inte i förväg, redan här i Eslöv?
- Nej, nej.
- Jaha. Finns det fler exempel där man inte räknar med exakta siffror? Där man måste gissa? Eller där man vill gissa?
- I lumpen?
- Kan du säga något om det?
- Jo, jag menar att militären kan inte heller veta vad fienden har för sig, och då måste de väl gissa?

En ny start för Sverige

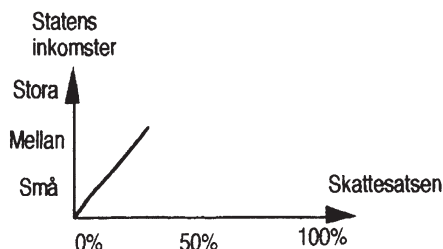
- Jag skulle vilja avsluta med ett exempel där vi alla gissar tillsammans, ett slags Monte Carlo i stort. Hur mycket skulle statskassan få in, om man avskaffade alla skatter i Sverige?
- Ingenting.
- Om man höjde skattesatsen till tio procent, hur mycket skulle man få in då?
- Lite mera.
- Skatteintäkterna skulle stiga, alltså?
- Ja.

På tavlan ritade jag ett koordinatsystem med *Skattesatsen* på *x*-axeln och *Statens inkomster* på *y*-axeln. Sedan ritade jag en punkt för ingenting och ett litet streck för lite mera.

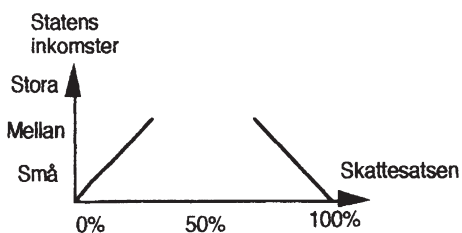
- Hur mycket skulle man få in, om man höjde skattesatsen till 20 procent?
- Lite till.
- Till 30 %?
- Ja, då går det ännu mera upp.



På tavlan ritade jag *lite till* och sedan förlängde jag strecket *ännu mera upp*.



- Nu räknar vi från det andra hållet. Hur mycket får staten in om skattesatsen är hundra procent?
- Allt.
- Allt?
- Ingenting.
- Ingenting?
- Det skulle inte gå att jobba.
- Varför det?
- Har man inget för det, så får det vara.
- Vad skulle du göra i stället, då?
- Plocka kottar.

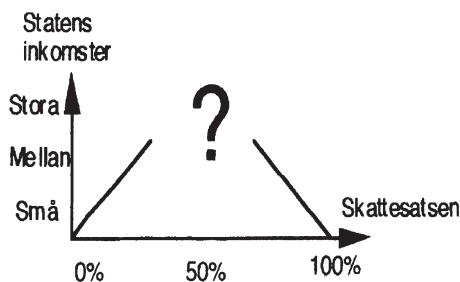


Vi kom överens om att Astrid Lindgren till trots skulle bara någon enstaka galning fortsätta arbeta vid en skattesats på 100 %. En skulle plocka kottar, några skulle fiska, andra skulle emigrera till Amerika. Sedan sänkte vi skatten i etapper till 70 %. På tavlan ritade jag *driva in lite*, *driva in lite mera*, *driva in ännu mera*.

– Vid de här skattesatserna i början och i slutet, är det faktiskt rätt så enkelt att med kända formler beräkna statens inkomster. Men hur gör man nu här i mitten?

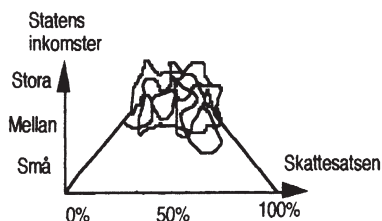
– Monte Carlo?

– Ja, det är det lektionen går ut på. Frågan är hur? Vilken linje, vilket samband gäller här i mitten? Befinner vi oss här / ? Eller här \ ? Eller rent av här –?



– ?

– Facit har jag hämtat från USA. Där har man noterat sambandet mellan skattesatsen och skatteinkomsten under de senaste hundra åren. Det ser ut så här.



– I mitten är det kaos. Ingen har hittills lyckats hitta något annat samband än kaos. Ingen vet om USA just nu befinner sig på en stigande, en fallande, eller en plan kurva. Ännu mindre vet man ut så här

år. Här i Sverige har vi också ett facit. För några år sedan hade vi val i landet. Då sänktes skatterna och det pratades om en ny start för Sverige och om dynamiska effekter – fler skulle arbeta – som skulle fylla statens skattkista.

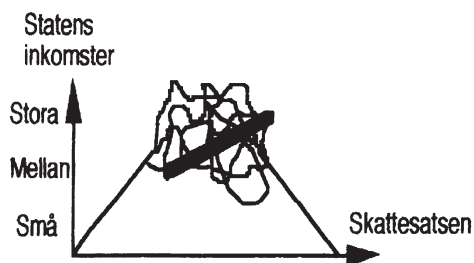
– Du, det blev en jävla dynamik där jag jobbade. De sparkade nästan allihopa.

– OK. Blev skattkistan full?

– Nej, men det är krisen.

– Och sossarna.

– Fler skyldiga? Lyssna, jag är inte ute efter någons skinn. Men här gick faktiskt människor till ett val som till stora delar rörde sig just om skatter. Ingen av oss har en kristallkula. Alltså fick vi gissa. Skulle landet tjäna eller förlora på sänkta skatter? Alla hade vi något att vinna eller något att förlora på en bra eller på en felaktig gissning. Nu gissade vi fel. Det gick som det gick. Med sänkta skatter minskade statens inkomster. Grafiskt kan det visas så här.



– Jag menar, inte alltid kan man räkna rätt, inte ens med Monte Carlo. Men i nästa val, ja, då får vi rösta rätt.

– Vad menar du med det?

– Tja, inte är det meningen att staten skall låna 300 miljarder varje år, inte.

Kostnader och behov

– Men från det ena till det andra. Det är alltså rumsrent att gissa, i alla sammanhang. Militären använder sig av det, demokratierna bygger på det, vi höftar alla till saker och ting då och då utan att tänka på det. I matematiken har det dessutom fått ett namn, Monte Carlo, och räknas som en särdeles flott beräkningsmetod. Det är snabbt, billigt, och ger i regel rätt så hyfsade resultat.

– Det är väl inte billigt med val heller?

– OK, det är oftast billigt men inte alltid. När man nu tar fram något, antingen genom att mäta eller genom att räkna eller genom att uppskatta, att gissa, så gör man det inte för att man tycker det är skoj. Man gör det för att man behöver resultatet. Sedan är frågan, hur mycket och hur exakt det behöver vara och hur mycket man är beredd att betala för mätningen, beräkningen, gissningen. Jag tror att varje metod har sin tid och sin plats. Man skall helst inte göra för lite, men inte för mycket heller.

Avslutande reflektioner

Jag tror inte att jag lyckades rubba de många elevernas orubbliga övertygelse om att talen inte får hyfsas till. Det här ju inte en matlagningskurs, där du kan salta först och sedan ta lite till efter smak, vi skall ju räkna här! Men kanske någon blev påverkad. Kanske några tänker innan de räknar. Ibland nöjer de sig kanske med att tänka, dvs med att ersätta en beräkning med ett överslag eller en uppskattning. Ibland to m med ren och skär gissning. Vilket inte vore dumt, gissar jag.

Under ht-93, under min praktiktid vid Bergskolan i Eslöv, blev jag i skolans korridor stoppad av en elev. När jag inte genast kände igen honom, påminde han mig! Det var väl du som ”vikkade” i Hörby och pratade om Monte Carlo? Det var drygt ett och ett halvt år sedan som jag under en månads tid vikarierade på Frostaskolans högstadium i Hörby. Den gången kom vi aldrig till demokratiproblematiken. Vi gissade på avstånd mellan Hörby och Malmö och på svar till uppgifterna i skolboken. Eleven gick nu första året på NV-programmet och det går bra för honom.

2

Samtal och resonemang

Vad innebär det att ”tala matematik”? Kapitlet vill belysa varför och hur man via samtal och resonemang kan lyfta fram och utveckla elevernas matematiska tänkande.

Karl-Henrik Eriksson behandlar i sin artikel språkets roll för begreppsbildningen. Bengt Bratt och Jan Wyndhamn utvecklar resonemanget om språkets roll för tänkandet och Inger Wistedt tar upp lärarens betydelse i de matematiska samtalen.

Skolan ska i sin undervisning i matematik sträva efter att eleven

förstår och kan använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt argumentera för sitt tänkande ...

Undervisningen i matematik skall ge eleverna möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på problem

Kursplan i matematik

Att arbeta språkligt med matematiken har flera funktioner. En viktig uppgift för alla lärare är att stärka elevernas språkutveckling. Ett väl utvecklat språk är av största betydelse för människans hela situation. Genom att samtala och skriva om matematik stödjer vi alltså denna språkutveckling.

Den språkliga hanteringen hjälper också eleverna att utveckla sitt matematiska tänkande. När eleverna berättar hur de gör och tänker, blir tankarna synliga för dem och för läraren. Genom samtalet kan man locka fram de uppfattningar som eleverna har vilket hjälper läraren i undervisningen. Elevernas tankar blir undervisningsinnehåll. Missuppfattningar kan komma fram och eleverna kan genom att förklara hur de tänker ges möjlighet att själva ändra sitt tänkande. Många gånger hör eleverna själva att det de säger inte är korrekt, det kan vara oklart eller i sammanhanget felaktigt. Genom att resonera om en lösning kan de utvecklas mot att på egen hand bedöma slutsatser och lösningar, och inte alltid lita till facit. När vi ”pratar matematik” stödjer alltså språket och matematiken varandra.

Man kan också ”skriva matematik”. Eleverna kan föra dagbok/ loggbok, där de berättar om hur de tänker kring olika begrepp som behandlats. Då engageras alla elever och läraren kan se hur var och en tänker. Eleverna kan också göra skriftliga redovisningar av olika problem, där de berättar hur de tänkt och löst problemet. Att prata och skriva är två sätt som kompletterar varandra.

För yngre barn är teckning en naturlig utgångspunkt för att samtala om tänkandet. De kan rita olika situationer och berätta vad som händer och hur de tänker. Utifrån bilden kan läraren ställa frågor som hjälper eleven att fokusera på det som är viktigt. Även när det gäller äldre elever kan teckning vara ett bra medel för att förstå elevens tankar.

Läraren har en mycket viktig uppgift när det gäller att leda de matematiska samtalen. Det är viktigt att alla elever engageras och för att alla elever ska kunna komma till tals behövs ett respektande klimat i klassen. Även om vissa elever visar stort motstånd mot att prata måste de stödjas och uppmuntras så att de vågar delta i diskussionerna.

En viktig aspekt av att samtala är att kunna lyssna. Att kunna lyssna aktivt och dra nytta av vad kamraterna säger är en förmåga som måste tränas. Här får läraren hjälpa till så att elevernas goda idéer verkligen kommer till användning.

Med god kännedom om det matematiska innehållet och elevernas förutsättningar samt hur detta ska kombineras kan läraren leda samtalet åt rätt håll. Genom att ställa frågor, be eleverna om förtydliganden och förklaringar, uppmuntra eleverna att göra antaganden och gissningar kan man skapa förutsättningar för utvecklande samtal. Även mindre fruktbara tankar och missuppfattningar behöver tas upp till diskussion. Därför är det nödvändigt att lära eleverna ett annat samtalsmönster än det traditionella fråga-svar. Man kan t ex bolla frågor och svar vidare till andra elever i klassen och låta dem besvara och kommentera. För att få eleverna att våga uttrycka tveksamheter och missuppfattningar måste de uppleva att det har ett värde att diskutera även sådana. Det är alltså inte missuppfattningen i sig som är ”bra”, utan att klassen får möjlighet att fundera på varför det inte är rätt. Detta kan vara en svår balansgång. Om man slentrianmässigt svarar ”Bra Kalle, men det är tyvärr fel” och sedan låter någon annan ta över, har det inget värde och sådant genomskådar eleverna snabbt.

När läraren är väl insatt i det matematiska innehållet ökar möjligheterna att upptäcka de resonemang som är matematiskt värdefulla. Att se dessa tankar och hjälpa till att lyfta fram dem i diskussionerna är en viktig läraruppgift.

Frågor för att få igång diskussion

För att hjälpa eleverna att uttrycka sitt tänkande

Försök att förklara varför du tror så?

Hur kom du fram till den slutsatsen? Hur kan man veta det?

Övertyga resten av oss om att det stämmer?

Har någon annan samma svar men ett annat sätt att förklara?

Vilka likheter och olikheter är det mellan era sätt att lösa problemet?

För att hjälpa eleverna att lära sig resonera matematiskt

Stämmer det alltid?

Är det sant i alla sammanhang?

Hur skulle du kunna visa det?

Vad vet du? Vad gör du för antaganden?

Försök att göra en modell för att visa det?

För att hjälpa eleverna att lära sig göra antaganden, formulera och lösa problem

Hur tänkte du om problemet?

Saknas det uppgifter för att lösa? Är det någon uppgift som är överflödig?

Du kan väl göra ett antagande? En gissning?

Går det att formulera uppgiften på ett annat sätt?

Se efter om du kan finna ett mönster?

Vad skulle hända om? om inte?

Vad ska du ändra på i problemet för att få en annan lösning?

För att hjälpa eleverna att söka samband och tillämpningar

Vad har det här för samband med...?

Vad har vi lärt oss tidigare som vi kan ha användning av i det här problemet?

Har vi någon gång tidigare löst ett liknande problem?

För yngre barn får man ibland anpassa frågorna så att de blir mer precisa

Vad händer om ni är fyra barn i stället för fem?

Hur ritade du för att visa?

Hur har Lena visat hur långa de är? Hur har Stefan gjort?

Ryktet

Idén till övningen på nästa sida är från Addenda Series, Patterns and Functions (NCTM, 1993). Aktiviteten handlar om mönster. Förutom att utveckla samarbete, resonemang och argumentering ska den stimulera eleverna att göra gissningar och antaganden, undersöka hur de stämmer, konstruera en användbar tabell och dra slutsatser med hjälp av den. Ändra gärna i texten så att det handlar om er egen skola, och justera elevantalet så att det blir lämpligt. För yngre elever kan det vara lagom att börja med att låta ryktet sprida sig i klassen.

Se till att alla förstår vad problemet handlar om. Det kan vara bra att rent konkret demonstrera hur ryktet sprider sig, genom att dramatisera.

Uppmana eleverna att gissa! Be dem förklara varför de gissar som de gör.

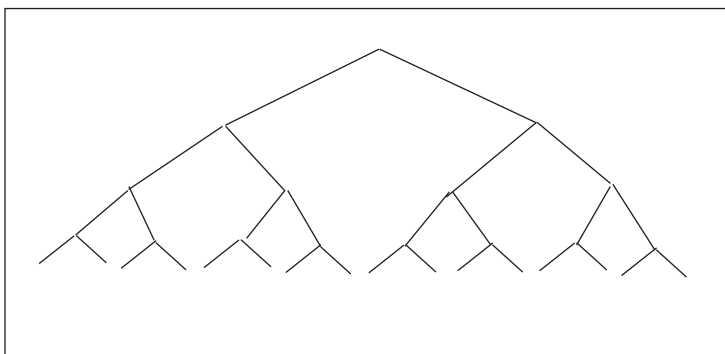
Låt eleverna i grupper undersöka problemet. Några kanske behöver lite hjälp för att komma igång. Man kan säga till dem att konstruera en tabell. Uppmuntra grupperna att verkligen göra klart för sig vad de gör, vad de olika talen betecknar.

Diskutera gruppernas lösningar.

Om någon grupp har gjort en bra tabell kan man göra en sådan gemensamt, så att alla elever får samma tabell att resonera kring. Finns det olika förslag på tabell är det ett bra tillfälle att jämföra och diskutera vilken som är bäst i det här sammanhanget.

Någon grupp har kanske gjort ett träd-diagram, eller något som skulle kunna bli ett träd-diagram. Ta då upp det till gemensam behandling. Om ingen grupp har använt sig av det kan du själv visa hur problemet kan illustreras med ett sådant.

Låt eleverna diskutera kring diagramtypens fördelar och begränsningar.



Ställ frågor för att göra eleverna förtrogna med tabelltypen, exempelvis:

Hur många nya elever får höra ryktet dag 3?
Hur många sammanlagt vet om det den dagen?

Vilken dag vet halva skolan om det?
Vilken dag kommer 100 elever att ha hört nyheten?

Fullborda tabellen. Vad ska stå på frågetecknens plats?

Gå sedan vidare och be eleverna att jämföra kolumnerna.

Vad händer? Vad händer i den andra kolumnen? Varför?

Jämför andra och tredje kolumnen?

Vad finner ni?

Be dem att fundera över andra händelser som kan illustreras med träd-diagram.

Låt eleverna se att problemet illustrerar samma princip som gäller för kedjebrev.

Gör gemensamt en tabell och/eller ett träd-diagram för ett kedjebrev, med förutsättningen att man skickar till tre nya i stället för två. Jämför!

Vad tror ni händer om man skickar till fyra?
Hur kan resultatet generaliseras?

Elevuppgift

I Risvedens skola finns en flicka, Maja. Hon bestämmer sig för att sprida ut ett rykte som säger att skolan ska ha lov 8 december. Hon berättar det för två kamrater 1 december och ber dem att nästa dag föra ryktet vidare till 2 nya kamrater var. Dessa ska i sin tur fortsätta att sprida ryktet till två kamrater var dagen efter att de fått reda på det o s v.

Alltså: Första dagen vet 2 st (förutom Maja) vad ryktet säger, andra dagen fyra ytterligare och så vidare.

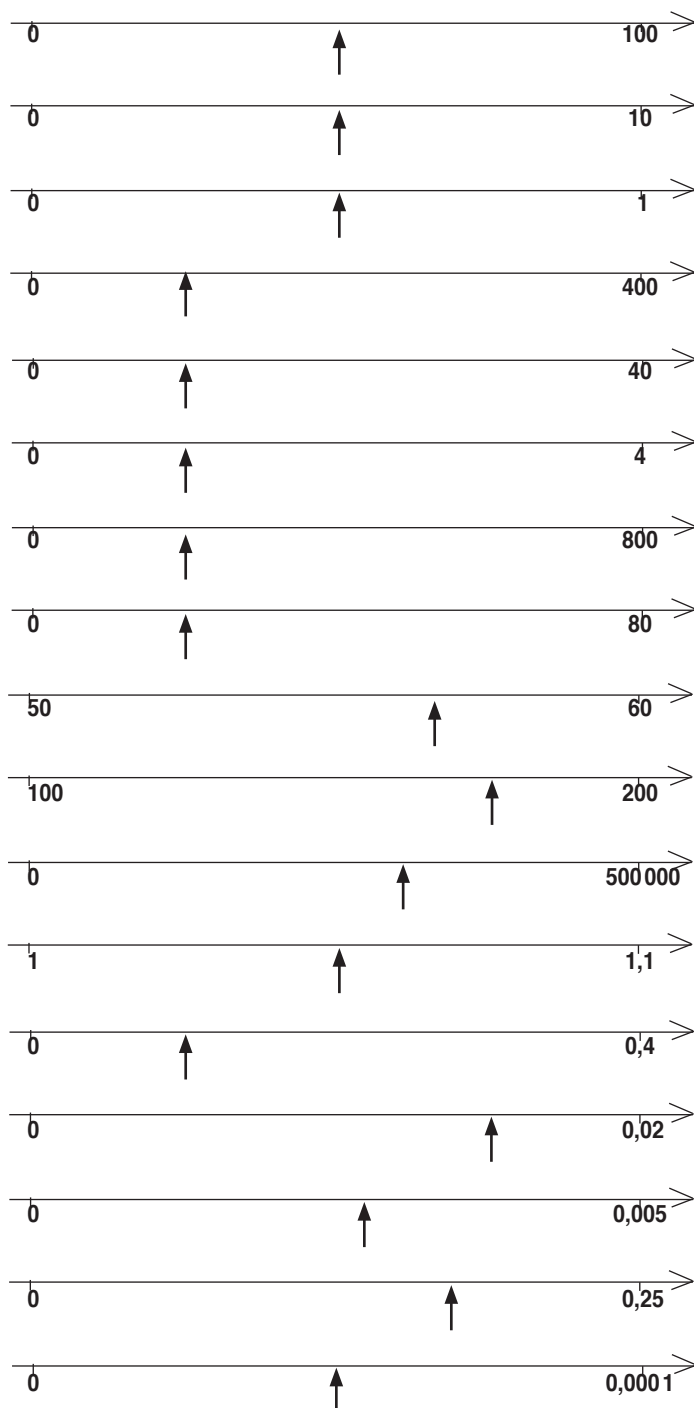
Hur många elever har hört ryktet den femte dagen?

Om det finns 250 elever på skolan, kan då alla ha nåtts av ryktet den 7 december, så att de stannar hemma från skolan den 8?

Maja har en brevvän i USA. Hon bestämmer sig för att sprida ryktet i hela sitt skolområde som har 4 000 elever. Hur lång tid tar det för hennes rykte att nå alla, om hon sprider det på samma sätt?

Dag	Antal nya personer som hör ryktet en viss dag	Totala antalet personer som har hört ryktet en viss dag, inklusive Maja
I början		
av första dagen	1	1
1	2	3
2	4	7
3	8	15
4	16	31
5	?	?
6	?	?
?	256	?
10	1 024	2 047
11	2 048	4 095
?	4 096	?
•	•	•
?	?	524 287
•	•	•
n	2^n	$2^{n+1} - 1$

Vilket tal visar pilen på?



Övningen avser att stärka taluppfattningen och utveckla proportionalitetstänkande, förutom att den tränar samarbete, argumentation och resonemang. Ändra talen, om det behövs för att de ska passa din klass.

Eleverna ska komma på vilka tal som pilarna visar på. Avgör själv hur exakt det behöver vara. Uppmuntra dem att jämföra lösningar från olika rader.

Låt eleverna först fundera en stund enskilt, så att alla får en möjlighet att sätta sig in i problemet och fundera över lösningen. Därefter kan de arbeta i mindre grupper, för att avsluta med diskussion i helklass. Vid diskussionen uppmanas eleverna att försöka hitta olika sätt att förklara varför ett svar är det rätta. Lyft fram proportionellt tänkande och uppmuntra eleverna att försöka förklara med hjälp av detta.

Vill man utveckla övningen kan man låta eleverna, parvis eller i mindre grupper, konstruera egna liknande uppgifter. Det brukar vara ett bra sätt att öka svårighetsgraden.

Anmärkning

Det behövs naturligtvis inga speciella uppgifter för att man ska få möjlighet att diskutera på ett medvetet sätt. Det handlar mer om att vara inriktad på att få igång ett matematiskt samtal. Vi har ändå visat två övningar som kan ge upphov till bra diskussioner.

- Hur kan man engagera de tysta och ängsliga eleverna i samtalet?
- Hur uppmuntrar man och lyfter fram det värdefulla i en mindre fruktbar elevidé?
- Hur kan man få eleverna att överge sina ursprungliga benämningar till förmån för ett mer korrekt språk, t ex att byta ut fyrkant mot kvadrat, utan att de ska uppleva att man underkänner deras eget språk?
- Fundera över hur det oftast brukar vara:
Vilka elever talar mest? Är det någon skillnad mellan hur mycket flickor och pojkar deltar? Hur långa är elevernas inlägg? Vad talar man om? Vad brukar diskussionen leda fram till?
Hur brukar samtalet avbrytas?
Vad skulle diskussionerna också kunna handla om och leda fram till? (Jfr t ex Granström & Einarsson, 1995).
- En del elever och föräldrar har den uppfattningen att man ingenting gör om man inte producerar något i böckerna.
Hur skulle du vilja bemöta det?
- Prova under en tid att använda frågorna på s 47. Samtala därefter med dina kollegor om vad som fungerade bra i din grupp, och vad som inte fungerade så bra. Vilka hinder och svårigheter har du för att kunna genomföra utvecklande och bra samtal i klassen?
- Hur kan man använda elevernas skrivna språk som ett medel att kommunicera matematik och som ett medel att stärka tänkandet?
- Karl Henrik Eriksson skriver i sin artikel om förklarande kontra upptäckande metod. Utgå från ett begrepp eller ett samband som du normalt undervisar om och fundera över hur undervisningen skulle se ut med en förklarande metod respektive en upptäckande metod.
- Bengt Bratt och Jan Wyndhamn beskriver i sin artikel en arbetsmodell, där eleverna ska diskutera ett antal utsagor om en bild. Prova modellen på det område som just nu är aktuellt i din klass. Vilka förtjänster kan du se i att arbeta på ett sådant sätt?
- Inger Wistedt tar i sin artikel upp erfarenheter från ett forskningsprojekt om hur man "förstår varandra" och överskattar respektive underskattar kommunikationens roll. Dina reflektioner och erfarenheter?

Litteratur

- Ahlberg, A. (1995). Att synliggöra matematikens språkliga och sociala karaktär. *Nämnanen* 22(4), 3-7.
- Beskow, A. (1993). Vad ska räknas? *Nämnanen* 20(3), 35-40.
- Brekke, G. (1995). Opfatninger av desimaltall. *Nämnanen* 22(4), 27-36.
- Brekke, G. & Støren, H. (1995). Kvalitet i matematikundervisningen. *Nämnanen* 22(3), 10-14 och 26-27.
- Claesson, P. (1991). Huvudräkningsknep. *Nämnanen* 18(3-4), 88-91.
- Ek, G. (1988). Om en flaggstång. *Nämnanen* 15(4), 29-30.
- Ekström Holm, W. (1990). Samarbete – Självkänsla – Ansvar. *Nämnanen* 17(2), 18-21.
- Emanuelsson, G. (1995). Måltavlan: Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnanen* 22(2), 2-3.
- Emanuelsson, L. (1989). Tal om tal. *Nämnanen* 16(1), 13-16.
- Emanuelsson, L. (1993). Uppslaget: Vad är det som är matematik? *Nämnanen* 20(4), 28-29.
- Gunnarsson, B. (1988). Metodikuppgift för livet? *Nämnanen* 15(4), 11-14.
- Kilborn, W. (1991). Matematikundervisning och hemspråk. *Nämnanen* 18(3-4), 54-62.
- Lundgren, M. (1990). Barns räknande. *Nämnanen* 17(1), 37-40.
- Löwing, M. (1986). Vardagsdiagnostik. *Nämnanen* 13(2-3), 104-105.
- Malmer, G. (1982). Matematik – ett språk för alla. *Nämnanen* 9(1), 10-13.
- Malmer, G. (1986). Matematik med tanke på logik. *Nämnanen* 12(4), 48-50.
- Malmer, G. (1992). Matematik ett glädjeämne. Anmälan *Nämnanen*, 19(3), 30.
- McIntosh, A. (1995). Vitalisera huvudräkningen. *Nämnanen* 22(3), 23-25.
- Munther, R. (1981). Hur mycket är en miljard? *Nämnanen* 8(1), 48-50.
- Persson, I. O. (1991). Huvudräkningsspelet Plump. *Nämnanen* 18(3/4), 87-87.
- Reys, B. m fl (1995a). Vad är god taluppfattning? *Nämnanen* 22(2), 23-25, UPPSLAGET, 25-29 och Problemavdelningen, 51.
- Reys, B. m fl (1995b). Svenska elevers taluppfattning. *Nämnanen* 22(3), 34-40.
- Sjögren, P. (1992). En matematikers syn på svensk skolmatematik. *Nämnanen* 19(3), 12-19.
- Unenge, J. & Wyndhamn, J. (1992). Matematisk klokskap – en ny baskunskap?. *Nämnanen* 19(1), 34-37.
- UPPSLAGET i varje nummer av *Nämnanen*.
- Wahlund, B. (1990). Skriva i matte. *Nämnanen* 17(1), 41-43.
- Wyndhamn, J. (1986). Om att förstå och att tala matematik. *Nämnanen*, 13(2-3), 32-35.
- Wyndhamn, J. & Claesson, P. (1984). Samtalet som utvärderingsinstrument. *Nämnanen* 10(4), 35-39.
-
- Ahlberg, A. (1995a). *Att möta matematiken i förskolan*. Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Ahlberg, A. (1995b). *Barn och matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *NOMAD* 1(1), 8-17.
- Bolt, B. (1984). *Boken om aktiviteter i matematik*. Göteborg: Förlagshuset Gothia.
- Christiansen, I. M. (1994). "Informal activity" in mathematics instruction. *NOMAD* 2(3/4), 7-30.
- Danielsson, K. & Modin, L. (1992). *Räkna med 6-åringen*. Malmö: Gleerups förlag.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommentarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bidrag till Sveriges matematiklärarförenings sommarkurs i Mullsjö 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T. (Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning*. Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
- Granström, K. & Einarsson, C. (1995). *Forskning om liv och arbete i svenska klassrum – en översikt*. Stockholm: Skolverket.
- Johnsen-Höines, M. (1990). *Matematik som språk*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1979). *PUMP-projektet – bakgrund och erfarenheter*. Skolöverstyrelsens Utbildningsforskning FoU-rapport 37. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1991a). *Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 1 Grundläggande aritmetik*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1991b). *Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 2. Rationella och irrationella tal*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1992). *Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 3. Mätning, geometri, funktioner, sannolikhetlära och statistik*. Malmö: Almqvist & Wiksell, Hermods.
- Malmer, G. (1990). *Kreativ matematik*. Solna: Eke-lunds förlag.

- Malmer, G. (1991). Språkets roll i matematikinläring. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Tal och räkning 1*. Lund: Studentlitteratur, 45-58.22 Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Nystedt, L. (1993). *På tal om tal. En läsebok i matematik*. Djursholm: Instant Mathematics.
- Paulos, J. A. (1991). *Förstå siffror*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Sällström, P. (1991). *Tecken att tänka med*. Om symbolisk notation inom musik, dans, kartografi, matematik, fysik, kemi, teknologi, arkitektur, färglära och bildkonst. Malmö: Carlssons Bokförlag.
- Skolöverstyrelsen (1979). *Matematikterminologi i skolan*. Stockholm: Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget.
- Stake, S. (1989). *Täljaren: Del av en helhet*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Wigforss, F. (1957). *Den grundläggande matematikundervisningen*. Stockholm: Bergwalls.
- Wistedt, I., Brattström, G. & Jacobsson, C. (1992). *Att vardagsanknyta matematikundervisningen. Slutrapport från projektet "Vardagskunskaper och skolmatematik"*. Stockholms universitet, Pedagogiska institutionen.
- Wistedt, I., Brattström, G. & Jacobsson, C. (1993). *Att använda barns informella kunskaper i matematikundervisningen. Slutrapport från ett uppföljningsprojektet*. Stockholms universitet, Pedagogiska institutionen.
- Wyndhamn, J. (1988). *Tankeform och problemmiljö. Skolan som kontext för tänkande i elementär matematik*. SIC 26, 1988. University of Linköping: Studies in Communication.
- Alrø, H. (1995). I forlanger for lidt af jer selv. *NOMAD* 3(2), 7-28.
- Alrø, H. og Skovsmose, O. (1993). Det var ikke meningen! – Om kommunikation i matematikundervisningen. *NOMAD* 1(2), 6-29.
- Christiansen, I. M. (1994). "Informal activity" in mathematics instruction. *NOMAD* 2(3/4), 7-30.
- Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995). *The Emergence of Mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Cockcroft, W. H. (Chairman). (1982). *Mathematics Counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools*. London: H.M.S.O.
- Lindenskov, L. (1994). Samtalen der blev væk – om elevens egen læreplan. I G. Nissen & M. Blomhøj (Red), *Hul i kulturen*, Sæt matematiken på plads i kultur- og samfunds billedet. Viborg: Spektrum.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics* 12:2-8, 44.
- NCTM (1991). *Developing number sense in the middle grades*. Subject-Matter Books for Grades 5-8. Reston, Va.: Author.
- NCTM (1993). *Number sense and operations*. Subject-Matter Books for Grades K-6. Reston, Va.: Author.
- Paasonen, J. (1994). What on earth is a straight line? *NOMAD* 2(3/4), 47-56.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. Manchester: University of Nottingham.

Om barns förmåga att bilda begrepp

Karl Henrik Eriksson

Här behandlas balansen mellan konkreta och abstrakta representationer utifrån utvecklings- och inlärningspsykologi. Begreppsbildning går snabbare i ett socialt sammanhang och språkets roll bör uppmärksammas.

Basfärdigheter

Att färdigheter i att tala, lyssna, läsa, skriva och räkna är betydelsefulla – ja, nästan nödvändiga – för att bilda begrepp är oomtvistat, men är det nog därmed? Somliga har pläderat för något slags begreppsträning utan anknytning till ett visst undervisnings-innehåll. Det skulle då ske helt formellt, utan specifik anknytning till något undervisningsstoff och utan att speciellt uppmärksamma huruvida träningen har något samband med aktiviteter som ter sig meningsfulla för elever. Man bör emellertid ej tveka om att föredra en innehållsrelaterad begreppsträning som får utgöra en viktig del av inläringen av ämnesstoffet.

Material

Att eleven ges rikliga tillfällen att hantera och manipulera konkret material vid laborationer i de naturvetenskapliga ämnena och som utgångsmaterial i de praktiskt-estetiska för konstnärligt skapande kan betraktas som självklarheter. Materialet är därvid både relevant för innehållet i själva ämnet och ett hjälpmedel för begreppsbildning. Hur är det då i matematiken? Laborationssatser

används väl ibland, men i vilken utsträckning ”gör man egna tal”, utgående från elevernas verklighet, som också kan tjäna som underlag för begreppsbildning? De gamla ”Räknelärornas” arma dikesgrävare, som löpte uppenbar risk för att nedtrampas allteftersom tiden blev knappare och arbetsstyrkan ökade, likaväl som de expediters vars huvudsakliga syssla tycktes vara att mäta upp band i olika längder är väl numera avskaffade, men vad har kommit i stället? Hur tar man kursplanens ord ”Eleverna hämtar erfarenhet från omvärlden som ger dem underlag för att utvidga sitt matematiska vetande” på allvar och vad har det med barnens begreppsbildning att göra? Vad händer med ”The new math” och varför?

Stöd för tanken att hanterandet av konkret material främjar begreppsbildning hos barn finner man hos såväl utvecklings- som inlärningspsykologer. Dewey med sin tes om ”learning by doing”, Kilpatrick med sin projektmetod avseende bl a en syntes mellan praktik och teori, Piaget också han betonande växelverkan praktik – teori, Bruner med sin teori om de tre representationsformerna – alla har de givit värdefulla bidrag till frågan om hur barn kan bilda begrepp, helt nödvändiga för deras intellektuella utveckling. Den klassiska associativa metoden för att lära ut begrepp genom att

Artikeln har tidigare publicerats i
Nämnnaren 15(1), 1988.

”ge definitioner” har här fått sina nödiga komplement. Numera betonas starkt vikten av att i undervisningen utgå från elevens vardagliga erfarenheter och att söka åstadkomma växling mellan teori och praktik. Det anses där också viktigt för eleven att få ”känna på”, ”handskas med” och ”pröva” konkret material, att därvid iaktta likheter och skillnader, dvs att kunna generalisera och diskriminera, en av flera grundläggande aktiviteter vid begreppsbildning.

Bruners idéer kommer här i åtanke; först ett manipulerande och undersökande av verkliga föremål (aktiv representation), senare en mental (ikonisk) bild av föremålen, därefter benämningar (symbolisk representation) av tingen i den omgivande verkligheten, det sistnämnda med stigande levnadsålder alltmer dominerande, ehuru de två förstnämnda aldrig helt överges. Hur ofta kan inte en skiss eller bild komplettera en verbal definition av ett begrepp (”en bild säger mer än tusen ord”)? Att konkret uppleva en (tredimensionell) kropp genom manipulation ökar begreppsuppfattningen påtagligt.

Även om slutmålet för skolans undervisning måste vara det symboliska stadiet, grundläggande för generalisation och abstraktion, bör elevernas begreppsbildning underlättas genom att de flitigt får använda också de två ”lägre” representationsformerna, men inte stanna därvid utan växla mellan alla tre.

Några ryska bidrag

Vid diskussion om begreppsbildning hos barn bör man ej glömma de bidrag som givits inom den ryska kulturhistoriska skolan med namn som Vygotsky, Galperin och Elkonin. Dessa ryska psykologer och pedagoger har starkt betonat vikten av att barn kan nå fram till begreppslig kunskap genom ett konkret manipulerande med föremål, dvs vid den

sensoriska upplevelsen av tingen.

För Vygotsky är det en intim växelverkan teori – praktik som förklarar utvecklingen av begreppen. Det är människans verktyg (i vid bemärkelse) och ej biologiska förändringar av annat slag än sådana som betingas av mognaden som förklarar begreppsutvecklingen hos barn, säger han.

Vygotsky förkastar således en dualistisk hypotes innebärande att det materiellt kroppsliga och det ”andliga” skulle utvecklas parallellt och oberoende av varandra. Den sociala miljön påverkar språket och tankeförmågan och likaså den omgivande kulturen med dess ”verktyg”, ”redskap” eller ”instrument” för produktion och blir till sist en del av individens personlighet, ett slags socialt eller kulturellt arv. Denna tankegång kom att betyda en brygga mellan praktisk och teoretisk verksamhet hos Vygotsky.

När barn ställs inför problem som skall lösas är såväl deras tal som deras aktivitet med händerna – ”verktygen”, ”redskapen” – lika viktiga och utgör delar av samma komplexa funktion. Barns vana att vid lösandet av vissa uppgifter föra en dialog med sig själva (eller monolog) är också välbekant. Experiment avsedda att hindra sådant tal har gjorts och visat negativ inverkan på lösandet.

Könsdifferenser

Flickor har stundom ansetts ha svårare än pojkar för matematik, fysik och teknik, åtminstone i det senare fallet beroende på bristande bekantskap med tekniska ting via leksaker och sportredskap. Senare undersökningar avseende den spatials förmågan har icke bekräftat de tidigare signifikativa könsdifferenserna. Större likheter ifråga om lekmiljö och flickors deltagande i trä- och metallslöjd i skolan har angetts som en av förklaringarna. Den spatials intelligensfaktorn, av ålder ansedd som viktig vid

lösandet av vissa uppgifter inom geometri och teknik, kan således ej längre påstås diskriminera mellan flickor och pojkar. Att det ända in på 1950-talet i ett grannland förekommit att flickor och pojkar ej fått räkna samma uppgifter, och att de uppgifter som i examen endast skulle räknas av pojkarna var rumsliga (spatiala) uppgifter inom geometrin, visar att eventuella könsdifferenser ej har så mycket med biologi att göra som med matematikmetod. Flickor kunde få fler timmar hemkunskap medan pojkar fick fler i matematik. Detta gällde fram till 1969. Om sedan en undersökning skulle ha visat könsdifferenser i fråga om begreppsförståelse i matematik vore orsakerna ej svåra att förklara.

Att benämna tingen

Nödvändigt för att kunna bilda begrepp är att kunna benämna ting och företeelser i omvärlden. Återigen måste språkets roll framhävas. Matematiken har sitt fackspråk, sjökulturen sitt, rörmokeriet och sporten sitt. I Lars Forssells dikt Uljanov säger kaptenen att han måste använda "ord" – . . . inte bara att peka med handen på seglen och ropa "ta ner dom där!" "Det skulle se ut!". Dikten förtjänar att läsas i klassrummet på tal om begreppsbildning och nödvändigheten av att känna till termer och begrepp! Undervisning kring termer och begrepp genom verbal beskrivning torde i klassrummet vara det vanligaste sättet för begreppsinnläring, därnäst bilder, skisser och diagram, medan små barn främst antas bilda begrepp utgående från konkreta föremål eller situationer, eller med referens till en upplevd episod, t ex "en soffa som mormor har" istället för till beskrivande attribut.

Begrepp kan vara "öppna" eller "stängda". I förra fallet är definitionerna ej helt uttömmande – självklarheter anses ej behöva utsägas. Matematiska begrepp är i regel

"stängda", medan fysikaliska begrepp ej alltid innehåller alla förutsättningar som gäller, t ex om lufttryck, fuktighetsgrad etc. De begrepp som barn bildar kan innehålla andra kriterier än vuxnas, men ofta sådana som barn fäster störst vikt vid. Barnet konstruerar sina begrepp genom manipulering av föremål, genom kategorisering, attribuering och "tankeoperationer", men även mycket enkla föremål och händelser förblir obestämda som sociala realiteter om man inte talar om dem. Vissa barn kan förstå varje ord i en uppgift, t ex i matematik, och ändå ej fatta uppgiften. Den norske socialpsykologen Rommetveit talar här om konkurrerande referensramar, t ex i en uppgift som innebär å ena sidan empirisk kunskap, å andra sidan logisk slutledning i form av en syllogism. Abstrakta begrepp hos barn bygger på tidigare inlärd eller på annat sätt förvärvat begrepp. Såväl deduktiv som induktiv metod kan här komma till användning, men talet spelar då synnerligen stor roll.

Förklarande kontra upptäckande metod

Begreppen deduktiv respektive induktiv metod vid begreppsbildningen har sina motsvarigheter i undervisningen i termerna "förklarande" respektive "upptäckande" metod. Vilken metod som är att föredra vid begreppsbildning hos barn är ej på förhand givet. Det beror bl a på vilket stoff man arbetar med och svårighetsgraden hos detta. Tillgång till laborativt material som tillåter "upptäckande" undervisningsmetod anses dock ge mera bestående effekter. Ofta tillåter omständigheterna endast att läraren enbart ger regeln eller begreppet. En sådan "förklarande" metod anses förkorta själva inlärningsprocessen, dock kan den vara mindre effektiv med hänsyn till behållningen över tid. Inläring genom presentation av



begrepp (av föräldrar, lärare etc) sker främst i grundskolan, medan individens egen upptäckande verksamhet, ledande till begreppsbildning, främst sker i förskole- och gymnasieåldrarna och då direkt relaterad till den egna kognitiva strukturen.

Man kan då fråga sig varför det blivit så, att barn i mellanliggande åldrar (7–16 år) mera direkt exponeras för lärandet av begrepp genom skolans och lärarnas åtgärder. Man skulle våga påstå att, jämfört med Lgr 69 vars inlärningsparadigm i rätt hög utsträckning vilade på förstärkningsteorier som resulterade i de s k MAKIS-principerna, de senaste läroplanerna har fått en något annorlunda framtoning.

Dessa, mer influerad av kognitiv inläringsteori, betonar starkare den typ av begreppsbildning som har sin utgångspunkt i elevens vardagliga upptäckande verksamhet. Man framhåller starkt vikten av att utgå från elevens verklighetsbild, bygga på hans eller hennes nyfikenhet att ta upp och behandla problem som eleverna själva ställer. Problembaserad inläring (PBI) har numera

blivit ett lösenord för detta. Rika tillfällen till varvning mellan egna iakttagelser och teori och ”tillämpning” i vardagslivet rekommenderas, även om exemplifieringarna är sparsamma. Teman och projekt föreslås för tillämpningar och för befastandet av insikter.

Lgr 69 anklagades för en viss ”överteoretisering” av matematikundervisningen. Utan att anklaga Lgr 80 för motsatsen kan man ändå kanske undra över huruvida man i skolarbetet tillvaratagit de möjligheter som bjuds, ej blott att gå från teori till praktik eller tillämpning utan också att gå den motsatta vägen från praktik till teori. Har man t ex inom de praktiskt-estetiska ämnena alltid tillvaratagit de möjligheter som funnits att gå den motsatta vägen — från praktik till teori, dvs försökt anknyta till skolans övriga ämnen?

Slöjdlärare i bägge slöjdarterna brukar vittna om att det under många lektioner förekommer praktiska uppgifter med direkt anknytning till skolmatematiken, t ex mätningar och beräkningar av sträckor, ytor och

rymder; enhetsbyten och skalor. Kravet på verklighetsanknytning får ej hindra kopplingar till skolans övergripande mål där just generalisering, diskriminering och klassificering ingår i begreppsbildningsprocessen.

Experiment med begreppsbildning

Sådana experiment pekar på åtminstone några faktorer som har betydelse för begreppsbildning. "Närheten" mellan exemplifiering och begrepp är en positiv faktor, upprepad och varierad exemplifiering är en annan positiv faktor och avgjort bättre än ett enstaka exempel. Begreppsbildning sker också snabbare vid "pararbete" än vid individuellt arbete eller tävlan. Tillgång på konkret material är också viktig, som tidigare nämnts, men här bör också tilläggas att arbete med konkret material ej bör ske i ett socialt vakuum och icke utan ett intensivt uppmärksammande av språkets roll för begreppsbildningen. Denna kan ej existera "i sig". Begreppsbildning måste alltid ha ett innehåll och ingå i en kontext. Den vilar snarare på upplevelser i omvärlden förmedlade genom språket än på några utvecklings-mekanismer som kan ge upphov till "stadieteorier" eller dylikt.

En strävan att ej hålla undervisningen på ett abstrakt plan, med vardagsnärlighet och verklighetsanknytning som kännetecken – och kanske honnörssord – är i och för sig värt att sträva efter och helt i samklang med läroplanens intentioner, men det kan därvid

också finnas en risk, nämligen att man försummar teoriansknytningen. Brister i fråga om generalisering och diskriminering försvårar begreppsbildningen. Detta ger också sämre framtidsberedskap. Ett alltför stort beroende av tillfälligt empiriskt material ger upphov till låsningar inför nyheter. En alltför abstrakt och generell undervisning "går ej hem" hos många elever. Att träffa rätt balanspunkt mellan dessa båda ytterligheter är nog mera konst än vetenskap.

Flera utvecklingsprojekt inom skolans värld har emellertid visat att i varje fall barn på låg- och mellanstadiet behöver konfrontationer med verkligheten som underlag för att bilda begrepp och begreppsrelationer.

Referenser

- Bruner, J.S. (1971). *På väg mot en undervisningsteori*.
- Dewey, J. (1980). *Individ, skola och samhälle, pedagogiska texter*. Stockholm.
- Eriksson, K. H. (1986). *Vol 1. Bildningsmål, skola, lärarutbildning. Vol 2. Undervisningsmål, yrkesföreställningar, könsroller, begreppsbildning* Båda rapporterna utgivna av Universitetet i Linköping, Institutionen för pedagogik och psykologi och ingående i BUNT-projektet. (Rapport LiU-PEK-R-91 och LiU-PEK-R-91).
- Kilpatrick, W.H. (1925). *Foundations of Method*.
- Rommetveit, R. (1985). Linguistic structuring of experience. In V. Wertsch (ed), *Linguistic structuring of experience: Vygotskian perspectives*.
- Vygotsky, L.S. (1962). *Thought and language*. New York.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Språket vår mentala tumme

Bengt Bratt och Jan Wyndhamn

Här följer ett samtal kring ett centralt undervisningsmetodiskt problem: Kopplingen mellan språket och matematikundervisningen. Efter detta ges några förslag till aktiviteter kring innehållet i samtalet med arbetsuppgifter att pröva i egen klass.

Jan: Du påstår att språket är vår mentala tumme. Då måste jag fråga dig vad du menar med det. Vad har tummen med språket att göra och vad har språket med matematiken att göra?

Bengt: Som bekant är det med hjälp av handens tumme som vi kan fatta, gripa tag i något, t ex ett verktyg. Vi kan utgå ifrån att det är med hjälp av språket vi kan fatta saker och ting på det abstrakta planet, t ex i ämnet matematik.

Det är tveksamt huruvida kunskaper av teoretisk eller abstrakt natur kan sägas existera annat än i eller genom individens språk eller språkförmåga.

Jan: Vad har då språket med matematiken att göra?

Bengt: Mycket! Men det beror på vad man menar med språk. Jag ser det så här. Språket är något mycket mer än ett kommunikationsmedel mellan människor. Språket är djupt integrerat i vårt medvetna jag. Det är ett livsinstrument av största betydelse för allt vad vi är och företar oss. Det är tämligen likgiltigt om det vi till vardags menar med språk är svenska, polska

eller turkiska. De är alla synonymer i förhållande till varandra och kan bytas ut mot varandra i den språksyn jag här antyder. Till dessa synonyma uttrycksmedel kan vi också räkna en mängd partikulära språk. Sådana partikulära språk äger varje individ på flera områden i sitt verksamhetsliv. En forskare utvecklar ett partikulärt språk för sin vetenskap, en hantverkare ett för sitt yrke, en familjemedlem ett för sin familjs särskilda samvaro. I skolan utgör undervisningsämnena partikulära språk och skulle kunna kallas "matematiska", "kemiska", "historiska" osv.

Jan: Ur undervisningsmetodisk synpunkt borde det då vara av största betydelse att eleven utvecklar så många språk som möjligt till så stort djup och så stor vidd som möjligt.

Bengt: Riktigt. Man kan säga att den språkliga amplitud och den språkliga vidd man sammantaget besitter i ett visst ögonblick anger basen eller ramen för den intellektuella kapaciteten. Den utgör också plattformen för nya erövringar i fråga om språkförmåga och inläring.

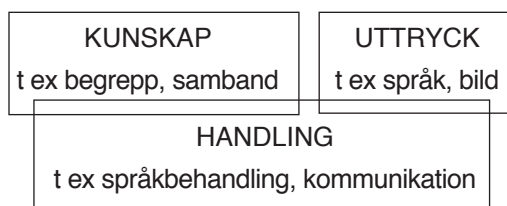
Jan: Menar du alltså att en kunnig person har ett mer utvecklat språk än en mindre kunnig person?

Denna artikel har tidigare publicerats i *Nämnan 100*, 18(3-4), 1991.

Bengt: Ja, just det. Vi erövrar vårt språk, våra språk, genom att tillägna oss kunskaper.

Den abstrakta kunskapen är i huvudsak språkburen. Språket (uttrycket) bär begreppet. Språkhandlingen som kommunikation eller tanke är vårt förnämsta medium i undervisningen.

Språkhandlingen utgör länken mellan kunskapen och uttrycket för denna kunskap. Vi kan se det hela så här:



Jan: Teoretiska studier kräver alltså ett språk, att den studerande behärskar eller lär sig det system av ord, tecken och symboler som uttrycker studiernas innehåll. Den som inte nått en viss bestämd språklig nivå kan inte tillägna sig den information eller de kunskaper som står till förfogande på denna nivå. Vi har ur en annorlunda vinkel belyst några kurspläneord från Lgr 80 om matematikundervisningen: *En elev får inte börja med ett nytt moment utan tillräcklig grund från tidigare moment.*

Jag skulle gärna vilja fortsätta på din liknelse om språket och tummen. Tummen gör det möjligt att gripa, fatta t ex en skiftnyckel och använda den för att dra åt en mutter. Kan man säga att språket hjälper mig att fatta och utnyttja t ex matematiken med sina begrepp, samband och operationer som ett verktyg för att undersöka och bemästra vår omgivande verklighet?

Din term språkhandlingen motsvaras då av själva handhavandet (bl a finjusteringen) av skiftnyckeln, dvs samspelet tumme – verktyg. Är det rätt uppfattat?

Bengt: Ja. Och enligt detta sätt att se blir den allmänna undervisningsmetodiken läran om hur kommunikation och språkhandlingar kan utnyttjas för att utveckla kunskaper och språk.

En studerande som är beredd att tränga in på ett nytt kunskapsområde måste samtidigt vara beredd att införliva nya språkliga element, nya ord och formuleringar, nya tecken osv med sitt språk eller med sin språkförmåga. Det är när han flyttat in de nya språkliga elementen i sitt tidigare språk och är fullt klar över deras innebörd, som han har erövrat den kunskap han var ute efter. Det är då han kan minnas, aktualisera, tillämpa och bygga vidare på vad han lärt.

Eleven utvecklar sin kunskap och sitt språk under alla dygnets timmar – i skolan, i alla ämnen, under alla lektioner. Varje lärare bör ta fasta på detta och se alla ämnen som bas för språkuppbyggnaden. Svenskämnet bör betraktas som ett orienteringsämne bland andra orienteringsämnena. Färdigheterna och språket utvecklas i alla ämnen.

Jan: Du talar hela tiden om att utveckla. Det måste innebära att det finns något att starta med. Eller hur?

Bengt: Vi måste se språket som en fortsättning på vår rent "biologiska kod" – den som gör det möjligt för vår kropp att gå, cykla och tala i form av automatiserade processer. Det är viktigt att språkhandlingarna efter hand kan utvecklas till sådana automatiserade processer. Dessa färdigheter lägger kontinuerligt grunden för ny inläring, där den nya kunskapen ger nya språkliga uttrycksmöjligheter i en process utan slut. Vi ser alltså att det knappast är möjligt att tillägna sig abstrakta kunskaper utan att samtidigt utveckla "språk-koden".

Jan: Det du nu säger kan exemplifieras med inlärandet av multiplikationstabellen. Innan en elev vet att $7 \cdot 8 = 56$ som en ren "reflexkunskap" måste eleven ha haft tillfälle att på olika sätt bestämma produkten och bearbeta denna information. Tabellkunskapen är sedan en förutsättning för andra beräkningar.

Bengt: Precis. Kunskapen övergår via uttrycket till färdigheter som används i nästa inlärningsstadium. "Baskunskaperna" lägger på detta sätt grunden för kunskaper av allt högre ordningar, tex att kunna se sammanhang, dra slutsatser och lösa problem.

Jan: Lösa problem, ja! Ibland förklaras de svårigheter många elever har när det gäller att lösa textuppgifter (s k benämnda problem) med att barnen "inte kan läsa uppgiften". Med ditt friska sätt att se det hela blir det tydligen matematiklärares uppgift att lära eleverna läsa och förstå det lästa. Genom matematikämnet utökas elevernas språkliga repertoar! Matematiken är inte bara "tagande" utan också "givande". Matematik blir "matematiska", dvs tummen tränas av verktyget.

Bengt: Ja, låt oss betona denna växelverkan mellan kunskapsinhämtande och språkuppbyggnad. Det ena förutsätter det andra och de förstärker, utvecklar varandra. Den här växelverkan kommer främst till genom språkhandlingar och kommunikation. Det är detta vi ska utnyttja pedagogiskt-metodiskt.

Jan: En knäckfråga i sammanhanget blir tydligen:

Ska man rensa undervisningen från avancerade språkelement (tex "svåra ord", facktermer) eller ska man tackla dem med energiska undervisningsmetodiska insatser? Vad svarar du?

Bengt: Med alla reservationer för individuella skillnader mellan elevernas intellektuella förmåga och mognadsnivå bör svaret bli att vi bör anstränga oss för att ge eleverna det avancerade språk som bär den abstrakta delen av vår kunskap om verkligheten.

Vi får inte i missriktad ambition kapa bort topparna eller släta ut det språk som bär fram kunskapen till våra elever. Vi måste besegra dessa toppar i vår undervisning!

All undervisning och allt lärande innebär innerst inne en uppbyggnad och en utveckling av elevens språk, och det är när kunskapsinhämtande och språklig träning får stödja varandra på kunskapsfält efter kunskapsfält, på intresseområde efter intresseområde, som elevens mest positiva utveckling i olika avseenden kan väntas.

Jan: Hur kan nu detta teoretiska resonemang omsättas praktiskt i klassrummet? Vi talar en stund om språkhandlingar – som får bli ett nytt användbart metodiskt begrepp.

Bengt: Jag skulle vilja placera in språkhandlingarna i deras pedagogiska sammanhang och se hur allsidig språkanvändning och kommunikativa arbetsformer kan leda fram till undervisningens mål. Jag ser följande skiss framför mig, se figur nästa sida:

Det gäller att utveckla elevernas förmåga att använda språket i dess fem viktigaste uttryck – att tala, att lyssna, att tänka, att läsa och att skriva – i naturliga undervisningssituationer. Man kan därvid tänka sig olika arbetsmodeller.

Jan: Sådana arbetsmodeller finns beskrivna i tidigare nummer av Nämnaren. Det finns också mycket att hämta i din bok Tala – Léva – Léra.

MÅL

Personlig frigörelse och mognad
Kommunikationsförmåga
Kunskap
Insikt

UNDERVISNINGSPROCESS

SPRÅKHANDLINGAR OCH KOMMUNIKATION

Tala Lyssna Tänka Läsa Skriva

GRUNDLÄGGANDE KOMMUNIKATIONSFÄRDIGHETER

Att skriva bokstäver, ord och meningar
Att läsa text och förstå det lästa
Att kunna multiplikationstabellen
... etc

Bengt: Nu vill jag presentera en annan modell som vi kan kalla "bild-utsaga-modellen".

Syftet är att eleverna genom att diskutera ett antal givna utsagor om en bild eller en text ska nå kunskap om bild- eller textinnehållet och bli förtrogna med det språk som representerar detta innehåll. Det kan exempelvis gälla en landskapsbild och till denna bild fogade utsagor som mer eller mindre direkt uttrycker bildinnehållet. Eleverna instrueras att gruppvis sortera givna utsagor i olika kategorier, t ex sanna utsagor, falska utsagor, orimliga utsagor och utsagor omöjliga att ta ställning till.

Arbetet kan lätt arrangeras som parallellgruppsuppgift, dvs eleverna löser först arbetsuppgifterna i smågrupper, som sedan går samman parvis och jämför sina arbetsresultat.

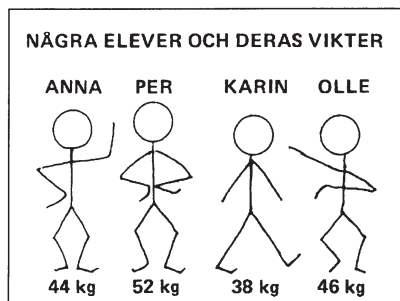
Jan: Vilket bra uppslag! Jag försöker om-sätta bild-utsaga-modellen i några arbetsuppgifter, som följer efter vårt samtal.

Referenser

- Bratt, B. (1977). *Tala – Leva – Lära*. Stockholm: Liber.
- Bratt, B. (1985). *Språkutveckling – vägen till kunskap*. Lund Studentlitteratur.
- Bratt, B. och Claesson, P. (1979). Matematikundervisningen och språkträningen. I *Matematikämnet i skolan*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Unenge, J., Sandahl, A., & Wyndhamn, J. (1994). *Lära matematik*. Om grundskolans matematikundervisning. Lund: Studentlitteratur.
- Wyndhamn, J. (1976). Alternativ arbetsuppgift i matematik. *Nämnamnaren* 2(3).
- Wyndhamn, J. (1978). Tala matematik. *Nämnamnaren* 5(1).
- Wyndhamn, J. (1982). *Räknesätt – Tankesätt – Undervisningssätt*. Rapport från lärarutbildningen i Linköping.

Grupparbetsuppgifter

Uppgift A



Sätt R för ett rätt och F för ett felaktigt påstående och motivera ditt svar.

1. Olle väger mest.
2. Karin väger minst.
3. Per väger 7 kg mer än Anna.
4. Skillnaden mellan Olles och Annas vikter är 2 kg.
5. Skillnaden i vikt mellan den som väger mest och den som väger minst är 24 kg.
6. Anna och Karin väger tillsammans lika mycket som Per och Olle väger tillsammans.
7. Skillnaden mellan Pers och Annas vikter är lika stor som skillnaden mellan Olles och Karins vikter.
8. Medelvärdet av barnens vikter är 45 kg.
9. Per och Karin väger tillsammans lika mycket som Olle och Anna väger tillsammans.
10. Anna och Karin väger tillsammans dubbelt så mycket som Olle gör.

Uppgift B

Sätt R för rätt och F för felaktigt påstående. Svaret ska motiveras.

1. Räknesättet är division
2. Nämnaren är 43
3. Resten är 6.
4. Utan att göra någon ytterligare beräkning kan man se att $43 \times 8 + 6 = 350$.
5. Ändras 350 till 356 går divisionen jämnt upp (8 går jämnt upp i 356).
6. För 350 kr kan man köpa 44 stycken blomplantor som kostar 8 kr styck.
7. För att sätta upp 350 frimärken på ark med plats för 8 märken går det åt 44 ark.
8. Packas 350 lampor i kartonger som rymmer 8 lampor vardera blir 6 lampor över.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 8 \overline{) 350} \\ \underline{288} \\ 62 \\ \underline{48} \\ 14 \end{array} = 43$$

Uppgift C

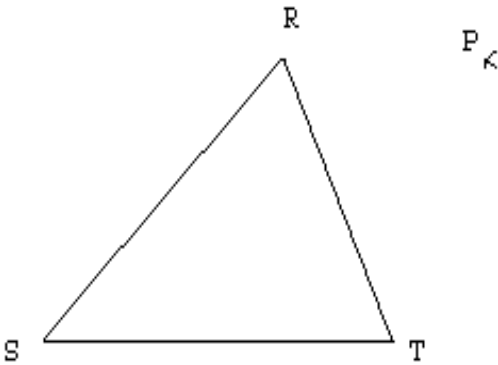
**34 % av alla skolpojkar är brunögda
34 % av alla skolflickor är brunögda**

Sätt R för varje rätt och F för varje felaktigt påstående. Motivera svaret.

1. Av 100 skolflickor kan 34 förväntas vara brunögda.
2. Av 200 skolpojkar kan 34 förväntas vara brunögda.
3. Andelen (delen, bråkdelen) av alla skolpojkar som är brunögda är lika stor som andelen av alla skolflickor som är brunögda.
4. Av 100 elever kan 34 stycken förväntas vara brunögda.
5. Av 50 pojkar kan 17 stycken förväntas vara brunögda.
6. Av 50 flickor kan 17 stycken förväntas vara brunögda.
7. Av alla skolelever kan man förvänta att 68 stycken är brunögda.

- 8. Av 200 skolelever kan man förvänta att 68 stycken är brunögda.
- 9. 68 stycken av 200 motsvarar 34%.
- 10. Andelen av alla skolelever som är brunögda är lika stor som andelen brunögda pojkar respektive andelen brunögda flickor.

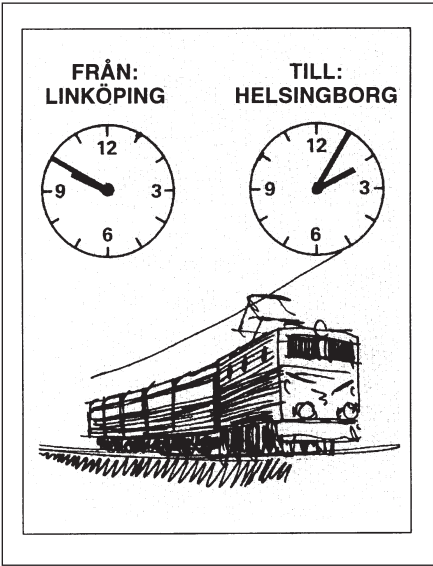
Uppgift D



Sätt R för varje riktigt påstående och F för varje felaktigt. Motivera ditt ställningstagande.

- 1. Figuren kallas triangel
- 2. I figuren finns 3 vinklar och 3 sträckor.
- 3. Sträckorna kallas sidor.
- 4. Punkterna R, S och T kallas hörn.
- 5. SR är den längsta sidan.
- 6. Vinkeln S är större än vinkeln T.
- 7. Hörnet R står emot sidan ST.
- 8. Triangeln är likbent.
- 9. Triangeln är spetsvinklig.
- 10. Triangelns omkrets är ungefär 15 cm.
- 11. Triangelns area är ungefär 8 cm².
- 12. Vinkeln T är ungefär 76 grader.
- 13. Triangelns vinkelsumma är 180 grader.
- 14. Punkten P ligger inuti triangeln
- 15. Punkten P ligger lika långt från sträckan ST som punkten R.

Uppgift E



Sätt R för ett riktigt och F för felaktigt påstående. Motivera varför.

- 1. Tåget avgår från Linköping kl 09.50.
- 2. Tåget kommer till Helsingborg kl 02.05.
- 3. Tåget kommer till Helsingborg ”5 minuter över 2”.
- 4. Tåget går från Linköping ”20 minuter i 10”.
- 5. Tågresan tar 3 timmar och 45 minuter
- 6. Tågresans längd i tid kan beräknas ”i huvudet” så här: ”10 min + 4 tim + 5 minuter”.
- 7. Tågresans längd i tid kan beräknas med hjälp av ”uppställning” så här:

14 05	$\begin{array}{r} 60 \\ 14\ 05 \\ -9\ 50 \end{array}$
$\underline{-9\ 50}$	$\underline{-9\ 50}$
tim min	tim min

Matematiska samtal

Inger Wistedt

I den pedagogiska debatten framhålls kommunikationens betydelse för kunskapsbildningen. Genom matematiska samtal får barnen en möjlighet att uttrycka och reflektera över sina tankar och de får också chans att pröva och ompröva dem i samspel med andra.

I artikeln diskuteras här kommunikation både som överskattat och underskattat verktyg i läroprocessen.

Kommunikationens roll

Sedan decennier har läroplaner och kursplaner betonat värdet av att utgå från barns erfarenheter i undervisningen. I förarbetet till den nya läroplanen för grundskolan reses emellertid ett varnande finger för en alltför stark betoning av det som barnen har att bjuda (SOU 1992:94, sid 74). I skolan möter eleverna en ny kulturell värld som vi menar är av värde; de är där för att få nya erfarenheter och det finns numera gott om forskning som visar, att skolans ämnen inte kan ses som en direkt förlängning eller fördjupning av det som barnen redan mött i vardagen (se t. ex. Säljö, 1989; Wistedt et. al., 1992).

Men, när elever ska lära sig det nya måste de använda sitt tidigare kunnande, även om vi idag vet att det också finns risker med det, t. ex. att den lärande förvränger fakta för att de ska passa in i tidigare modeller av världen. I den pedagogiska debatten framhålls ofta, att riskerna för sådana förvrängningar är större om eleverna lämnas ensamma i sin

kunskapsbildning (t. ex. Unenge & Wyndhamn, 1991; Brown & Palincsar, 1989). Men, om de får samverka med andra när de lär, skulle felslut och missuppfattningar kunna korrigeras. Kommunikationen fungerar som en tillfällig bygg-nadsställning, som stöttar och riktar lärandet under ett uppbyggnadsskede (Vygotsky, 1978; Wyndhamn, 1988).

Tankarna om kommunikationens betydelse vid inlärnin g är till stor del grundade i teorier om läroprocessen (Hiebert, 1992), men hur ser det egentligen ut i verkligheten? I projektet "Att använda barns informella kunskaper i matematikundervisningen" har forskare från Stockholms universitets pedagogiska och matematiska institutioner undersökt hur barn använder sina erfarenheter när de lär sig matematik i skolan och vilka svårigheter de ställs inför när de ska ta hjälp av andra för att utveckla sina tankar (Wistedt, Brattström & Jacobsson, 1993). I rapporten beskrivs hur matematiska samtal både kan överskattas och underskattas som verktyg i läroprocessen. Här presenterar vi några korta glimtar av resultaten.

Denna artikel har tidigare varit publicerad i *Näm naren* 20(4), 1993.

Hur långt kommer bilen?

I projektet har vi bl a följt tre elever, Sune, Markus och Peter, när de löser en uppgift hämtad från Resursnämnan (1987), se figur till höger.

De tre pojkarna löser uppgiften på tre olika sätt och det är när de kommer till delfråga c) som det står klart för dem, att de tänkt olika:

En bil har en bensintank som rymmer 48 liter. Hur långt kan man köra som längst om bilen drar

- a) 1 liter bensin per mil?
- b) 2 liter bensin per mil?
- c) 1, 5 liter bensin per mil?

Sune

Sune löser uppgiften genom att multiplicera talet i deluppgiften med talet i texten. En bil som drar 1 liter per mil kommer 48 mil, en bil som drar 2 liter per mil kommer 96 och en som drar 1,5 liter kommer 72, för

– Först har man 1×48 . Då har man tagit ettan här framför. 1×48 är ju 48. Så tar man den här femman här, som räknas som en halv. Då tar man... då räknar jag det som en tvåa och delar det på hälften... och det är 24. Så plussar man ihop de här två. Då blir det 72.

Sunes lösning

$$48 \cdot 1 = 48 \quad \frac{48}{2} = 24 \quad 24 + 48 = 72$$

Markus

Markus tänker på ett annat sätt. En bil som drar 1 liter bensin per mil kommer 48 mil. En som drar 2 liter per mil bör då komma hälften så långt, dvs 24 mil. 1,5 ligger mitt emellan 1 och 2 och en bil som drar "mitt emellan" mycket bensin borde då komma "mitt emellan" långt

– 36 tar jag. För kolla: $48 \dots$ nej 24, det är halva 12. Då tar man $12 + 24 = 36$. Det tog jag.

Markus lösning

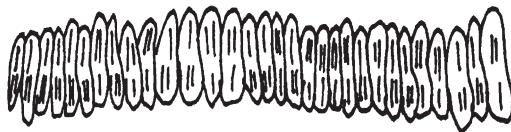
$$\begin{array}{r} 24 \\ + 12 \\ \hline 36 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ + 12 \\ \hline 36 \end{array}$$

Peter

Peter slutligen, dividerar. Han ritar en lång rad streck på sitt papper, vart och ett representerande en halv liter bensin.

– Sen har jag ringat in tre och så har jag räknat dom, säger han och kommer fram till svaret 32.

Peters lösning



Att förstå varandra

Under samtalet försöker eleverna övertyga varandra om att just deras lösning är den riktiga. Markus försöker t ex visa Sune att hans svar är orimligt. En bil som drar mer bensin kan ju knappast komma längre än en som drar mindre, på samma mängd bensin. Men Sune tycks inte tänka i termer av "bensinförbrukning", "tankvolym" och "sträcka". Han använder talen i texten, utan tanke på något innehåll, och han väljer ett räknesätt som hjälper honom att manipulera sig fram till ett svar. Att han väljer att just multiplicera kan ha flera orsaker: kanske känner han igen ett mönster i presentationen av uppgiften (nog ser det ut som en "multiplikationsuppgift"), kanske väljer han multiplikation för att talen i uppgiften gör räknesättet rimligt (inte kan det väl vara meningen att man ska lägga ihop eller dra ifrån här! Och dividera kan det ju inte vara fråga om när 1,5 finns med; det har vi inte lärt oss än).

Ändå lyckas Markus övertyga Sune om att svaret inte kan fås genom multiplikation och Sune accepterar då Markus metod. Han byter upp sig till ett annat sätt att räkna, men det finns inget som tyder på att han också byter upp sig till ett annat sätt att tänka. Han manipulerar fortfarande tal, även om han gör det på ett nytt sätt. Ytligt sett är de båda överens. Svaret blir 36. Men de tycks fortfarande tänka på olika sätt.

Peter, som har kommit fram till ett annat svar än Markus (och Sune), är helt övertygad om att hans svar är rätt. Men de andra vill inte använda "strecksatset" och Peter kan inte förmedla sin förståelse på annat sätt. Han vet att han ska rita streck, men han vet inte varför han gör på det sättet. Han vet att han ska dela antalet liter i tanken med antalet liter som bilen drar per mil för att få fram sträckan som bilen kan köra, men han vet inte att det betyder att han delar, i meningen "dividerar" storheterna. Han väljer sin lösning utifrån en intuitiv förståelse av proble-

met och han använder personliga symboler som fungerar när han löser uppgiften, men som är svåra för andra att tolka och svåra för Peter själv att relatera till matematiken.

Att överskatta kommunikationens roll

Exemplet, som jag kort, kanske alltför kort, har beskrivit, kan säga oss något om de svårigheter som eleverna ställs inför när de ska uttrycka och förmedla sina tankar. I rapporten "Att använda barns informella kunskaper i matematikundervisningen" (Wistedt et. al., 1993), där exemplet beskrivs utförligt, skildras hur elevernas förståelse av uppgiften gradvis växer fram och hur de i sina försök att få grepp om sin egen förståelse kan få svårt att dra nytta av bidrag från andra elever. Det hjälper inte att eleverna arbetar i grupp för att gemensamt försöka lösa en given uppgift. Även om uppgiften är densamma för de tre eleverna, så är deras inlärningsprojekt olika och elever som kämpar med att reda ut en egen tankegång, får svårt att sätta sig in i helt andra sätt att tänka kring uppgiften.

Det finns alltså gränser för vad kommunikation kan bidra med när elever lär. Risk finns att kommunikationens roll överskattas, att vi föreställer oss att det räcker med att ge elever tillfälle att tala matematik med varandra, att argumentera för lösningar och att lyssna till andras argument. Exemplet visar, att det inte räcker med att lita till den kommunikation som eleverna spontant klarar av på egen hand.

Att underskatta kommunikationens roll

Det är här läraren kommer in. Vi måste alltså räkna med att eleverna behöver hjälp av en vuxen person, som kan förstå vad eleven försöker säga och som kan hjälpa eleven

att tydliggöra sina tankar. Och det är här det finns risker att vi underskattar kommunikationens roll. Om läraren ska kunna hjälpa eleven krävs att läraren ser elevernas utsagor som uttryck för tankar i utveckling. Den numera klassiska frågan ”Hur tänkte du?”, ställs ofta till eleverna med krav på redovisning. Men frågan kan också ses som en uppmaning till läraren, att se elevers bidrag i ett kommunikativt perspektiv, som uttryck för tankar som eleven själv kan ha svårt att formulera. I rapporten lägger vi ett sådant perspektiv på elevernas utsagor och erbjuder därmed ett sätt att se på samtal mellan elever. Den som vill lära känna perspektivet (och som kanske vill veta hur historien slutade) är välkommen att beställa rapporten (se referenser).

Referenser

- Brown, A.L. & Palincsar, A.S. (1989). Guided, cooperative learning and individual knowledge acquisition. In L.B. Resnick (Ed.) *Knowing, learning, and instruction*. Essays in honor of Robert Glaser, pp. 393-451. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hiebert, J. (1992). Reflection and communication: cognitive considerations in school mathematics reform. *International Journal of Educational Research*, 17(5), pp 439-456.
- Resursnämnan. (1987). Ett servicematerial för resurspersoner.
- Skola för bildning. Betänkande av läroplanskommittén. SOU 1992:94. Stockholm: Allmänna förlaget.
- Säljö, R. (1989). Kommunikativ praktik och institutionell inläring. I R. Säljö m.fl. *Som vi uppfattar det*. Elva bidrag om inläring och omvärldsuppfattning, s 1-17. Lund: Studentlitteratur.
- Unenge, J. & Wyndhamn, J. (1991). *Från räkning till matematisk klokskap*. ALM-rapport nr 6. Jönköping: Högskolan i Jönköping.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *NOMAD* 1(1), 40-54.
- Wistedt, I. i samarbete med Brattström, G. & Jacobsson, C. under medverkan av Källgården, E-S. (1992). *Att vardagsanknyta matematikundervisningen*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.
- Wistedt, I. i samarbete med Brattström, G. & Jacobsson, C. (1993). *Att använda barns informella kunskaper i matematikundervisningen*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.
- Wyndhamn, J. (1988). *Tankeform och problemmiljö*. Skolan som kontext för tänkande i elementär matematik. SIC 26, 1988. University of Linköping: Studies in Communication.

3

Problemlösning

Ett av de viktigaste målen för all matematikundervisning är att utveckla elevernas lust och förmåga att lösa problem. Samtidigt som problemlösning är ett mål är det också ett medel att stimulera elevernas intresse och tänkande. Här behandlas olika elev- och läraraktiviteter som visat sig framgångsrika. I kapitlet finns en problemsamling.

Frank Lester beskriver i sin artikel olika faktorer som påverkar problemlösningens förmåga och hur man kan lägga upp undervisningen. Barbara Jaworski belyser betydelsen av att eleverna får utvecklas i en matematisk miljö.

I vår undervisning ska vi sträva efter att eleven

förstår och kan formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt tolka och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen

I slutet av det femte skolåret ska eleven

ha förvärvat sådana grundläggande kunskaper och färdigheter i matematik som behövs för att kunna hantera situationer och lösa konkreta problem i elevens närmiljö

I slutet av det nionde skolåret ska eleven

ha förvärvat sådana kunskaper och färdigheter i matematik som behövs för att kunna hantera situationer och lösa problem som vanligen förekommer i hem och samhälle

Kursplan i matematik

Varför är problemlösning så viktigt?

För att inte bli lurad i vardagsliv och samhälle, för att kunna förstå och påverka som fullvärdig medlem i demokratiska processer behöver man kunna kontrollera den ökande användningen av matematik. Genom att lösa problem kan man utveckla tankar, idéer, självförtroende, analysförmåga, kreativitet och tålamod. Man lär sig att planera, upptäcka samband, förfina det logiska tänkandet och skaffar sig beredskap att klara situationer i livet.

Kursplanen ser problemlösning som ett medel att nå matematiskt tänkande. Det kan ses som ett sätt att bygga en brygga mellan en vardaglig verklighet och den traditionellt som abstrakt uppfattade skolmatematiken. Problemlösning kan ses som motor eller drivkraft i lärandet.

Problemlösning innefattar mycket mer än att bara komma ihåg enkla fakta eller att använda sig av inlärd förfaringssätt. Att försöka lösa ett problem är att anta en utmaning. Goda problemlösare är inte bara bra på att lösa problem, utan upptäcker också och kan åtgärda fel. De reagerar tidigare än andra på signaler att något inte stämmer. De visar större tendens att utföra kontroller under problemlösningsprocessen i uppgifter och deras lösning (Allwood, 1991).

För att bli goda problemlösare behöver eleverna under en lång tidsperiod systematiskt lösa många problem av skiftande slag. Hur en sådan undervisning kan gå till beskriver Frank Lester, s 85 ff.

Hur kan vi arbeta?

För att nå så långt som möjligt, är det av yttersta vikt att eleven får utveckla sin problemlösningssförmåga i en kreativ och trygg miljö, med bra förutsättningar. Eleverna och läraren i gruppen eller klassen kan tillsammans skapa dessa.

I en grupp ska man kunna utbyta idéer och information och våga komma med nya idéer. Varje individ ska bli tagen på allvar och bli uppbackad och respekterad för sina ansträngningar och försök att hitta en lösning. Man ska, i positiv anda, stödja, uppmuntra och granska varandras förslag. En idé kan föda nya idéer hos de andra i gruppen. Man ger varandra impulser, som leder arbetet vidare. Aktivt lyssnande och engagerade kamrater ger nya tankar. Genom att arbeta i grupp och därmed "tvingas" ge uttryck för egna erfarenheter, ställa frågor eller komma med förslag till strategier blir eleven medveten om sitt eget tänkande och förståelsen utvecklas.

När man arbetar med smågrupper bör gruppens storlek inte vara större än att varje elev blir en aktiv deltagare, 3–4 stycken kan vara ett lämpligt antal. Varje gruppmedlem ska inse sitt eget ansvar i arbetet. Gruppsammansättningen är viktig. Medlemmarna måste få en chans att bygga upp förtroende för varandra och ge varandra trygghet. Gruppen bör därför inte förändras alltför ofta.

Om eleverna tar till sig idéer från kamrater och får ökat självförtroende att aktivt delta i lösningsprocessen, kan alla öka sitt kunnande, oavsett hur långt de kommit i sin egen utveckling. För att utvecklas behöver man stöd och uppmuntran, både från kamrater och lärare.

I arbetet med en mindre grupp eller enskilda elever, kan läraren lättare få förståelse för elevens sätt att tänka. Hon kan se vad som

är utvecklingsbart och vad som behöver förändras. Hon bör lyssna, uppmuntra, visa respekt för idéer och tankar, men också uttrycka sin egen uppfattning och, om eleven saknar egna frågor, ställa sådana som poängterar matematiska aspekter och fokusera på kritiska punkter i lösningsprocessen. Eleven måste få se att läraren tycker det är både roligt och viktigt att arbeta med problemlösning.

Undervisningens innehåll

Lärarens funktion är, förutom att skapa en positiv miljö, att hitta lämpliga kreativa aktiviteter som leder mot de uppsatta målen och att hjälpa eleverna utveckla sitt tänkande och kunnande.

För att arbetet med problem i matematik ska kunna varieras på ett sätt som passar olika elevers erfarenheter, intressen och förutsättningar är det angeläget att vi skaffar oss god kännedom om olika typer av problem och problemsituationer. Utan anspråk på att vara fullständiga nämner vi här några viktiga problemtyper

- från andra skolämnen, från vardagsliv och samhälle
- från olika delar av matematikämnet
 - med olika talområden och talmängder
 - med olika storheter som antal, vikt, volym, temperatur, längd, pris, hastighet, tid samt olika enheter som g, kg, liter, m, kr, år
- som kan lösas med miniräknare, huvudräkning, formler, ekvationer
- som kan lösas med olika representationsformer som teckningar, figurer, tabeller, diagram
- som kan lösas med olika metoder och strategier
- givna med olika språkliga formuleringar, olika lång text, muntligt, med eller utan bilder, autentiska texter med överflödig information eller där information saknas
- som ger mer än ett svar eller där svar saknas
- som tar olika lång tid att lösa

Som lärare behöver vi reflektera över variationerna och se till att eleverna får möta olika problemtyper. Ett lämpligt urval ur mångfalden är viktigt för att vi ska kunna förbereda eleverna för vardagslivet och kunna individualisera undervisningen så långt som möjligt.

För att problemen ska stämma med eller utgå från elevernas erfarenheter och verklighet, kan det bli nödvändigt att göra lämpliga förändringar i sammanhang, talområde etc, så att innehåll och problemställning kan engagera och uppfattas av eleverna.

Problemlösningssuppgifter finns att hämta på olika håll i skolvardagen: utflykter, temaarbete, klassfester och i alla andra ämnen. Det finns en stor mängd situationer som kan vara utgångspunkt för problemformulering, för både elever och lärare.

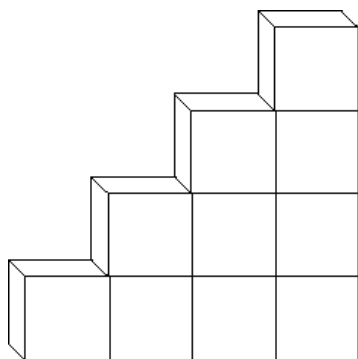
Litteraturlistan innehåller ett antal artiklar om erfarenheter från problemlösningsaktiviteter i olika sammanhang. Varje nummer av *Nämnan* har en Problemaavdelning med uppgifter av olika svårighetsgrad.

Låt kreativiteten blomma

I anslutning till miljöundervisningen kan man t ex arbeta med problemställningar kring familjens sopor. Man kan undersöka sopvolymen under en viss tid och göra olika jämförelser. Eleverna möter en mängd förpackningar av olika slag. Detta ger upphov till uppgifter kring pris, relaterade till förpackningsstorlek, mängd papper till förpackning, konsekvenser för naturen. I samband med trafikundervisning kan problemen handla om utsläpp och bränsleåtgång (se t ex Fritzén, 1993). Talområde kan anpassas med tanke på elevernas mognad och ålder. Miniräknaren kommer till användning.

Idrott är ett område som kan ge upphov till många problem. När man studerar matchtabeller kan man diskutera hur lagen har kunnat få ihop sina poäng. Planstorlekar kan undersökas och man kan fundera över relationer mellan sidornas längd, jämföra olika planer i olika sportgrenar (se t ex Ernestam & Olsson, 1989). Frågor om kostnader för att utöva olika sporter eller idrotter kan ge upphov till en mängd problem. Se vidare *Litteratur*, där det finns förtecknade artiklar som publicerats kring problemlösning i olika sammanhang.

Trappan



I figuren ser du en trappa. Diskutera dess uppbyggnad.

Exempel på frågeställningar:

Om den istället varit 2 kuber bred, hur hade den sett ut då?

Om den hade varit två steg högre?

Hur ser trappan ut om den har 12 steg, byggda av två kuber i bredd?

Du har 100 kuber. Bygg en trappa av dem. Hur ser trappan ut?

Basen på trappan är en kvadrat bestående av 25 kubstenar.

Hur hög och bred är trappan? Hur många kubstenar går åt för att bygga den?

Bygg en trappa av 225 kubiska stenar. Hur ser trappan ut?

Trappan är byggd av 165 kubstenar. Man kan gå upp för trappan från alla håll. Översta steget är en kub. Hur ser trappan ut?

I några av exemplen finns det flera möjliga lösningar. Det ger anledning till diskussioner och utbyte av tankar i samtal efter själva lösningsarbetet.

Samma problem, olika kontexter

Här är ett välkänt exempel, som förekommer i olika formuleringar:

1 En groda står på botten av en brunn, som är tio meter djup. På dagen klättrar grodan upp 4 meter längs brunnsväggen, men på natten, när han sover, glider han två meter nedåt. Hur länge dröjer det tills grodan kommer upp ur brunnen?

2 En brandman stod på den mittersta pinnen av en stege. Han klättrade upp tre steg. Det blev så varmt att han blev tvungen att klättra ner fem steg. Efter en stund kunde han klättra upp igen. Han klättrade nio steg. Då stod han på den översta pinnen. Hur många stegpinnar hade stegen? Hur såg stegen ut?

3 Krabban hade varit hela dagen på stranden och solat sig. När eftermiddagen kom skulle hon ge sig av hemåt. Krabban bodde 35 m ut i havet. På 1 minut förflyttade hon sig 10 m. Då kom en våg och hon spolades tillbaka 5 m. Krabban blev så trött att hon måste vila 1 minut. Detta upprepades gång på gång. Hur lång tid behövde krabban för att ta sig hem?

Kommentar

När det gäller den här typen av problem, så verkar det som äldre elever, över 8 år, resonerar felaktigt, medan unga elever ritar någon typ av bild och löser problemet korrekt. (Se t ex Lester, 1988, s 33). Vad kan detta bero på?

Hur många husdjur finns det?

Detta är ett exempel på ett öppet problem som inte innehåller all information, utan kräver att den som ska besvara frågan, själv eller tillsammans med andra, fastställer vilka förutsättningar som gäller. Gemensamt i klassen kan man börja med att diskutera

Vad är ett husdjur?

Vilka ska vi räkna?

Hur ska de kategoriseras?

innan man kan ge sig på lösningen.

Hur många bilar behöver vi?

Vilka är förutsättningarna? Det kan gälla teater- eller museibesök. Hur många är vi? Finns det föräldrar som kan köra?

Hur mycket tyg ska Lisa köpa till dukarna vi ska göra på pysseldagen ?

Fånga vardagsnära situationer, när de uppträder i skolan. Vilka antagande behöver göras?

Räcker mjölkransonen till en elefant?

En elefant dricker ca hundra liter varje dag. Skulle han bli otörstig om alla i din skola avstod sin mjölkranson en dag? Hur får vi en god uppfattning av hur mycket hundra liter är?

På följande sidor finns en Problemsamling med aktiviteter och uppgifter, huvudsakligen hämtade från Nämnarens Problemavdelning. Den är tänkt som diskussionsmaterial och idégivare. Problemen är därför inte ordnade med tanke på svårighetsgrad, elevers ålder eller förmåga eller problemens innehåll.

- Titta igenom problemen och fundera över deras natur och karaktär. Vilka uppgifter svarar mot problemtyperna på s 71? Vilka problemtyper saknas? Hur skulle problemen kunna ändras för att passa dina elever? Tänk på att eleverna i grupparbete klarar svårare uppgifter.
- Studera artikeln av Frank Lester om Problemlösningens natur, s 85. Välj ut några problem, som du finner intressanta och prova att lösa dem med lämpliga strategier, t ex de som listats på s 86.
- Välj ut några problem till eleverna och studera hur de reagerar och vilka strategier använder de?

Problemsamling

Här finns ett 40-tal problem, som inte är ordnade efter någon speciell princip. De är tänkta att användas som inspirations- och diskussionsunderlag. De flesta har i någon form publicerats i Nämnarens problemavdelning. Fem är hämtade från Nationellt prov för kurs A i gymnasieskolan, dec 1995 (40 – 44). De tre sista av dessa är breddningsuppgifter från detta prov. De senare är som de flesta andra uppgifter lämpliga för arbete i grupp och kan då användas, (med modifieringar), genom nästan hela grundskolan.

1 I kiosken finns fyra sorters glass. Du köper tre kulor. Hur kan dina glassar se ut?

2 Sju barn sitter på golvet i ring. De spelar ett spel med en speciell regel. "Flickor ska lägga tre kulor och pojkar ska lägga två kulor framför sig på golvet." När alla har lagt sina kulor ligger det nitton kulor där. Hur många pojkar och hur många flickor sitter i ringen?

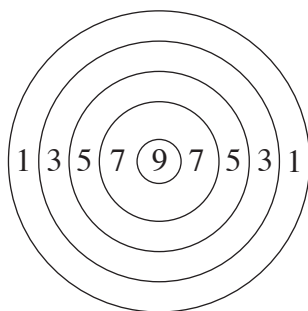
3 Per, Lisa och Björn åker pulka i snön. Var och en av dem har lånat pulka och vantar av en av de andra. Den som har Björns vantar åker i Pers pulka. Vem åker i Lisas pulka?

4 Johan, Lars, Maria och jag hade samlat burkar och PET-flaskor. Sammanlagt var de 360 st. När vi pantat allihop fick vi 267,50 kr. Hur hade vi samlat?

5 Petterssons har tre barn. De två äldsta är tvillingar. Barnens ålder uppgår tillsammans till 29 år. För sex år sedan var Petterssons barns sammanlagda ålder 12 år. Hur gamla är barnen nu?

6 Jonssons är fem i familjen, mor, far och tre barn. De vill varje dag byta placering vid middagsbordet. Hur länge dröjer det innan de använt alla olika placeringar av fem runt bordet?

7 Anna, Bosse och Lars springer utefter en bana. Först springer Lars, 300 meter efter honom springer Bosse och 100 meter efter Bosse springer Anna. Efter 6 minuter har Anna sprungit ikapp Bosse, och efter ytterligare 6 minuter har hon sprungit ikapp Lars. Hur många minuter tar det för Bosse att springa ikapp Lars, om var och en springer med konstant fart?



8 Om sex pilar kastas mot tavlan och alla pilar träffar, hur kan man då få följande poäng: 10, 14, 29, 30, 46, 50? Vilka poängtal är möjliga?

9 Du erbjuder dig att diska varje dag hemma under de närmaste veckorna. Som ersättning vill du ha en krona den första dagen och därefter vill du ha dubbelt så mycket som dagen före. Hur mycket har du tjänat efter ... dagar/veckor? Hur mycket kommer du att tjäna den ... dagen?

10 I en stor ring står 100 barn, 50 flickor och 50 pojkar. Två pojkar står bredvid varandra på 17 ställen. På hur många platser står flickor sida vid sida?

11 Tre äpplen ska delas mellan fyra barn. Alla ska få lika mycket. Hur ska man göra?

12 Ulle har nästan 100 idolbilder. Om hon lägger dem med tre i varje rad får hon ett kort över. Lägger hon fyra i varje rad får hon två över och med fem i varje rad blir det fyra över. Hur många bilder har hon?

13 En bonde bodde nära en älv. På andra sidan odlade han kål. Han hade en get som tyckte om kål. En dag upptäckte bonden vargen som smög omkring. Sedan såg han den varje dag. Han var rädd att geten skulle bli uppäten.

Bonden skulle skörda kålen. Han kunde inte ta med sig all kålen i båten samtidigt. Hur skulle han bära sig åt ?

14 En karavan har fastnat i öknen. Tillbaka till civilisationen är det 6 dagars marsch. Varje person kan bära mat och vatten så att det räcker för fyra dagar. En person kan alltså inte bära tillräckligt med proviant för att klara sig. Hur många måste ge sig iväg för att en person ska kunna hämta hjälp och de andra säkert ska kunna ta sig tillbaka till karavanen?

15 En kub med sidan 3 cm doppas i rödfärg. När färgen torkas delas den i 27 småkuber med sidan 1 cm. Några av småkuberna har färg på 3 sidor, några på 2 sidor, några på 1 sida och någon inte på någon sida.

16 Ett antal matematiklärare hade möte. De anlände till mötet på ett ovanligt regelbundet vis. Första gången dörrarna öppnades gick en person in i möteslokalen. Varje gång som dörrarna öppnades därefter gick 2 fler in än gången innan. När alla lärare var på plats hade dörrarna öppnats 20 gånger. Hur många lärare var på mötet?

17 Tina, Tom och Pia arbetar med servering på ett kafé. Sin dricks lägger de i en burk och delar efter dagen lika. När Tina går hem tar hon en tredjedel av pengarna, det som är hennes del. När Tom går hem tar han en tredjedel, eftersom han inte vet att Tina redan tagit sin del. Pia tar också vad hon tror är sin del, ovetande om att de andra redan tagit sina pengar. När Pia tagit sitt är det 80 kr kvar i burken. Hur mycket var det från början?

18 Varje dag går det bussar mellan Södertälje och Borås. Från Södertälje startar en buss varje hel timme från klockan 12.00 till midnatt. Från Borås startar också bussarna varje hel timme under samma tid. Bussarna går samma väg och de kör lika fort. Hur många bussar möter en buss som startar från Borås kl. 13.00?

19 Scouterna samlar in papper en gång varannan vecka. Olof tycker att familjen ska lägga alla sina tidningar till pappersinsamlingen. Det blir ungefär 5 kg papper i veckan. Hur mycket papper kan de lämna till scouterna varje gång? Hur mycket papper blir det på ett år?

20 Vad väger en dagstidning? Vad väger tidningarna sammanlagt under ett år?

21 En ingenjör i Skanör som kör bil till arbetet i Lund funderar över sin höga förbrukning av bensin till bilen och eldningsolja till huset. Kanske man kunde samutnyttja energin på något sätt?

Alla bilmotorer har låg verkningsgrad; ca 65% av energin i bensinen blir värme i kylarvattnet, som i sin tur värmer uteluften till ingen nytta.

Tänk om hon kunde ta vara på värmen från motorn och koppla in i husets värmesystem när hon kommer hem. Hur mycket skulle hon då spara per år? (Bensin och eldningsolja ger ungefär lika mycket energi per kubikmeter.)

Hur skulle det gå till? Antag att hon byter ut bilkylasren mot en värmeisolerande vattentank. Hon låter bilmotorn värma vattnet under dagens körning. När hon kommer hem kopplar hon en slang till villans värmesystem och pumpar över varmvattnet dit. Hur stor varmvattentank behöver hon ha på bilen?

Kan du uppfinna någon annan metod att ta vara på bilens överskottsvärme?

Den behöver inte vara billig - du kan ju få ut gratisvärme motsvarande 65% av bilens bensinförbrukning under hela dess livstid!

Ungefär hur mycket pengar motsvarar den bortslösade värmen från en bils livstid?

Värden att räkna med

Villans oljeförbrukning är 2,0 m³/år.

Körsträcka 10 mil/dag 220 dagar/år.

Bensinförbrukning är 1,0 liter/mil.

Energiinnehåll i olja / bensin är 10 kWh/l.

Önskad temperaturökning i tanken är 75°C

Energibehov för vattenvärmning är för 1 m³ ca 0,8°C

22 Tove står i en slöjdaffär. Hon har klippt till tre vävda band på 21 cm, 23 cm och 27 cm. En kund kommer in och vill ha ett band på 29 cm. Tove letar ivrigt efter måttbandet, men någon har lånat det.

a) Kan hon använda de tre uppmätta bitarna för att kunden ska få sin beställning? Finns det mer än ett sätt att göra på?

b) Vilka längder kan bestämmas med hjälp av de redan uppmätta bitarna?

Fyllerijakt som kom av sig

Efter 4 timmar och nästan 3600 kontrollerade bilister hade man bara gripit 30 personer.

23 Är det ett magert resultat som beskrivs i tidningsartikeln ovan? Anta att man färdas på en av våra europavägar. Hur länge behöver vi åka för att för att vi ska möta en berusad förare? (N 1815)

24 Bilden visar ett snöre, som dragits genom sex hål i skivan. Hur ser det ut på baksidan? Hur många olika sätt finns det att dra snöret på baksidan så att framsidan fortfarande ser ut som på bilden? (N2009)



25 Ett hus har två sovrum, ett vardagsrum och ett kök. Tänk dig att rummen är fristående och lika stora. På hur många olika sätt kan dessa sättas samman till ett hus?

(Laborativt kan man lösa uppgiften med någon typ av klossar. Jfr med af Ekenstam, 1982)

26 I tidningar läser vi ofta om den flytande valutan och om kronan som flyter! Men vadå? Kronor kan väl inte flyta? De är väl för tunga, eller?

Här kommer en belysande matteuppgift om vikten av att ha pengar eller kanske pengars "vikt"!

Herbert var överlycklig! Äntligen! Nu var det hans tur! Lottovinst! Nu hade han vunnit 10 miljoner kronor på Lotto. Han står vid bankdisken och ska få ut sin vinst. Lite skämtsamt säger han:

– Man skulle inte kunna få vinsten i 20-kronors sedlar.

Han hade väl aldrig trott att det skulle gå ... men!

– Javisst, sa kassören, det ska väl gå bra. Innan Herbert hann säga något försvann kassören bakom disken. Efter en stund kom han tillbaka.

– Du kan hämta dina pengar på lastbryggan!

Nu återstår frågan till dig. Kan Herbert bära med sig pengarna?

Ett alternativ kan vara att fundera på om han klarar vinsten i 10-kronors mynt.

Är det möjligt att bära hem dem om han i stället ber att få miljonerna i hundralappar, tusenlappar, ...?

Hur hög blir traven av pengar?

Ja här finns många frågor att ställa!

Kan du komma på fler?

27 Vilket tecken?

Sätt ut rätt tecken +, −, × eller / mellan talen nedan så att likheterna stämmer:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 15$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 120$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 26$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 50$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 1$$

28 Ett "badkarsproblem"

I vattenbassängen finns det tre olika avlopp. Om enbart avlopp A är öppet, så töms bassängen på en kvart. Om enbart avlopp B är öppet, så tar det en halvtimme, och om enbart avlopp C är öppet, så tar det tre kvart.

Hur länge tar det om

- a) A och B är öppna? b) B och C öppna? c) A och C är öppna? d) alla tre är öppna?

Kommentar: För 40-50 år sedan var det inte ovanligt med problem av det här slaget. På senare tid har man gjort narr av uppgifter som inte är hämtade från verkligheten men fått en språklig dräkt, en slags rövarhistoria för att motivera och stimulera tankeverksamhet. Sådana uppgifter har också kallats sagotal.

Man kan naturligtvis fundera över vad det finns för poänger med uppgifter av den här typen? Vad är det för förmågor och strategier som stimuleras eller utvecklas?

- 29** a) Placera 2, 3 och 5 i rutorna nedan så att du får störst möjliga resultat. Hur ska talen placeras för att få så litet svar som möjligt?

$$\square + \square - \square = \bigcirc$$

- b) Placera talen 1, 2, 3 och 4 i rutorna nedan, så att du får störst möjliga resultat.

$$\square + \square - \square + \square = \bigcirc$$

- c) Hur får du störst möjliga resultat, om du placerar in talen 2, 4, 6 och 8? Vilket är det största svaret om man väljer bland ensiffriga tal? Vilket är det minsta?

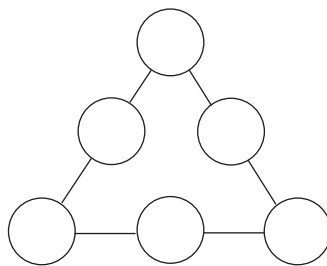
- d) Gör andra talpussel med olika operationer.

- 30** Det tar tre timmar för Kalle att måla en vägg. För Lisa skulle det ta 6 timmar att måla samma vägg. Hur lång tid tar det om de målar väggen tillsammans, samtidigt?

- 31** Lisa står i en kö. Om man räknar framifrån är hon den sjunde, om man räknar bakifrån är hon den åttonde. Hur många står i kö?

- 32** En triangels omkrets är 12 cm. Hur långa kan sidorna vara, om alla har mått i hela centimeter?

- 33** Kan du placera in talen 1, 2, 3, 4, 5 och 6 i cirkelarna så att summan av de tre talen utefter varje sida blir 10? Så att summan blir 11? Finns det mer än en lösning? Vilken är den största summan man kan få? Visa att dina påståenden är korrekta. (För en närmare behandling av detta problem, se Strandberg, 1991b).



- 34** Påskdagen infaller inte på samma datum varje år. På kyrkomötet i Nicaea år 325 bestämdes att påskdagen ska infall första söndagen efter första fullmåne efter vårdagjämningen? Mellan vilka datum kan alltså påsken firas?

- 35** Här är några uppgifter. Räkna ut de svar som fattas. Ser du något mönster?

$$2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$$

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 =$$

$$4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 =$$

....

Fortsätt med fler uppgifter i följd och försök motivera resultaten tex genom att rita figurer, eller använda algebra.

- 36** Ett sätt att få 6 på miniräknare är knappföljden:

$$\boxed{4} + \boxed{2} =$$

Ett annat sätt är

$$\boxed{5} + \boxed{2} - \boxed{1} =$$

Hur många olika knappföljder ger 6? Jämför dina svar med en klasskompis. Hur många knappföljder för 6 kan ni hitta? Hur många är möjliga?

37 Det ska organiseras en basketturnering på en skola med fyra klasser i åk 3 och i åk 4, tre klasser i åk 6. Varje klass ställer upp med ett lag. Det kan finnas både flickor och pojkar i laget som består av sju spelare. Först spelas en serie i varje årskurs. När vinnarlaget i varje årskurs är korat blir det cupspel. Vinnaren i åk 4 möter vinnaren i åk 5. Vinnaren i denna match möter åk 6-vinnaren i matchen om skolmästerskapet.

- a) Hur många matcher blir det? Sätt upp en tabell med tidsplan för turneringen.
- b) Hur många matcher hade det blivit om varje klass ställt upp med två lag? Om man valt att ha en turnering för flickor och en för pojkar?

38 Här är några experiment med summor. 21 kan skrivas som summan av två på varandra följande tal,

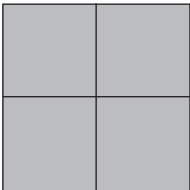
$10 + 11 = 21$

summan av tre på varandra följande tal,

$6 + 7 + 8 = 21$

- a) Skriv 15 som summan av två på varandra följande tal, summan av tre på varandra följande tal. Går det med fyra tal, fem tal?
- b) Går det att skriva 20 som summa av två, tre eller fyra på varandra följande tal? Går det med fem tal?
- c) Gör undersökningar med andra tal. Vad finner du? Ser du något mönster? Generalisera!

39 Dela en kvadrat i fyra lika delar på så många olika sätt som möjligt. Ett sätt ser du nedan. Rita bilder. Hur många lösningar finns det? Försök hitta likheter och skillnader mellan de olika sätten.



40 En kommun ville undersöka hur vanligt det var med samåkning till jobbet. Därför sattes en mätstation upp vid vägen mot industriområdet. Man räknade antalet personer i de bilar som passerade. Ett delresultat från morgonen den 19 december visas i tabellen.

Antal personer per bil	Antal bilar
1	12
2	7
3	3
4	6
5	2

I hur många av bilarna fanns det mer än en person? Beskriv undersökningsresultatet med ett lämpligt diagram.

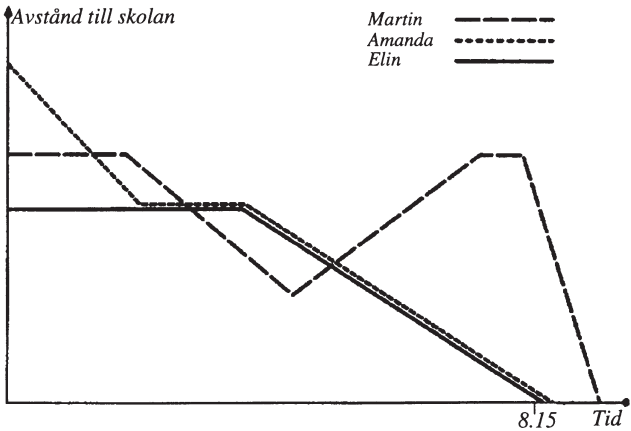
När samåkningen diskuteras i trafiknämnden har Gunnel och Robert olika uppfattningar:

Gunnel: Undersökningen visar att samåkning sker i mycket hög utsträckning, över 80%. Det får anses tillfredsställande.

Robert: Jag har en avvikande uppfattning. Enligt mina beräkningar samåks det bara i sex fall av tio. Det är alldeles för dåligt.

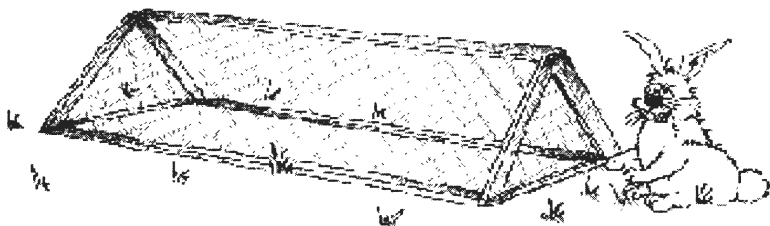
Kan båda ha rätt? Motivera ditt svar.

41 Amanda, Elin och Martin är klasskamrater och bor längs samma skolväg. Alla tre promenerar till skolan varje morgon. De börjar sin första lektion klockan 8.15. Diagrammet visar hur långt från skolan eleverna befinner sig vid olika tider en morgon. Studera diagrammet och beskriv allt som du kan läsa ut ur det.

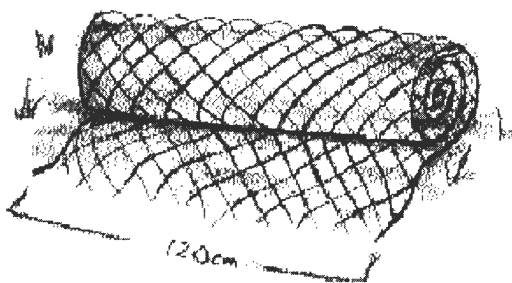
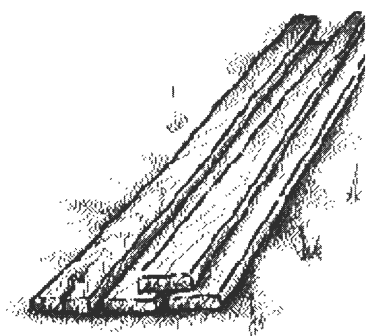


42 Kaninburen

Du ska bygga en kaninbur för utomhusbruk enligt skissen. Buren ska ha en ungefärlig volym av 1 m^3 .



Du ska bygga en stomme av trälist som kostar 6,30 kr per meter. Till sidor, golv och gavlar ska du använda nät som säljs på rulle med bredden 120 cm. Nätet kostar 22 kr per meter. Vad ska buren ha för mått?



Hur många meter trälist behöver du?
Hur många meter nät går åt?
Hur mycket kommer buren att kosta?

Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur du genomför dina beräkningar
- hur väl du redovisar ditt arbete och motiverar dina resultat
- hur lämplig din konstruktion är för ändamålet
- hur väl du utnyttjar materialet
- om din konstruktion följer de givna förutsättningarna

43 Byta plats*Exempel*

Välj ett tvåsiffrigt tal. **84**

Låt siffrorna byta plats. **48**

Beräkna skillnaden mellan
det större och det mindre
av de två talen. **$84 - 48 = 36$**

Låt siffrorna i svaret byta plats. **63**

Beräkna skillnaden mellan
det större och det mindre
av de två talen. **$63 - 36 = 27$**

Låt siffrorna i svaret byta plats.

Upprepa så länge det går.

Vad upptäcker du hos de tal du får?

Vad händer om du börjar med ett annat
tvåsiffrigt tal?

UNDERSÖK!

44 Matpriser

Studera tidningsurklippet som
finns på nästa sida.

I artikeln sägs att den största
prisskillnaden mellan de under-
sökta butikerna fanns i Motala.
På vilken ort var prisskillnaden
minst?

I artikeln sägs vidare att en familj
kan tjäna närmare 8000 kr om
året genom att välja rätt matbutik
på orten. Använd uppgifterna i
tidningsurklippet och kontrollera
om det stämmer.

Rita diagram som visar några
intressanta resultat från den re-
dovisade undersökningen.

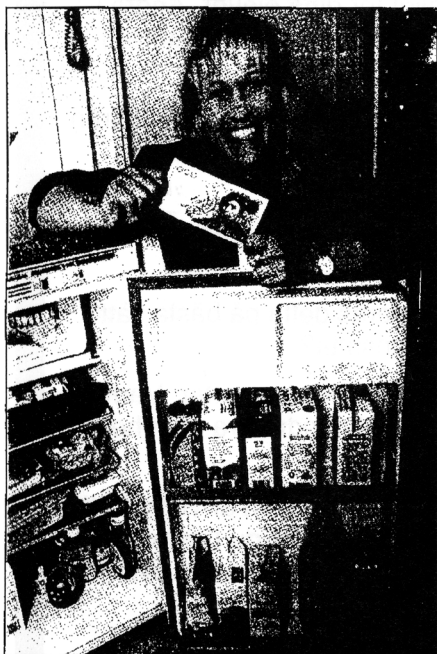
Utifrån informationen som re-
dovisas påstås i artikeln att pris-
skillnaden är störst i Motala. Är
det säkert?

Föreslå minst en alternativ slut-
sats och motivera den med beräk-
ningar eller på annat sätt.

Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta hänsyn till

- hur systematisk du är i din undersökning
- vilka slutsatser du kommer fram till angående de tal du räknar fram
- hur väl du visar att dina slutsatser är riktiga
- vilka samband du kan finna mellan dina upptäckter och de tvåsiffriga tal som du utgår från
- hur väl du redovisar ditt arbete
- hur du genomför dina beräkningar
- hur väl du redovisar ditt arbete och motiverar dina resultat
- hur överskådliga, informativa och tydliga diagrammen är
- vilka alternativa tolkningar du kan göra utifrån undersökningsmaterialet
- hur väl du stöder dina tolkningar med fakta och beräkningar

Handla i rätt butik – tjäna tusen-lappar



Du kan spara åtskilliga tusenlappar på att handla maten där den är billigast. Det visar konsumentverkets färskaste undersökning, där matpriserna i 48 butiker i fem svenska städer jämfördes.

Foto: PETER KNOPP

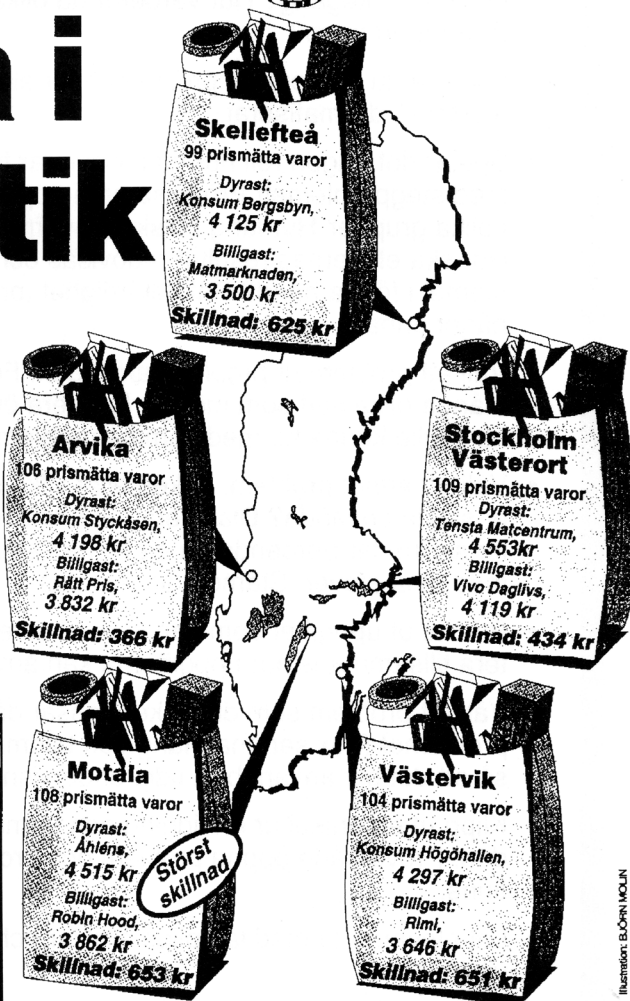


Illustration: B. ÖRN MOUN

Närmare 8 000 kronor om året.

Så mycket kan en familj tjäna på att välja rätt matbutik på orten.

Det visar en färsk undersökning från konsumentverket.

Konsumentverket undersöker regelbundet pris, service och tillgänglighet hos livsmedelsaffärerna i Sverige. I den nya undersökningen har 48 butiker undersökts av gymnasieelever, pensionärer och andra under ledning av den lokala konsumentvägledningen.

Fyra procent dyrare sedan i oktober

Undersökningen har baserats på en matkorg med mat för en tvåbarnsfamilj under en månad. Matpriserna har sedan oktober förra året ökat med i genom-

snitt fyra procent. Då gjorde konsumentverket en motsvarande undersökning på tre orter.

I undersökningen har också priserna jämförts mellan olika butiker på samma ort. De fem städerna som är med i undersökningen är Västervik, Motala, Arvika, Skellefteå och västra Stockholm. Antalet butiker på varje ort har varierat mellan sex och fjorton.

I nästa undersökning hoppas konsumentverket få med ännu fler städer.

Största prisskillnaden mellan de undersökta butikerna fanns i Motala. Bland de åtta undersökta butikerna var Ahléns dyrast och lågprisbutiken Robin Hood billigast. Skillnaden var 653 kronor. Skulle prisskillnaden fortsätta att vara densamma gör det

7 836 kronor på ett år.

I Stockholm Västerort finns flera stormarknader. Men trots att två av dem är med bland de sex undersökta butikerna är de inte billigast. Det är Vivo Daglivs.

Bensinkostnad räknas inte med

Någon hänsyn till att vissa butiker har sämre utbud, sämre service och ligger längre från centrum har konsumentverket inte tagit.

Konsumentverket konstaterar att stormarknaderna i allmänhet är billigast. Att handla i en mindre butik kostar ungefär 200 kronor mer i månaden.

Men då är inte kostnaden för bil och bensin till stormarknaden medräknad.

Annika Creutzar

- Tänker du dig att elevernas lösningar ska se ut på ett visst sätt, följa en viss tankegång? Hur värderar du olika strategier och olika sätt att lösa ett problem?
- Hur ska du presentera problemen för eleverna? Muntligt, skriftligt, med bild, dramatiserat...?
- Spelar det någon roll hur du formulerar frågor på problem? Jämför med stegproblemet! Prova samma uppgift med olika frågeformulering i olika grupper. Hur lång tid ska eleverna få på sig att lösa problemet? Hur ska elevernas resultat redovisas och diskuteras? Vad tränar problemet i första hand? Räknefärdighet, problemlösningsförmåga eller något annat?
- Välj ett problem ur problemsamlingen. Försök att lösa det på så många olika sätt som möjligt. Fundera över vilka svårigheter eleverna skulle kunna ha med samma problem.
- Välj ett annat problem. Vilken eller vilka strategi(er) tror du dina elever skulle använda? Diskutera med dina kollegor. Finns det likheter eller skillnader beroende på elevernas erfarenheter och ålder? Prova med dina elever. Stämde din hypotes?
- Plocka ut uppgifter som kan leda till utveckling av en strategi? Diskutera tillsammans hur uppgifterna kan användas i detta syfte?
- Välj ett problem som du tycker passar dåligt för dina elever. Ändra i problemet (t ex sammanhang och talområde, men inte i strukturen) så att det blir användbart i din undervisning.
- Klipp ut en artikel ur en tidning och formulera ett antal problem utifrån den. Prova både öppna problem och problem där all information finns.
- Låt eleverna ta med lämpliga artiklar och formulera problem som de vill lösa.
- Välj ett problem för grupparbete. Hur organiseras detta på bästa sätt? Hur tycker du att grupperna ska vara sammansatta?
- Ge exempel på problem som fungerat bra som hemuppgifter. Varför var de bra? Vilken typ av problem har fungerat mindre bra som hemuppgift? Varför?
- Frank Lester anger i sin artikel ett antal färdigheter som är viktiga att behärska om man vill bli en god problemlösare. Delar du Lesters uppfattning? Vilka färdigheter är svårast respektive lättast att öva upp?
- Barbara Jaworskis artikel bygger på en konstruktivistisk kunskapsuppfattning. Hur förhåller sig din egen kunskapsuppfattning till den?

Litteratur

- af Ekenstam, A. & Greger, K. (1983). Problemlösningsförmåga hos 12-13-åringar. *Nämnnaren* 9(3), 14-17.
- Allwood, C. M. (1991). Rätt som det är blir det fel. *Nämnnaren* 18(3/4), 38-40.
- Amundsson, J. (1983). Problem genom tiderna. *Nämnnaren* 9(3), Tema Problemlösning, 65-69.
- Andersson, B., Larsson, G. & Nordström, O. (1992). Matematik som vi hittar i Älvdalens skogar. *Nämnnaren* 19(2), 10-14.
- Areskoug, M. (1991). Miljömatematik. *Nämnnaren* 18(1), 32-34.
- Aronsson, R. (1989). Motionsslingan. *Nämnnaren* 16(3), 24-25.
- Blomgren, E-S. (1988). En vagn kommer lastad. *Nämnnaren* 15(4), 31-33.
- Carlsson, C. (1989). Problemlösning med hjälp av dagstidning. *Nämnnaren* 16(4), 40-41.
- Claesson, P. (1994). Matematik som nöje. *Nämnnaren* 21(2), 30-33.
- Danielsson, K. (1991). Vardagslivets problemlösning. *Nämnnaren* 18(1), 10.
- Dahlström, L. & Ryding, R. (1989). Dagstidningar och matematik. *Nämnnaren* 16(1), 8-9.
- Dunkels, A. (1992). Olympiadproblem från Lettland. *Nämnnaren* 19(3), 42-44. Lösningar i *Nämnnaren* 20(1), 41-43.
- Dunkels, A. (1991). Problemlösning på geobräde. *Nämnnaren* 18(3-4), 96-100.
- Emanuelsson, G. & Munther, R. (1983). Samma födelsedag. *Nämnnaren* 9(4), 52-53.
- Emanuelsson, G. (1983). Hur räknar man harar? *Nämnnaren* 9(4), 51.
- Ernestam, A. & Olsson, H. (1989). Tennis och matematik. *Nämnnaren* 16(1), 23-27.
- Fritzén, L. (1993). Matte i miljöundervisningen. *Nämnnaren* 20(1), 32-35.
- Gerdes, P. (1986). Matematik för frigörelse. *Nämnnaren* 12(3), 18-23.
- Gårding, L. (1985). Modeller och verklighet. *Nämnnaren* 11(4), 7-10.
- Hunziker, M. & Öhman, L. (1994). Kan det verkligen bli solrosor av sopor? *Nämnnaren* 21(4), 4-7.
- Hägghmark, P. (1993). Cirkelns kvadratur. *Nämnnaren* 20(4), 48-49.
- Johansson, B. (1991). Problem med problemlösning. *Nämnnaren* 9(3), 22-24.
- Johansson, L-G. (1994). Hundra procent svensk. *Nämnnaren* 21(4), 8-12.
- Johnsson, K., Modin, L. & Stenberg E. (1983). Problemlösning med huvudräkning. *Nämnnaren* 9(3), 44-45.
- Klefsjö, B. (1985). Lagar Findus Sveriges godaste köttbullar? *Nämnnaren* 12(2), 40-43.
- Kvammen, P. I. (1986). Matematikk, natur og samfunn. *Nämnnaren* 12(3), 14-17.
- Laag, P. (1990). Matematiskt rollspel. *Nämnnaren* 17(2), 7-10.
- Larsson, S. (1992). Man lär så länge man har elever. *Nämnnaren* 19(3), 34-35.
- Lennerstad, H. (1995). Om problemlösning och människans osynlighet. *Nämnnaren* 22(1), 42-45.
- Lerman, S. (1989). Att göra matematik. *Nämnnaren* 16(2), 6-12.
- Lester, F. (1988). Teaching mathematical problem solving. *Nämnnaren* 15(3), 32-43.
- Lundberg, B. (1989). Var dags matematik. *Nämnnaren* 16(4), 34-35.
- Lundgren, M. (1990). Barns räknande. *Nämnnaren* 17(1), 37-40.
- Munther, R. (1983). Veckans problem. *Nämnnaren* 9(4), 36-37.
- Möllehed, E. (1989). Problemlösning i ett kalkbrott. *Nämnnaren* 16(2), 34-38.
- Nordell, B. (1994). Att uppskatta myggor. *Nämnnaren* 21(1), 30-31.
- Nämnnaren (1983). Problemlösning. *Nämnnaren* 9(3).
- Nämnnarens matematiktävling. Problemmuppgifter i *Nämnnaren* 20(1), 20(3), 21(1), 21(3), 22(1), 22(3) med lösningar i 20(2), 20(4), 21(2), 21(4), 22(2), 22(4).
- Problemavdelningen. I varje nummer av *Nämnnaren*.
- Reys, B. m fl (1995). Vad är god taluppfattning? *Nämnnaren* 22(2), 23-25, UPPSLAGET, 25-29 och Problemavdelningen 51.
- Reys, B., Reys, R. & Emanuelsson, G. (1995). Meningsfulla tal. *Nämnnaren* 22(4).
- Rosén, I. (1994). Problem med pengar. *Nämnnaren* 21(1), 14-17.
- Silvén, S. (1995a). Hur blev den intelligenta en "dum" elev. *Nämnnaren* 22(3), 16-19.
- Silvén, S. (1995b). Problemlösning för alla – eller för redan duktiga? *Nämnnaren* 22(4), 35-37.
- Sturk, O. (1989). Vi byggde en friggebod. *Nämnnaren* 16(3), 20-22.
- Svanberg, E. (1991). Nämnnarens stipendium. En amaryllis dagbok. *Nämnnaren* 18(3-4), 12-13.
- Trygg, K. (1989). Posten – något att räkna med. *Nämnnaren* 16(1), 17-19.
- Tvete, K. (1987). Geometri – Jordmåling. *Nämnnaren* 14(2), 34-39.
- Ulin, B. (1983). Problemlösning och tänkande. *Nämnnaren* 9(3), Tema Problemlösning, 34-38.
- Unenge, J. (1987). Från tåget i tunneln till bensinen i bilen. *ResursNämnnaren*, 16-18.

- Unenge, J. (1994). Bilder av problemlösning. *Nämnnaren* 21(1), 36-37.
- Widell, E. (1991). Ett problem som introduktion till ekvationssystem. *Nämnnaren* 18(1), 30-31.
- Ahlberg, A. (1991). Att lösa problem i grupp. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 85-99.
- Ahlberg, A. (1995a). *Att möta matematiken i förskolan*. Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Ahlberg, A. (1995b). *Barn och matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- Areskoug, M. (1990). *Miljöräkneboken*. Dalby: Carlstedts förlag AB.
- Blomhøj, M. (1993). Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber. *NOMAD* 1(1), 18-39.
- Bolt, B. (1984). *Boken om aktiviteter i matematik*. Göteborg: Förlagshuset Gothia.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommentarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bidrag till Sveriges matematiklärarförenings sommarkurs i Mullsjö 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red) (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.
- Fritzén, L. & Kleweborn, E. (1991a). *Lilla miljöräkneboken – Sopor*. Dalby: Carlstedts förlag.
- Fritzén, L. & Kleweborn, E. (1991b). *Lilla miljöräkneboken – Trafik*. Dalby: Carlstedts förlag.
- Grevholm, B. (1988). *Utmanningen*. Malmö: Liber.
- Grevholm, B. (1989). *Lilla utmanningen*. Malmö: Liber.
- Grevholm, B. (1991). Problem för lärare. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 141-149.
- Pettersson, A. (1995). *Hur löser elever uppgifter i matematik?* Skolverkets rapport 61. Stockholm: Liber Publikationstjänst.
- SCB (1994a). *Miljösverige*.
- SCB (1994b). *Sverige i siffror*.
- Skoogh, L. & Johansson, H. (1991). Att undervisa i problemlösning. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 113-129.
- Strandberg, L. (1991a). *Problemboken*. Malmö: Liber.
- Strandberg, L. (1991b). Problem på alla nivåer. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 131-140.
- Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Ulin, B. (1991). Att upptäcka samband i matematik. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 33-50.
- Ulin, B. (1993). *Liten guide för matematiska problemlösare*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Vaderlind, P. (1989). *Matematiska tankenöter*. Stockholm: Svenska Dagbladet.
- Wistedt, I. (1991). Om vardagsanknytning av skolmatematiken. I Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red) (1991), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 23-32.
- Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *NOMAD* 1(1), 40-54.
- Bolt, B., & Hobbs, D. (1989). *101 mathematical projects*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *NOMAD* 2(2), 6-35.
- Jacobs, H.R. (1982). *Mathematics, a Human Endeavor*. 2d ed. New York: W.H. Freeman & Co.
- NCTM. Calendar problems *Mathematics Teacher*. Reston, Va.: Author. (I varje nr av denna tidskrift för år 7-12 finns en kalender med ett problem för varje dag i månaden. Lösningar i samma nummer.)
- NCTM. Math by the Month. *Teaching Children Mathematics*. Reston, Va.: Author. (I varje nr av denna tidskrift för förskola till år 6 presenteras aktiviteter för var och en av månadens veckor.)
- NCTM. Menu of problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*. Reston, Va.: Author. (I varje nr finns menu med olika rätter – "appetizers, main courses and desserts". Lösningar i samma nr.)
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Doubleday & Company Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1990). *A source book for college mathematics teaching*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan.
- von Essen, E. & Winther Petersen, A. (1994). *Utraditionelle matematikopgaver*. København: Matematiklærerforeningen.
- Wagner, S. (Ed.) (1993). *Research Ideas for the Classroom: Primary and secondary Mathematics*. Vol 1-3. Reston, Va.: NCTM.
- Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited om Mathematics as a situated practice*. Linköping Studies in Art and Science nr 98. Linköping: University of Linköping.
- Wyndhamn, J. (1994). Om kalenderräkning. Aritmetiken, almanackan och fingrarna som beräkningsverktyg. *NOMAD* 2(3/4), 57-74.

Problemlösningens natur

Frank K Lester

Barn är problemlösare. Vad är det för faktorer som ligger bakom problemlösningens förmåga och hur ser en framgångsrik undervisning om och i problemlösning ut?

Problemlösningens förmåga

Förmågan att lösa problem i matematik utvecklas långsamt under lång tid, eftersom den kräver mycket mer än bara direkta tillämpningar av matematikkunskaper. Problemlösningens förmåga tycks vara en funktion av åtminstone fem, av varandra beroende, kategorier av faktorer:

- (1) kunskaps- och användning
- (2) kontroll
- (3) uppfattningar av matematik
- (4) affekter
- (5) socio-kulturella sammanhang

Kunskaps- och användning

Den övervägande majoriteten av forskning kring matematikundervisning har ägnats åt att studera hur man får kunskaper i matematik och hur de tillämpas. Med kunskaper menas här såväl informella och intuitiva som formella. Till denna kategori hör ett brett spektrum av kunnande som kan stödja den enskilda individens prestationer i matematik.

Denna artikel publicerades första gången på engelska i *Nämnaren* 15(3), 1988. Översättning och bearbetning är gjord av Göran Emanuelsson och Karin Wallby.

Speciellt betydelsefulla typer av kunnande är:

- fakta och definitioner (tex 7 är ett primtal, en kvadrat är en rektangel med fyra lika långa sidor),
- algoritmer (tex kort algoritm för division),
- strategier (rita bilder, söka mönster, arbeta baklänges),
- kännedom om problemtyper

samt mängder av rutinmässiga procedurer som en person kan använda för att lösa en matematikuppgift, tex procedurer för att lösa ekvationer eller generella tekniker för integration.

Särskilt betydelsefullt i detta sammanhang är det sätt på vilket man organiserar, representerar och slutligen använder sin kunskap. Det är ingen tvekan om att många svårigheter med problemlösning kan hänföras till "unstable conceptual systems" (Lesh, 1985). Det innebär att när elever är engagerade i problemlösning är det troligt att åtminstone en del av de matematiska begrepp som är betydelsefulla i sammanhanget fortfarande är under utveckling. I sådana fall måste problemlösaren anpassa sina begrepp så att de passar situationen i problemet. Om man klarar av att göra en sådan anpassning kan man lyckas lösa problemet.

Kontroll

Kontroll avser hur man ordnar och fördelar tillgängliga egna resurser för att på ett lyckosamt sätt kunna hantera matematiska situationer. I synnerhet rör det beslut om hur man planerar, utvärderar och styr sitt tänkande. Två aspekter i denna process har fått ökat intresse inom forskningen de senaste åren: kunskaper om och reglering av kognition (kontroll, styrning av kunskapande). Processer som används för att reglera beteenden kallas ofta metakognitiva och har blivit fokus för mycket uppmärksamhet inom det matematikdidaktiska forskningsfältet. Det finns studier som visar att en betydelsefull skillnad mellan framgångsrika och ej framgångsrika problemlösare är just att de förra är bättre på att kontrollera sina handlingar. Det är fastslaget att brist på kontroll kan ha katastrofala effekter på problemlösningen.

Uppfattningar av matematik

Schoenfeld (1985) definierar "beliefs", eller "belief systems" som är hans term, som en persons matematiksyn, *...the perspective with which one approaches mathematics and mathematical tasks* (s 45). "Belief" bygger upp en persons subjektiva kunskap om sig själv, om matematik, omgivningen och de moment som behandlas i olika matematikuppgifter. Mina kolleger och jag har tex funnit att många skolbarn i tidig ålder tror att alla "lästäl" kan lösas genom att man direkt använder en eller flera aritmetiska operationer och att vilken operation man använder bestäms av nyckelord i texten (Lester & Garofalo, 1982). Det är tydligt att dessa uppfattningar skapar attityder och känslor och styr de beslut som tas under en matematisk aktivitet. I min egen forskning har jag varit särskilt intresserad av elevers uppfattningar om problemlösningens natur och om deras egen kapacitet och begränsning (Lester, Garofalo & Kroll, 1989b).

Affekter

Detta område inkluderar känslor och attityder. Forskningen inom området har ofta varit begränsad till undersökningar av samband mellan attityder och prestationer i matematik. Inte särskilt överraskande har vissa attityder visat sig påverka prestationerna: motivation, intresse, självförtroende, förmåga att stå emot svårigheter, villighet att ta risker, tolerans för osäkerhet och förmåga att inte ge upp.

För att skilja mellan attityder och känslor väljer jag att betrakta attityder som egenskaper hos personen, även kortvariga, medan känslor är situationsspecifika. En person kan ha utvecklat en särskild attityd mot någon aspekt av matematik som påverkar hennes eller hans prestationer (exempelvis kan en elev tycka väldigt illa om problem med procent). Samtidigt kan en särskild matematikuppgift ge upphov till en icke förutsedd känsla (en elev kan bli frustrerad när han märker att han har bara gjort små framsteg i lösning av ett problem trots hårt arbete under lång tid). En persons prestationer i matematik påverkas av en mängd affektiva faktorer, ibland i sådan utstäckning att det kan dominera tänkande och handlingar.

Socio-kulturellt sammanhang

På senare år har det inom den kognitiva psykologin hävdats att mänskligt intellektuellt beteende måste studeras i sin kontext (Neisser, 1976; Norman, 1981). Eftersom människor lever i en verklighet som både påverkar och påverkas av mänskligt beteende är det väsentligt att ta hänsyn till hur socio-kulturella faktorer inverkar på bildandet av kunskap. I synnerhet växer utveckling av, förståelse för och användning av idéer och tekniker i matematik fram i sociala och kulturella situationer. D'Ambrosio (1985) hävdar att barn för med sig *sin egen* matematik till skolan, den matematik de utvecklat i sin egen socio-kulturella omgivning. Denna

matematik, som han kallar etnomatematik, förser individen med en mängd intuition och informella metoder för att kunna handskas med fenomen i matematik. Man behöver inte ens gå utanför skolan för att få belägg för att sociala och kulturella förhållanden påverkar matematikutbildningen. Det samspel som äger rum mellan elever och mellan elever och deras lärare samt de värderingar och förväntningar som uppmuntras i skolan, formar inte bara vilken matematik som lärs in, utan också hur den lärs in och hur den förstås. Det betyder att de socio-kulturella villkor som bygger upp en individs verklighet spelar en betydelsefull roll för individens möjligheter till framgång i matematik, både i och utanför skolan.

De fem kategorierna ovan överlappar varandra. Det är inte möjligt att helt separera affekter, uppfattningar och socio-kulturella sammanhang, och de samspelar på en mängd olika sätt. Uppfattningar av matematik påverkar affekter, båda påverkar kunskapens användning och kontroll och socio-kulturella sammanhang påverkar de andra. Kanske är det så att dessa kategoriers inbördes beroende är orsaken till att problemlösning är så svårt för eleverna.

Att undervisa i problemlösning

För de elever som kämpar för att bli bättre problemlösare förstärks svårigheterna som beror på problemlösningens komplexitet av att de flesta inte får tillräckligt med undervisning, vare sig kvalitativt eller kvantitativt. Eftersom problemlösning är så komplex, är den svår att undervisa om. Olyckligtvis har vi inte några idiotsäkra metoder som är lätta att följa och genomföra, för att hjälpa eleverna att förbättra sitt kunskapsnivå.

Det har forskats mycket kring olika sätt att angripa undervisning i problemlösning. Denna forskning diskuteras inte här, men för den intresserade hänvisas tex till Lester

(1980, 1983), Schoenfeld (1985), Silver (1985) (se även Litteratur, red:s anm).

I nästa avsnitt presenterar jag min analys av vad denna forskning föreslår om undervisning i problemlösning.

Grundläggande principer

I min studie av forskningslitteratur har jag isolerat fyra huvudprinciper som framstår som de viktigaste resultaten:

I Elever måste lösa många problem för att förbättra sin problemlösningss förmåga.

II Problemlösningss förmåga utvecklas långsamt under en lång period.

III Elever måste tro på att deras lärare tycker att problemlösning är betydelsefullt för att de ska ta till sig undervisning.

IV De flesta elever tjänar på systematisk undervisning i problemlösning.

Jag går inte in i detalj på de tre första principerna, förutom att jag vill nämna att även om många faktorer är nödvändiga ingredienser för ett framgångsrikt problemlösningssprogram så är ingen mer betydelsefull än III. Lärare måste visa intresse för problemlösning och genom ord och handling visa på betydelsen av problemlösning i matematik. När lärare tydligt ägnar sig åt att utveckla elevers skicklighet så engagerar sig elever på motsvarande sätt. Försättningen handlar huvudsakligen om punkt IV.

Problemlösningssprogram

De flesta program tycks fungera en kortare tid. För att ett program ska vara framgångsrikt år efter år bör det innehålla följande:

A Lämpligt innehåll

B Undervisningssstrategier

C Riktlinjer för genomförande

A Lämpligt innehåll

Först och främst måste ett bra problemlösningsprogram ha bra innehåll. Det måste ha lämplig svårighetsgrad och inrymma åtminstone tre grundläggande moment för att det ska leda till förbättrade prestationer.

- 1 Återkommande tillfällen att lösa olika slags problem.
- 2 Systematisk undervisning i hur man använder olika strategier.
- 3 Utveckling av särskilda tankeprocesser och färdigheter.

Tyngdpunkten i undervisningen bör ligga på *processproblem*, men vanliga en-steps och fler-steps textproblem kan förekomma. Ett processproblem är ett problem där lösningen inte kan erhållas enbart genom beräkningar. Sådana problem tas med för att visa de processer som utgör en viktig del av tänkandet kring och lösandet av ett *verkligt* problem (dvs en situation där proceduren för att lösa problemet inte är uppenbar). Dessa problemtyper tjänar till att utveckla generella strategier för att förstå, planera och lösa problem samt för att utvärdera försök till lösningar.

Ett skäl till att elever har svårt för problemlösning är att många inte fått lära sig hur man använder speciella problemlösningsstrategier. Många elever får bara undervisning om en strategi – nämligen den att välja en eller flera operationer och sedan göra beräkningarna. Här följer några strategier som bör ingå i undervisningen:

- *välj en eller flera operationer att arbeta med*
- *rita en bild*
- *gör en lista*
- *skriv upp en ekvation*
- *dramatisera situationen*
- *gör en tabell eller ett diagram*

- *gissa och pröva*
- *arbeta baklänges*
- *lös ett enklare problem*
- *använd laborativa material eller modeller*

Undervisning som syftar till utveckling av dessa strategier bör innehålla två faser. Under den första fasen får elever undervisning om hur man kan använda en särskild strategi. Denna fas betonar strategins innebörd och de tekniker som behövs. Sedan eleverna fått strategin klar för sig får de praktisera den genom att lösa problem. Den andra fasen är när man får undervisning i att avgöra när man ska använda strategin. I denna fas får eleven problem att lösa men man talar inte om för dem vilken strategi de ska använda. Bland de strategier de lärt sig får de själva välja den eller de som är lämpliga för det givna problemet. Båda faserna måste ingå i undervisningen.

En person som lär sig att spela ett instrument, tex piano, lär sig inte bara genom att spela av efter noter. Det måste också avsättas mycket tid till övning för att hjälpa henne eller honom att behärska speciella färdigheter och tekniker. Sådana färdigheter, tex fingerövningar, är en väsentlig del för att bli en ansedd pianist. På liknande sätt måste nybörjaren stimuleras att göra mer än bara lösa problem.

Den tredje typen av kunskapande innebär aktiviteter för att utveckla speciellt tänkande och färdigheter. Jag har identifierat åtta tankeprocesser som ingår i problemlösning i matematik, se tabell 1. Ett bra problemlösningsprogram innehåller många aktiviteter som poängterar dessa tankeprocesser och tillhörande färdigheter.

Slutligen, förutom att ge dessa tre komponenter i problemlösningsprogrammet, bör innehållet integreras i hela matematikundervisningen. Tillfällig uppmärksamhet på problemlösning eller inslag av problemlösning är inte nog.

B Undervisningsstrategier

Lärare måste ha en speciell planmässighet för att undervisa om detta innehåll. En lärare som inte är medveten om fruktbara arbetssätt att undervisa kring problemlösning hemfaller ofta åt allmänna förmaningar att ”försöka bättre” när elever behöver hjälp att utveckla sitt tänkande: *Läs problemet en gång till! Använd huvudet! Tänk efter igen!*

Lärarkommentarer som dessa kan få elever att anstränga sig men är till liten hjälp för elever som verkligen behöver stöd. I själva verket kan mycket få elever bli framgångsrika problemlösare utan lärares hjälp. Den enskilda, mest utmanande uppgiften för läraren är att besluta vilken typ av handledning som ska ges och när den ska ges.

Läraren måste spela en aktiv roll i klassrummet, genom att observera, fråga och om nödvändigt ge idéer.

Under mer än 20 år har jag samarbetat med många kolleger för att utveckla en undervisningsstrategi för problemlösning. Denna har testats och visat sig fungera i ett stort antal klassrum i olika skolor i USA (Se Lester 1983; Charles & Lester, 1984 för redogörelser kring resultat och forskning). Dessa aktiviteter kan användas i läroplan undervisning som börjar med helklassdiskussion om problemet, följs av arbete individuellt eller i grupper och slutar med ytterligare en diskussion i helklass kring problemet. En översikt av dessa aktiviteter med syften visas i tabell 2 på nästa sida (Charles & Lester, 1982).

Dessa läraraktiviteter kan inte användas som en formel eller regel som garanterar framgång. Snarare ger de en beskrivning av ett arbetssätt för hur man kan handleda elever på ett systematiskt sätt genom problemlösningssprocessen i syfte att bygga upp självförtroende och kunnande. Alltefter som elever blir skickligare som problemlösare minskar lärarens synliga roll.

Tabell 1

Tankeprocesser i problemlösning

(Charles, Lester & O'Daffer, 1987)

- 1 Förstå/formulera frågan i problemet/situationen.
- 2 Förstå villkoren och variablerna i problemet.
- 3 Välja/finna data som behövs för att lösa problemet.
- 4 Formulera delproblem och välja lämpliga Lösningstrategier.
- 5 Använda Lösningstrategi korrekt och nå delmål.
- 6 Ge svar i termer av de data som ges i problemet.
- 7 Värdera rimligheten i svaret.
- 8 Göra lämpliga generaliseringar.

C Riktlinjer för genomförande

Förutom kunskap om vad och hur man ska undervisa bör läraren fundera igenom hur man hanterar frågor kring:

- 1 Den tid som ägnas problemlösning.
- 2 Olika sätt att gruppera elever vid undervisning. (Att låta elever arbeta i grupper om tre till fyra stycken har visat sig framgångsrikt.)
- 3 Anpassning av undervisningen för högpresterande och lågpresterande i samma klassrum.
- 4 Hur man utvärderar elevers prestationer.
- 5 Hur man skapar och bibehåller ett positivt klassrumsklimat.

I denna sista fråga finns så mycket att säga att det lätt skulle kunna bli ämne för en separat artikel. (Se t ex Charles, Lester & O'Daffer, 1987.)

Tabell 2 Läraraktiviteter vid problemlösning

Läraraktivitet

Avsikt

Lektionssamtal före problemlösningen

- | | |
|--|--|
| <p>1 Läs problemet för klassen eller låt en elev läsa. Diskutera ord och formuleringar efter behov.</p> <p>2 Ställ frågor som är relaterade till förståelsen av problemet. Fokusera på vad det frågas efter och vilka data som behövs för att lösa problemet.</p> <p>3 Låt eleverna föreslå möjliga Lösingsstrategier. Censurera inte och värdera inte idéerna vid det här tillfället. (När eleverna är mer framgångsrika kan denna aktivitet undvaras.)</p> | <p>1 Illustrera betydelsen av att läsa problem noggrant för att förstå bra.</p> <p>2 Betona uppmärksamhet vad gäller betydelsefulla data och förtydliga besvärliga delar av problemet.</p> <p>3 Renodla idéer som gäller möjliga vägar att lösa problemet. Uppmuntra flexibilitet och upptäckande.</p> |
|--|--|

Aktiviteter under elevernas arbete med problemet

- | | |
|--|---|
| <p>4 Studera eleverna medan de löser problemet. Ställ frågor om deras arbete.</p> <p>5 Ge ledtrådar till elever som kört fast eller blivit alltför frustrerade. Ställ frågor som hjälper eleverna att förstå problemet om det behövs.</p> <p>6 Be eleverna kontrollera sitt arbete mot förutsättningarna, när de fått fram ett svar.</p> <p>7 Ge en variant av problemet till elever som är tidigt färdiga med en lösning. (Till alla elever om tiden tillåter).</p> | <p>4 Diagnostisera elevers styrka och svaghet i problemlösning. Utveckla deras förmåga att reflektera kring sitt arbete.</p> <p>5 Hjälpa eleverna att komma över "oöverstigligen" hinder i problemlösningen och undvika negativa attityder. Hjälpa dem lära sig hur man använder speciella strategier.</p> <p>6 Utveckla elevers förmåga att utvärdera sitt arbete.</p> <p>7 Hjälpa elever generalisera sina lösningar.</p> |
|--|---|

Lektionssamtal efter elevernas problemlösning

- | | |
|--|--|
| <p>8 Diskutera elevernas lösningar på problemet. Visa på olika sätt att lösa problemet.</p> <p>9 Jämför det lösta problemet med problem som lösts tidigare. Diskutera Lösingsvarianter.</p> <p>10 Diskutera speciella inslag i problemet sådana som överflödigt eller missledande information.</p> | <p>8 Stödja elevers lärande kring när och hur man använder en särskild strategi. Stimulera till flexibilitet.</p> <p>9 Utveckla överspridning av lärande.</p> <p>10 Hjälpa elever känna igen probleminnehåll som påverkar hur problemen löses.</p> |
|--|--|

Barn är problemlösare

I denna artikel har jag försökt ge några perspektiv kring problemlösningens natur och gett flera förslag på hur man kan lägga upp ett program som har problemlösning som viktigaste del. Ja, problemlösning i matematik är svår för många barn och det är också svårt att undervisa om och i problemlösning. Att hjälpa barn att bli bättre problemlösare är inte bara ett utomordentligt viktigt mål, det är också den mest spännande utmaningen en lärare kan få.

Om jag bara fick ge ett enda råd till en lärare som har tänkt att börja med problemlösning, så skulle det vara: *Kom ihåg att barn är problemlösare av naturen*. Lärarens arbete är att försöka utveckla denna naturliga förmåga så långt det går och att lägga till problemlösningstekniker till den repertoar som barn redan har till sin disposition.

Referenser

- Charles, R., & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What why and how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publ.
- Charles, R. & Lester, F. K. (1984). An evaluation of a process-oriented mathematical problem-solving instructional program in grades five and seven. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, pp. 15-34.
- Charles, R., Lester, F., & O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cobb, P. (1986). Contexts, goals, beliefs, and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6, 2-9.
- D'Ambrosio, U. (1985). *Da realidade a ação: Reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo, Brazil: Summus Editorial.
- Lesh, R. (1985). Conceptual analyses of problem solving performance. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: LEA.
- Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. In R. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston, V. A.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. In R. Lesh (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 229-261). New York: Academic press.
- Lester, F. K. & Garofalo, J. (1982, April). *Meta-cognitive aspects of elementary school students' performance on arithmetic tasks*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York.
- Lester, F. K., & Garofalo, J. & Kroll D. L. (1989). *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes*. Final report to the National Science Foundation of NSF project MDR 85-50346.
- Lester, F. K., & Garofalo, J. & Kroll D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. In D. McLeod (Ed.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. New York: Springer-Verlag.
- Lester, F. (1988). Teaching mathematical problem solving. *Nämnamnaren* 15(3), 32-43.
- Neisser, U. (1976). *Cognition and reality*. San Francisco: Freeman & Co.
- Norman, D. A. (1981). Twelve issues for cognitive science. In D. A. Norman (ed.), *Perspectives in cognitive science*. Norwood: N. J.: Ablex.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Silver, E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, N. J.: LEA

Kan alla elever vara matematiker?

Barbara Jaworski

Artikeln tar upp vad som menas med att vara matematisk. Exempel ges på aktiviteter för att illustrera det matematiska tänkandets natur, hur det uppstår och hur det kan stimuleras och stödjas i klassrummet.

Jag ska börja med att besvara rubrikens fråga med ja, utan tvekan. Ditt svar kan naturligtvis vara annorlunda. Min filosofi, som får mig att svara ja utan tvekan, måste acceptera att du kanske svarar nej. Avsikten med denna artikeln är därför att förklara något av min filosofi, som säger att alla elever *kan* vara matematiker.

Vad innebär det att vara matematiker?

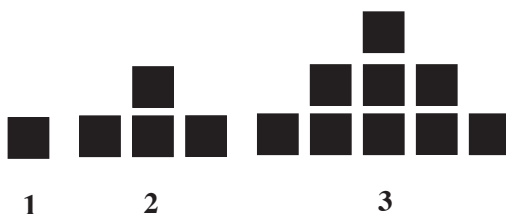
Fundera en stund över hur du skulle vilja svara innan du läser vidare.

Ett samtal

Jag intervjuade ett antal deltagare i en kurs för blivande lärare. Vi satt runt ett bord och jag gav dem en följd av tre ”modeller” byggda av små färgade kuber. Jag kallade dem nr 1, nr 2 och nr 3. Kuberna placerades som i figur 1.

Jag bad dem att göra var sin modell nr 4. Överraskande nog, eller det kanske det inte var, byggde alla som i nästa figur 2. Jag bad dem att i tur och ordning berätta

Denna artikel publicerades första gången på engelska i *Nämnan* 19(2), 1992. Det här är en bearbetad översättning av Göran Emanuelsson och Karin Wallby.



Figur 1



4

Figur 2

hur de hade tänkt sig nr 4 i sekvensen: Här är några svar:

En sa att han märkte att bottenraderna ökade som 1, 3, 5, ... och så gjorde han en modell med 7 i bottenraden.

En annan hade lagt en kloss i varje ända av varje rad och så en högst upp.

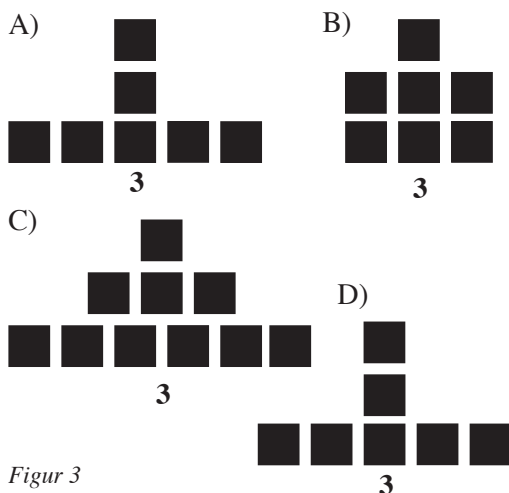
En hade räknat kuber i raderna. I modell 3 var det 5, 3, 1, så i modell 4 borde det vara 7, 5, 3, 1.

En fjärde hade räknat totala antalet kuber i varje modell och fått det till 1, 4 och 9. Sedan drog hon slutsatsen att det var kvadrattal och ”bara byggde upp det”.

Två saker slog mig: För det första att det var väldigt olika idéer som ledde till liknande modeller och för det andra hur diskussionen som följde, i vilken studenterna kommenterade varandras tankar, breddade deras egna perspektiv genom att de fick ta del av varandras idéer. En av eleverna sa: "Innan Kate nämnde kvadrater hade jag inte alls tänkt på den aspekten."

Jag utvidgade därefter övningen genom att ta bort min tredje modell i figur 1 och säga:

Jag stannar nu efter nr 2 och ber er konstruera nr 3. Men jag vill att ni gör den på ett annat sätt än den jag hade.



Figur 3

Även denna gång bad jag dem att förklara sitt tänkande.

Elev A sa att han la till en kub i varje riktning (på modell 2 i figur 1).

Elev B sa att hon kunde se möjligheten till en aritmetisk följd genom att lägga till tre varje gång.

Elev C sa att han såg det öka som Pascals triangel. När jag frågade vad han menade med det, visade han på 1, 3, 6 och sa att nästa bottenrad skulle ha 10 kuber.

Elev D sa att i nr 2 la man till en i varje riktning (till ursprungskuben) så nr 3 fick man genom att lägga till 2 i varje riktning (till ursprungskuben).

Återigen blev det diskussion mellan studenterna där de utbytte idéer och kommenterade varandras modeller. Kommentarer som "Åh, ja, det hade jag inte tänkt på" dök upp flera gånger. Jag slogs återigen av två saker. Det första var att olika matematiska begrepp dök upp – sådana som aritmetiska följder, kvadrater, Pascals triangel. Det är förvånande vilka matematiska aspekter som kan aktualiseras även i en sådan enkel uppgift. Det andra gav mig en nyttig erfarenhet. Jag kunde inte förstå vad den tredje eleven menade med att jämföra sin modell med Pascals triangel. Efter att ha bett om en förklaring trodde jag eleven tänkte på triangeltal. Jag trodde att han hade misstagit sig beträffande Pascals triangel, även om jag inte sa det till honom. Efteråt kände jag emellertid att jag hade dragit den slutsatsen utan särskilt starkt underlag. Hur kunde jag vara säker på vilka relationer han såg? Han kunde t ex ha tänkt på en speciell diagonal i Pascals triangel. Hur skulle jag hanterat detta, om jag varit lärare?

Min avsikt med aktiviteten var att skapa en trygg miljö där studenterna skulle kunna bli engagerade och förhoppningsvis kunna tala om matematik, lärande och undervisning. Genom att lyssna och engagera mig i deras samtal, fick jag en aning om deras tänkande och deras möjligheter att arbeta med barn och matematik. Mitt syfte med anekdoten är att introducera mina två teman:

Vad innebär det att vara matematisk? Hur kan möjligheter till samtal främja att vara matematisk?

Jag vill påstå att denna möjlighet till samtal erbjuds i *the mathematical community* och att vara matematiker innefattar att vara matematisk i en matematisk miljö.

Att vara matematisk

Modellerna som jag berättat om ovan var inte matematiska i sig själva. De var bara arrangemang av klossar. Sammanhanget i

vilket de presenterades kan däremot ses som matematiskt. Eftersom deltagarna i aktiviteten tänkt ägna sig åt matematikundervisning, är det troligt att de hade matematik i tankarna. Jag påstår ändå att den matematik som blev resultatet av aktiviteten var en produkt av människors tankar, snarare än av något inneboende i uppgiften – att konstruera modeller. De matematiska tolkningarna som gjordes varierande från en deltagare till en annan och förändrades efter de påföljande diskussionerna. David Wheeler (1982) talar om "the process by which mathematics is brought into being", och kallar det *mathematization*, (i det följande använder vi termen matematisering, red:s anm)

Fastän matematisering måste förutsättas ske vid varje tillfälle då man utövar matematik eller tänker matematiskt, kan man lättast upptäcka det i situationer där något som inte uppenbart är matematiskt förvandlas till något som högst uppenbart är det. Vi kan tänka på ett litet barn som leker med klossar och använder dem för att uttrycka sin medvetenhet om symmetri; på ett äldre barn som experimenterar med ett geobräde och blir intresserad av sambanden mellan trianglarnas areor; en vuxen som betraktar en byggnad under uppbyggnad och ställer sig frågor om design etc.

Tecken på organisation, mönsterbildning, ytterligare strukturering av en situation visar att matematisering har ägt rum. Studenterna i samtalet matematiserade situationen med modellerna när de utifrån det enskilda fallet upptäckte mönster och därefter på något sätt generaliserade utifrån vad de kunde se. De refererade då till områden i matematik som de var bekanta med. Exempelvis kunde en students kännedom om kvadrattal göra det möjligt att beskriva mönstret de såg, och att förutsäga utseendet på nästa modell. Processen att upptäcka mönster i speciella fall och försöka uttrycka någon form av generalisering, är ett led i en utveckling, och den kan ses som fundamental när det gäller att vara matematisk.

En matematisk miljö

Det är enligt min mening ofrånkomligt att olika individers matematisering av en situation kan se olika ut (jfr ovan). Det har emellertid i utvecklingen av matematiska idéer genom tiderna funnits en stor enighet när det gäller matematiseringar. Exempelvis är man överens om att en triangels area på en plan yta är hälften av produkten av dess bas och dess höjd. Stora ansträngningar har gjorts för att kommunicera matematiska idéer, och för att jämföra olika sätt att se på matematik i skilda grupper och kulturer för att nå fram till en gemensam grund. I situationen som beskrivs i anekdoten hade eleverna individuella uppfattningar, men dessa utvecklades och förfinades under diskussionen. Det är troligt att några gemensamma uppfattningar i gruppen uppnåddes i termer av modellernas matematisering. En sådan grupp som bidrar till att matematiska idéer kan växa och delas skulle kunna kallas för en *mathematical community*. (I forts. används termen matematisk miljö, red:s anm.) Jag har lånat termen från en antologi utgiven av matematikdidaktiker i USA (Davis et al, 1990). Författarna har undersökt samband mellan uppfattningar av matematik och klassrumsundervisning, med anledning av dåliga matematikresultat hos amerikanska 17-åringar. Trots skillnader i åsikter och inriktning hos författarna, betonar de alla hur viktigt det är med matematisk aktivitet i en matematisk miljö.

En matematisk miljö kan vara en grupp människor som delar med sig av och samtalat om sitt tänkande i matematik. Det kan vara en samling matematiker världen över eller det kan ses lokalt, exempelvis gruppen människor som beskrivs i samtalet. Det kan vara elever och lärare som är inriktade på att vara matematiska tillsammans. En matematisk miljö har många funktioner, som att ge stöd för deltagarnas tänkande och att fungera som forum för ömsesidigt utbyte och kritisk granskning av idéer.

Att vara matematisk i en matematisk miljö

Jag ger nu några exempel för att illustrera vad jag menar med ”att vara matematisk i en matematisk miljö” i klassrummet.

Tal och räkning

Mitt första exempel kommer från en videoinspelning med en klass med 6- och 7-åringar. (Open University, 1992). Lektionen börjar med att eleverna sitter på golvet runt läraren vid skrivtavlan. Uppgiften som eleverna får är att välja ett tal, därefter först göra det större och sedan åtminstone tre saker med det för att komma till noll. En flicka, Donna, erbjuder sig att börja med 10 och ”få upp det till 20”. När hon blir tillfrågad av läraren hur hon ska göra det säger hon: ”lägg till 10”. För att komma tillbaka till noll, säger hon sedan: ”ta bort 10 och två femmor”. Läraren skriver på tavlan:

$$10 + 10 \rightarrow 20 \\ - 10 - 5 - 5$$

och frågar sedan: ”skulle det fungera?” De flesta eleverna nickar bifall. Andra kommer med olika förslag, där de använder både addition och subtraktion. Sedan frågar läraren vad de kan göra mer för att göra ett tal större. Någon föreslår att de ska multiplicera och läraren ber om ett exempel. Detta tycks bereda svårigheter, då det inte finns några frivilliga. Då föreslår en flicka:

Ja, vad jag skulle göra är att ta mina 80, sedan skulle jag fortsätta att lägga till 10 åtta gånger och då skulle det troligtvis bli 160.

Donna föreslår en variant på detta:

Om man lägger ihop 8 och 8 blir det 16, med 80 och 80 är det tiotal och inte ental. Om man har 80 och sedan 80 till, tar man bort två, nej man tar bort de 20 och lägger till de till 80 som då blir 100. Sen skulle 60 till bli 160.

Ett ytterligare exempel är $101 + 103 = 204$, och för att sedan komma tillbaka till noll, $-100, -100, -4$.

Ett annat, som verkar liknande till en början men som har en knorr på slutet är $200 + 201 = 401$, och för att sedan komma tillbaka till noll $-200, -200, -3, +2$!

Slutligen ber läraren eleverna att arbeta tillsammans för att med hjälp av miniräknare hitta fler exempel.

Jag anser att eleverna här var tydligt matematiska. Var och en matematiserade situationen som deras lärare beskrev. Genom att hitta på egna tal blev de engagerade och kunde förklara situationen med egna ord. De gav förslag på serier som jag inte hade kunnat förutspå, och de förvånade mig när det gällde storleken på talen de använde och val av beräkningsstrategier. De visade förståelse och medvetenhet om tal och talhantering. Den matematiska miljön var stödjande, uppmuntrande och upplysande. Den som var osäker kunde lyssna på andra och få en idé, som sedan i sin tur genererade idéer hos andra. Läraren fick en uppfattning om elevernas sätt att tänka och kunde se elevernas styrka och svagheter. Ibland blev hon förvånad över deras uppfinningsförmåga och hade verkligen anledning att visa respekt för deras bidrag och berömma deras ansträngningar. I grupparbetet som följde på klassintroduktionen kunde hon följa upp enskilda elever och förstärka och utveckla deras arbete. Elever med svårigheter kunde få idéer och självförtroende att delta, och det fanns tecken som visade på deras växande matematiska medvetenhet.

Pythagoras' sats

Det andra exemplet kommer från min egen undersökning (Jaworski, 1994). En lärare, Mike, ger sin klass (28 st 13-14-åringar) en tvådelad uppgift som ska lösas i grupper om fyra. Ett par i varje fyragrupp får ta en del av uppgiften, och det andra paret den andra

delen. Uppgifterna som delas ut till eleverna ser ut som i figuren till höger.

Före lektionen berättar Mike för mig att han hoppas att en ”korsbefruktning” ska äga rum mellan de två paren i grupperna, så att eleverna kanske kan börja få en aning om sambandet mellan de båda uppgifterna. Han hoppas sedan kunna bygga vidare på deras ökade insikt för att introducera Pythagoras sats.

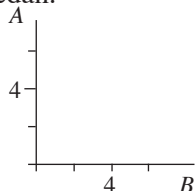
Jag ska nu beskriva det tänkande som uppstod, med hjälp av två utdrag av lektionen. I det första har tre pojkar arbetat med uppgiften med sidornas längd ett tag när läraren ansluter sig. Richard, förklarar vad de gjort.

Arbeta tillsammans

Mike: Ni tre, vad gör ni för något?

Rich: Ja hm, vi sysslar med – hm, triangelproblemet. Och vi tänker att vi (ohörbart) söker ett mönster, Robert gör ett till fem, jag gör fem till tio och Wayne gör tio till femton. Ett och ett, två och två, tre och tre, – sedan ska vi rita ett diagram, och se om vi kan upptäcka något mönster i det.

Mike: Ni har inte några trianglar – spelar det någon roll? De hade ritat figurer enligt nedan.



Figur 4

Rich: Oh, vi mäter härifrån och dit [från A till B, min kommentar]

Pojkarna har bestämt hur de ska angripa uppgiften och delar upp arbetet. Richards beskrivning visar på hög medvetenhet om matematiskt arbete – undersöka särskilda fall, rita diagram, söka efter mönster – vilket han uttrycker med stor förtrogenhet.

En annan pojke, Phil, ger sig i kast med den andra uppgiften. Läraren lägger märke till att Phil finner uttryck för 25 och 29

Kvadratsummor

$$1^2 + 2^2 = 5$$

Undersök vilka andra tal som kan fås som summan av två kvadrater.

Triangelsidors längd

Rita en rätvinklig triangel.
Mät alla tre sidorna noggrant.
Kan du hitta något samband mellan de tre längderna?

$3^2 + 4^2 = 25$; $2^2 + 5^2 = 29$, och frågar honom om talen mellan dessa två kan fås som summor av kvadrater. Efter en stund kommer läraren tillbaka till Phil som livligt hänvisar till sitt fortsatta arbete.

Att få 27

Phil: Jag har 26, och jag arbetar med – att få 27, måste jag försöka komma till det närmsta talet – för att få summan – jag måste använda något som 1,5, för om jag försöker med två, så blir det fyra, om jag försöker att använda två i kvadrat plus fem i kvadrat, blir det 29, så jag måste – tydligen dela dem, ja dela dem. (Mike ”Riktigt”) Jag ska försöka att behålla femman och använda 1,5 i kvadrat.

Mike: Det var en bra idé. Så du ska försöka komma till 27. Är det 27 som du arbetar med?

Phil: Ja

Mike: Bra

Phil: Om jag inte kan göra det, tar jag 4,5, jag kommer inte att ta fem och en halv, jag kommer att ta fyra och en halv och använda två här.

Lärarens inpass verkar få Phil att gå från att tänka bara på kvadrater på hela tal till att granska tal i decimalform. I själva verket ser det ut som om hans sätt att tänka går från att kvadrera och därefter summera till den omvända processen. Senare leder samtalet till kvadratrötter. Detta är möjligt tack vare

Phils matematiska undersökningar och diskussionen med läraren. En matematisk miljö möjliggör en utveckling av eleven och en diskussion mellan lärare och elev. Läraren kan dra fördel av elevens tydliga engagemang och entusiasm för att leda honom mot en modell som han bedömer lämplig och som passar elevens tänkande.

Läraren är mycket nöjd med resultatet av lektionerna som baseras på de två uppgifterna. Det är inte så att elever plikttröget har lytt varje instruktion, eller att de har följt alla instruktioner typ "undersök". I en grupp vill eleverna inte dela upp sig i två par. Alla arbetar med bara en uppgift. I en annan är två flickor förbryllade över uppgiften med kvadratsummorna. De säger, ganska skeptiskt, till läraren, "Ska vi bara lägga ihop en massa kvadrattal?" En grupp blir mycket frustrerad för att den inte kan finna något mönster. En flicka i gruppen hävdar att läraren har "en formel i huvudet, som vi inte kan hitta." Läraren får ta itu med dessa och andra situationer som han inte direkt har tänkt sig. Han känner ändå att han har nått sitt huvudmål, som är att få eleverna engagerade och få dem att prata om idéer relaterad till Pythagoras sats. Hans svar och inlägg uppmuntrar huvudsakligen elevernas egna undersökningar, men han är inte ovillig att själv bidra i diskussionen när han bedömer det lämpligt.

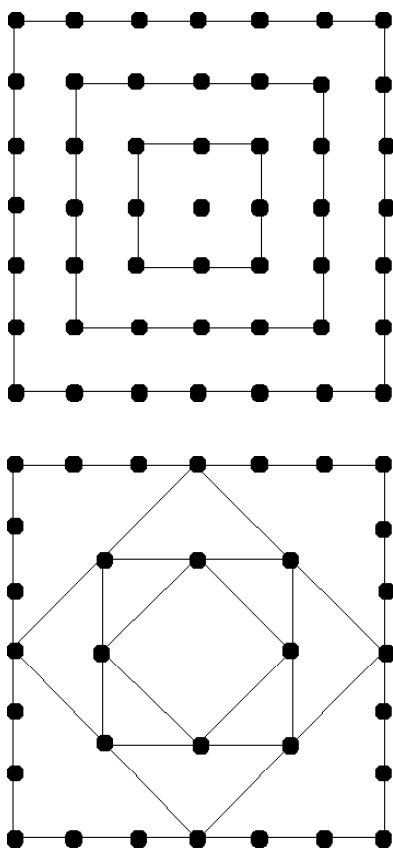
Jag blev gripen av stämningen i klassrummet där elever och lärare arbetade och talade om matematik tillsammans i en atmosfär av vänlig respekt.

Area eller omkrets

Mitt tredje exempel är från det videomaterial som nämndes förut från Open University. Det är en liten grupp elever åldern i 16-17 år som tillsammans med en lärare arbetar med en uppgift att skapa mönster med kvadrater inuti kvadrater. Den lilla gruppens samarbete visar mycket av den stämning som jag har beskrivit i det andra exemplet ovan.

I början av avsnittet säger läraren till de fyra pojkarna i gruppen, "Ni har beskrivit *den där* i ord; Så kan ni beskriva *den här* i ord?" Medan han pekade på två diagram liknande de som visas nedan, börjar en pojke berätta, en annan kommer med en annorlunda beskrivning och sedan är också läraren med i diskussionen. Alla ger olika förklaringar till samma diagram. En av pojkarna verkar inte delta. Han är upptagen med att skriva i sin egen bok. Emellertid lutar han sig plötligt fram och bidrar till diskussionen. Sedan återgår han till sin bok igen.

Samtalet övergår till att söka efter formuler. En pojke, Mark, skriver något medan de andra tittar på. Han avslutar med orden, "Nej, det är strunt!" Då ingriper läraren,



Figur 5

”Nej, ge inte upp. *Varför* är det strunt? Bara för att du började på någonting ...”

I slutet av denna sekvens betonar läraren några aspekter av vad pojkarna har sagt, vilket leder till att en av dem säger, ”Oh, det är *inte* area, det är *omkrets*” och de andras beteende tyder på att detta är ett viktigt avslöjande.

Läraren spelar två roller i sin interaktion med gruppen. En är att stödja aktiviteten: uppmuntra pojkarna att beskriva vad de ser, som i den inledande instruktionen; att sitta ner och lyssna medan de diskuterar mönstren och letar efter en formel, således visa respekt för deras idéer; bemöta ordet ”strunt”, kanske uppmuntra pojkarna att inte avfärda sitt eget tänkande. Hans andra roll är att lyfta fram matematiken, uttrycka sin egen uppfattning, ställa frågor, betona synpunkter hos pojkarnas matematik och slutligen visa på något av vad de sagt för att belysa deras troliga oklarhet beträffande area och omkrets.

Den matematiska miljön har ett mycket öppet klimat. Alla pojkar deltar. Yttranden från en påverkar en annan. Tillsammans bygger de ett resonemang. En pojke kan sköta sitt eget arbete varvat med synpunkter till gruppen. Läraren deltar eller är tyst beroende på hur han bedömer situationen.

Den matematik som behandlas är intressant. På en nivå kan det se ut som elever som kämpar med tämligen enkla begrepp, area och omkrets. På en annan nivå handlar det om att brottas med komplicerade generaliseringar, som råkar innefatta area och omkrets.

Läraren blir uppmuntrad på två plan

- att elevers förståelse av area och omkrets utvecklas genom undersökningen,
- att elever blir skickliga på ganska sofistikerade matematiska uttryck, som kan bli användbara i samband med andra begrepp.

Derivata

Mitt fjärde och sista exempel behandlar en händelse från mitt eget arbete som matematiklärare. Jag har arbetat med derivata med mina 16-17-åringar. Jag är nöjd med deras färdigheter att derivata ganska invecklade funktioner. Då, i slutet av en lektion säger plötsligt Sara: ”Vad innebär det att derivata? Jag kan göra det. Men, vad är det?”

Jag känner hur min mun öppnas för att börja förklara, när jag plötsligt får syn på Tony som sitter bak i klassrummet och ser självbelåten ut, som om han vill säga, ”Jag vet allt om det här. Vilken dum fråga!” Så istället för att själv ge en förklaring, ber jag Tony göra det.

Han börjar säkert, men tvekar snart och trevar sig fram. Andra elever lägger sig i. Man ställer frågor och eleverna försöker själva besvara dem. Jag minns inte mycket av mina egna bidrag, bara att det är en av de bästa klassdiskussioner i matematik som vi någonsin haft. Sara verkar mycket gladare i slutet av den, men det är Tony som definitivt övertygar mig om värdet av denna händelse. Han dröjer sig kvar tills de andra har gått och säger, ”Du ska veta att det här var verkligen bra. Jag trodde att jag visste vad derivering var men jag kunde inte direkt förklara det. Nu tror jag att jag kan.”

Det jag lärde mig av detta är hur viktigt det är att få elever att uttrycka vad de tror att de vet och gruppens betydelse som både en lyssnande och en svarande församling. Att kunna derivata är värdefullt för att eleverna ska bli säkra på och trygga med tekniken, men diskussionen var ett effektivt bidrag till förståelsen av begreppet.

Ett teoretiskt perspektiv

Att vara matematisk i en matematisk miljö är inte självklart i något klassrum. Jag har varit i många där man förmodligen ägnar sig åt matematik, men där eleverna inte visar

några tecken på att *vara matematiska*, tex var det möjligt för mina elever att derivera på ett fullständigt mekaniskt sätt som bara krävde lite matematisering. De kunde helt enkelt följa en uppsättning regler. Det finns många klassrum som inte på något sätt kan anses bjuda en *matematisk miljö*. Klassrum där det visas liten respekt för enskilda uppfattningar eller idéer; där matematiken är rutinmässig, med litet utrymme för kreativitet; där det krävs av eleverna att de mestadels arbetar tyst med litet utrymme för matematisk kommunikation. Jag vet från min egen undervisningserfarenhet, och från min klassrumsforskning, att lärare måste arbeta hårt för att skapa ett livskraftigt klassrumsklimat.

Jag är övertygad om att en lärares personliga matematikfilosofi är det som främst påverkar stämningen i klassrummet. Jag blir dessutom med åren mer och mer övertygad om att den speciella filosofi som kallas *konstruktivism* eller ibland *social konstruktivism*, är mycket ändamålsenlig för att skapa möjligheter till att kunna vara matematisk i en matematisk miljö.

Mycket kortfattat kan man säga att konstruktivism bygger på en övertygelse att kunskap skapas av individen, den finns inte färdig någonstans i väntan på att bli upptäckt. Det jag kan är ett resultat av mina egna erfarenheter, av de tolkningar jag gör av vad jag varit med om. Jag modifierar det jag vet som ett resultat av nya erfarenheter. När jag ser, hör, känner eller läser någonting nytt, måste jag få det att passa med mina tidigare kunskaper. Som ett resultat av detta kan det jag tidigare betraktat som sanningen ändras. Min kunskap kan också vara väldigt annorlunda jämfört med en annan människas. När människor talar med varandra delar de med sig av sina föreställningar och uppfattningar och kommer överens om innebörden. Som ett resultat av detta kan de komma fram till gemensamma uppfattningar. Historiskt sett skulle utvecklingen av matematisk kunskap kunna betraktas på det sättet.

En betydelsefull konsekvens av en konstruktivistisk syn är att man inte kan säga någonting till någon annan och förvänta sig att denna ska förstå det precis på det sätt man avser. Du skapar dig en förståelse av vad du läser här. Jag kan inte förutsätta att det du uppfattar har någon bärande relation till vad jag avsett med orden jag skrivit. För att uttrycka sig i klassrumstermer, bara för jag har sagt något klart och tydligt till en elev, kan jag inte vara säker på att eleven har uppfattat det just så som jag hade för avsikt. Elevens fokus kan vara på något helt annat. Det jag säger kan passa till elevens erfarenheter på ett helt annat sätt än jag tänkt. Faktum är att varje försök att förmedla kunskap riskerar att misslyckas. Jag måste därför hitta olika sätt att få insyn i de uppfattningar som eleverna har av det jag presenterar, eller de tolkningar de gör utifrån de uppgifter de fått att lösa.

Jag kan inte här gå in på alla konsekvenser av konstruktivistisk filosofi, men jag föreslår gärna fortsatt läsning om någon skulle vilja kontakta mig. Jag ska dock här presentera en redogörelse som gjordes av en av lärarna som jag studerade, en redogörelse som fick mig att dra slutsatsen att han arbetade utifrån en konstruktivistisk syn:

Jag upplever att det i mitt huvud finns ett matematiksystem. Jag vet inte hur det ser ut men det finns där. Och när jag lär mig något nytt i matematik så måste jag hitta en plats där det passar. Det passar inte nödvändigtvis in bara på ett ställe, det kan faktiskt likaväl förena flera ställen. När jag delar med mig av mina tankar är det väldigt svårt för jag kan egentligen inte dela med mig av min matematiska modell, eller vad man ska kalla den, för den är så speciell för mig. Den är speciell för mig p g a mina erfarenheter. Så jag antar att jag inte är någon "kunskapsgivare", för jag vill låta människor passa in sina kunskaper i sina modeller för bara då blir det förståeligt för dem. Det är kanske därför som om man exempelvis säger till någon "Sannolikhet är enkelt, det är bara

detta över detta" så blir det inte säkert meningsfullt, för det finns ingen plats där det passar in. Det är det jag känner att undervisning många gånger handlar om, eller hur? Att ge kunskap, att dela med sig av sin kunskap till andra, vilket är omöjligt.

Sammanfattning. Att vara matematiker

Jag har gett en bild av att vara matematiker, att vara matematisk i en matematisk miljö. Jag påstår att detta att vara matematisk handlar om människor som matematiserar situationer. Den matematiska miljön erbjuder en omgivning i vilken matematiska tankar kan födas och testas på andra. Detta kanske måste tolkas i vid mening för att tillåta individuellt arbete och tänkande. Det skulle vara dumt att bortse från att människor ofta utför matematiskt arbete på egen hand. Emellertid är denna ensamhet i bästa fall relativ, eftersom man oundvikligen använder resultat hämtade från andras arbete och de resultat som erhålls måste prövas av andra för trovärdighetens skull.

Uttryckt på detta sätt, tror jag att alla elever, oberoende av ålder och förmåga, kan vare matematiker eftersom det är möjligt för alla elever att vara matematiska i en miljö som stödjer och uppmuntrar dem.

För att klassrummet ska kunna vara en matematisk miljö måste läraren uppenbarligen skapa ett klimat där verksamhet och samtal i matematik kan äga rum och där alla personers tankar respekteras. Detta innebär att läraren får skapa aktiviteter som uppmuntrar elevernas egen matematisering och uttryck för denna, att hon får lyssna på och svara eleverna på ett sätt som gör att de kan nå målen för lektionen.

Den matematiska miljön har, när den väl är upprättad, många fördelar för både lärare och elever. I den kan elever få uppmuntran och möjlighet att testa sina idéer. De kan få nya tankar och perspektiv och undvika ett alltför begränsat tänkande och de kan få stöd för sitt fortsatta arbete. Läraren kan komma tillrätta med svårigheter att få tiden att räcka till för trettio elever genom att handleda grupper och lyssna på deras samtal. Hon kan ge uppmärksamhet där den behövs mest, då hon litar på att de andra eleverna kommer att fortsätta att arbeta tillsammans och hjälpa varandra.

Det har påståtts att det är mycket svårt att lära sig matematik (DES 1982, p 67). Jag tror inte att detta nödvändigtvis är sant. Men, jag är helt säker på att det är svårt att undervisa i matematik. Det är svårt därför att vi inte kan se ett barns tankar och få veta vilken uppfattning hon bildar sig av det vi erbjuder. Vi måste därför skaffa möjligheter att få tillgång till hennes tänkande och vi måste mycket noggrant granska våra elevers arbete. Vilka bevis har vi för de bedömningar vi gör? Hur kan vi utvärdera effektiviteten av vårt eget samarbete med eleverna? Hur kan vi bli bättre lärare?

Referenser

- Davis, R.B., Maher, C.A., and Noddings, N. (Eds.) (1990). Constructivist views on the learning and teaching of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph number 4*. Reston, VA.: NCTM.
- DES (1982). *Mathematics Counts*. (The Cockcroft Report) London: HMSO.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. London: Falmer Press.
- Open University (1992). *Learning and Teaching Mathematics*, EM236.
- Wheeler, D. (1982). 'Mathematization matters', *For the Learning of Mathematics*, 3(1), 45-47.

4

Ett kulturarv

Det historiska perspektivet ska finnas med i alla ämnen. I matematik finns det intressanta infallsvinklar både i historiens matematik och matematikens historia.

Mikael Homblqvist berättar om historisk problemlösning och Frank Swetz skriver om meningsskapande underlag för undervisning kring historiens matematik.

Genom ett historiskt perspektiv kan eleverna utveckla en beredskap inför framtiden och utveckla sin förmåga till dynamiskt tänkande.

Lpo 94

I vår undervisning ska vi sträva efter att eleven
inser att matematiken har spelat och spelar en viktig roll i olika kulturer och verksamheter och får kännedom om historiska sammanhang, där viktiga begrepp och metoder inom matematiken utvecklats och använts,

Kursplan i matematik

Talsystem från olika kulturer

När eleverna arbetar med hur människorna levde under olika kulturer är det naturligt att matematikämnet integreras med andra ämnen som historia, geografi och religionskunskap. Den historiska matematiken blir intressantare ju mer människorna blir levandegjorda och ju utförligare deras levnadsförhållanden skildras. Kanske kan klassen "förflyttas" till den tid och den kultur som behandlas. Låt dem bli babylonier, egyptier osv. Skapa tillsammans med hjälp av både fakta och fantasi en berättelse som får utgöra bakgrund till de aktiviteter som ni sedan utför.

Övningarna kan uppfattas som förfälskningar och förändringar av historiska fakta; tandpetare istället för bambustavar, vanligt papper istället för papyrus, naturformade stenar istället för stenpelare, tusch istället för inristningar.

Beskrivningarna av följande aktiviteter är utförliga, vilket vi hoppas inte hindrar dig från att förändra dem så att de passar dig och din klass. Se dem endast som förslag på hur man kan arbeta med historisk matematik, där bilder kan användas som en av flera uttrycksformer. Deras lertavlor, papyrusrullar och arbeten beskriver då något som passar in på de förhållanden som gällde under aktuell tidsepok.

Ett annat alternativ är att använda deras skrift och tal för att beskriva situationer i nutiden och vårt moderna samhälle. Om vi hade använt oss av babYLONIERNAS talsystem hade mitt telefonnummer sett ut så här...

Talsystemens uppbyggnad

Denna övning kan användas för introduktion av olika kulturers talsystem. Om numrerade lappar sätts upp i ordningsföljd och varje talsystem representeras i egen färg bildas en översikt, där olika talsystems tecken kan jämföras med varandra.

Babylon	1 	2 	3 	4 
Egypten	1 	2 	3 	4 
Kina	1 	2 	3 	4 
Maya	1 	2 	3 	4 

43



162



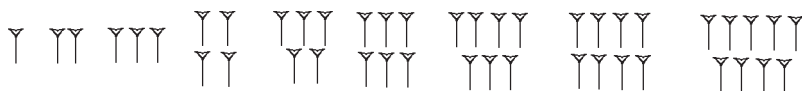
Man behöver färgat papper och färgpennor. Vik varje papper på mitten. Numrera varje lapp på övre halvan. Eleverna ritar sina tal på den nedre halvan med färgpennor. När det gäller det kinesiska talsystemet kan tandpetare användas.

En annan uppgift är att föreslå eleverna att teckna ett eget valfritt tal i talsystemet och sedan ange med våra vanliga siffror det tal som avses.

Det babyloniska talsystemet

Babylonierna skrev med kilskrift på lertavlor, som sedan soltorkades eller brändes. Lertavlorna var ofta ca 5-10 cm höga, men kunde också vara betydligt större beroende på textens längd. Benämningen ”kilskrift” kommer av att tecknen som trycktes in i leran var kilformade. Kilskrift användes i Främre Orienten ca 3 200 f. Kr-75 e. Kr. Detta talsystem var utvecklat redan ca 2 000 f. Kr.

Tecknen för 1-9:



Vid 10 utfördes en växling till 𐎵

Endast två tecken användes (𐎶 och 𐎵) och med hjälp av dem bildades tal upp till 59.



12



32



43

Nästa växling gjordes vid 60 och då användes samma tecken som för talet 1.

𐎶𐎶 kunde då betyda

$$2 \times 1 = 2$$

$$60 + 1 = 61$$

$$2 \times 60 = 120$$

$$3 \times 600 + 1 = 3601$$

$$3 \times 600 + 60 = 3660 \text{ eller}$$

$$2 \times 3 \times 600 = 7 \times 200$$

Denna flertydighet kan medföra problem för oss. Babylonierna däremot, kunde förmodligen av sammanhanget sluta sig till vilket tal som avsågs (för utförligare beskrivning; se Litteratur).

Även om basen i deras talsystem var 60, skedde det också en växling vid 10.

Talet 285 skrevs så här med kilskrift.



$$4 \cdot 60 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 285$$

Lertavlor med kilskrift

Man behöver lera, tomma glasflaskor, tidningar, snören, vassa föremål t. ex. blyertspennor, passare, knappnålar,

Eleverna ritar först upp den planerade lertavlan på papper i lämplig storlek (ca 10 cm x 10 cm). Texten ska innehålla numeriska uppgifter.

I vår by finns
 << ♪ ♪ ♪ kvinnor,
 << män och
 << ♪ ♪ ♪ barn.

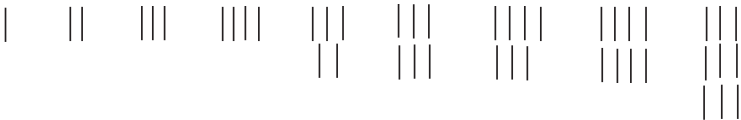
Min cykel
 har << ♪ växlar.

Bearbeta leran och kavla ut den med hjälp av en tom flaska. Använd ett spetsigt föremål och rista in text och siffror. Gör hål i lertavlans översta hörn så att ett snöre kan träs igenom dem. Låt den ligga några dagar tills den torkat. Häng upp tavlorna och låt sedan eleverna tyda varandras.

Det egyptiska talsystemet

Egyptierna använde ett slags tusch när de skrev på papyrusrullar. Tusch framställdes av sot eller kimrök och papyrusrullarna var tillverkade av vassrör eller papperssäv.

Tecknen för 1–10 bestod av raka streck, samlade i grupper. (Var det symboler för fingrar?)

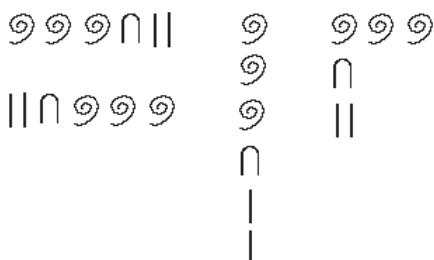


De övriga taltecknen bestod av följande symboler. Symbolerna med tolkningar är från McLeish (1991).

⌒	10	Åsnehov, Åsnan var egyptiernas viktigaste husdjur.
☉	100	Hårlock, Fåret hade hundratals lockar i sin ull.
🌸	1 000	Lotusblomma. Det växte tsentals lotusblommor i Nilen.
🌀	10 000	Faraos spira. Den var ett tecken på makt över många.
🐍	100 000	Grodyngel. I Nilen fanns hundratusentals grodyngel.
👤	1 000 000	En känsla. ”Åh, vilket stort tal!”

Egyptiernas bas var 10, men de hade inget positionssystem, så därför var det oväsentligt åt vilket håll de skrev taltecknen.

312 kunde skrivas på olika sätt



De saknade tecken för noll. Talsystemet användes i Egypten för ca 5 000 år sedan. (För utförligare beskrivning; se litteraturlistan.)

Gör egna papyrusrullar

Till den här övningen behöver du grovt papper t ex brunt omslagspapper, tusch och gem.

Varje elev bör ha ett papper som är ca 20 cm x 50 cm och rullar ihop de motsatta sidorna en bit mot mitten, så att formen liknar en papyrusrulle. Fäst ”rullarna” med gem. Gör ett utkast, där text och sifferuppgifter skrivs ned. Skriv sedan med tusch på ”papyrusrullen”.

Jag är född...
Mitt telefonnummer är...
Dagens datum är...

Det kinesiska talsystemet

Kineserna använde bambustavar som var ca 10–15 cm långa för att markera sina tal. De lade ut stavarna på ett speciellt räknebräde som var gjort av trä och indelat i rutor. Talen delades in i två grupper – lodräta och vågräta.

Lodräta: | || ||| |||| ||||| T TT TTT TTTT

Vågräta: — = ≡ ≡ ≡ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥

Basen var 10 och stavarna lades ut lodrätt i varannan position och vågrätt i de övriga.

Lodrätt: Ental, hundratal, osv. Vågrätt: Tiotal, tusental, osv.

688

8 293

246 975

T

⊥

⏏

hundra

rata

l

tiota

l

enta

l

⊥

||

⊥

|||

tusen

ta

l

hundra

rata

l

tiota

l

enta

l

=

||||

⊥

⏏

⊥

||||

hundra

tusen

ta

l

tiota

tusen

ta

l

tusen

ta

l

hundra

rata

l

tiota

l

enta

l

Om rutan var tom, betydde det 0. Detta talsystem användes i Kina för ca 3000 år sedan. (För ytterligare fakta; se litteraturlistan.)

Kinesiska tal med tandpetare

Här behövs tandpetare och tape. Enklast är att eleverna direkt skapar sina tal med hjälp av tandpetare på de numrerade lappar som används vid introduktionen av talsystemet. Tandpetarna kan fästas på papperet med tape.

7237

⊥ || ≡ ⏏

Mayafolkets talsystem

Taltecken har man funnit på bl a minnesstenar över härskare och på stenpelare. Tecknen skrevs också på ett slags papper som var tillverkat av bark. Här följer tecknen för 1-19:

•

••

•••

••••

•

••

•••

••••

=====

•

••

•••

••••

=====

•

••

•••

••••

Var punkten symbol för majskornet som var mayafolkets viktigaste gröda?

Basen var 20, men det fanns också samtidigt en underliggande bas med 5 inbyggt i deras talsystem. Femtalet symboliserades av ett streck. När man kom till 20 bytte man position, se figur ovan. Talen skrevs nerifrån och upp.

•

•

•

$20 \cdot 20 = 400$

$1 \cdot 20 = 20$

$1 \cdot 1 = 1$

421

Talet 66 skrevs:

	$3 \cdot 20 = 60$
	$1 \cdot 6 = 6$
	66

Nollan symboliserades av en tom snäcka  (Lindberg & Kuijl, 1991). I och med att de införde ett tecken för noll, hade de också möjlighet att bygga upp ett entydigt positionssystem. Mayafolket använde detta talsystem för ca 2 000 år sedan.

Övning med Mayafolkets talsystem

Man kan behöva stenar och tusch. Låt eleverna skaffa var sin torr sten. Det är en fördel om en av stenens sidor är någorlunda plan.

Gör ett utkast på vanligt papper, där talet skrivs med mayafolkets symboler. Skriv med tusch på stenen och gör en utställning av stenarna. Eleverna får tyda varandras taltecken.

- Hur kan matematikhistorien bli mer levande om man även studerar personer och kulturer i den aktuella tidsperioden?
- Vilka ytterligare talsystem är lämpliga att studera?
- Hur kan förståelsen öka, för hur vårt eget positionssystem är uppbyggt, genom att studera äldre tiders talsystem?
- Hur ser elevernas talsystem ut om de får fria händer att bygga upp sitt eget? I artikeln "Samla, jaga, odla, räkna..." i Nämnaren ger Hörtewall & Israelsson (1994) exempel på hur elever utgått från sina fritidssysselsättningar och använt sig av för dem viktiga attribut. Golfgruppen använde sig av olika symboler för peg, klubba, boll och vimpel när de konstruerade sitt talsystem. Fiskegruppen: metspö, krok, mask, håv och fisk. Hamstergruppen: fot, matskål och vattenflaska.
- Hur kommenterar eleverna babyloniernas sätt att använda samma tecken för 1, som för 60?
- Hur reagerar dina elever när de inser att nollan inte alltid funnits?
- Hur uppfattar dina elever talen när de ska skriva dem i ett annat talsystem? Siffrorna i 4 325 har ju en annan innebörd än normalt och ska egentligen inte uttalas som fyratusentrehundratjufem.

- Innebär ett historiskt perspektiv i matematik att vi ska utgå från historiens matematik och/eller matematikens historia?
- Vilken roll har matematiken i historien?
- Vilken roll har matematiken i nutiden?
- Hur har matematiken påverkat kulturen?
- Hur har kulturen påverkat matematiken?
- Vad anser du om att historiskt perspektiv numera ingår i kursplanen för matematik?
- Kan vi dra nytta av det historiska perspektivet i vår egenmatematikundervisning?
- Kan synen på vårt eget västerländska kulturarv påverkas genom att se på matematiken i ett historiskt perspektiv?
- Kan förståelsen för våra invandrarelevers sätt att räkna öka genom insikt i matematikens historia?
- Kan vårt förhållande till matematikämnet förändras genom det historiska perspektivet?

Litteratur

- Amundsson, J. (1982). Problemavdelningen. *Näm-naren* 8(3), 67-72.
- Amundsson, J. (1983). Problem genom tiderna. *Näm-naren* 9(3), 65-69.
- Bergstén, P. (1995). Drakar, vatten, eld och väder-kvarnar. *Näm-naren* 22(3), 46-48.
- Dahl, K. (1995). Ger matematiken men eller mening? *Näm-naren* 22(2), 15-22.
- Fauvel, J. (1989). Is the history of mathematics suitable for classrooms? *Näm-naren* 16(3), 13-15.
- Fauvel, J. (1990). How do you add two numbers? *Näm-naren* 17(2), 39-42.
- Friberg, J. (1992a). Mesopotamisk matematik. *Näm-naren* 19(4), 9-16.
- Friberg, J. (1992b). Mesopotamisk matematik – del 2. *Näm-naren* 20(1), 12-17.
- Hansson, K. m fl (1995). Hur man räknade förr. *Näm-naren* 22(2), 34-37.
- Hjalmarsson, G. (1986). Lyser solen i Skara? *Näm-naren* 13(1), 52-53.
- Hägemark, P. (1985). Skolmatematik för hundra år sedan. *Näm-naren* 11(3), 6-7.
- Hörtewall, K. & Israelsson, I. (1994). Samla, jaga, odla, räkna ... *Näm-naren* 21(2), 20.
- Johansson, B. (1986). Sveriges förste forskare i matematikdidaktik. *Näm-naren* 12(3), 6-10.
- Lindholm, H. (1985). Glimtar ur matematikens historia. *Näm-naren* 12(1), 52-57, *Näm-naren* 12(2), 52-57, *Näm-naren* 12(3), 52-55.
- Miniporträtt genom åren (1991). Sammanställning över de drygt 30 miniporträtt av matematiker som publicerats. *Näm-naren* 18(3/4), 150.
- Råde, L. (86/87). Konsten att beräkna π . *Näm-naren* 13(1), 55-57.
- Sahlgren, N. (1982). Glömda geometriska lagar-gömda i gamla målkärl. *Näm-naren* 8(3), 52-53.
- Sjöberg Wallby, K. (1992). Den fantastiska matema-tiken. *Näm-naren* 19(4), 28-32.
- Sträng-Haraldsson, M. (1989). Historiens matematik i klassrummet. *Näm-naren* 16(3), 18-19.
- Swetz, F. (1989). Proving the Pythagorean Theorem. *Näm-naren* 16(2), 42-44.
- Swetz, F. (1990). Numerals from ancient China. *Näm-naren* 17(1), 45-48.
- Thompson, J. (1984). Vad kan vi lära av matemati-kens historia? *Näm-naren* 11(1), 42-44, *Näm-naren* 11(2), 49-52, *Näm-naren* 11(3), 48-51, *Näm-naren* 11(4), 28-31.
- Unenge, J. (1994). Bildning och matematik. *Näm-naren* 21(2), 36-37.
- Unenge, J. (1995). Räknelära från 1614. *Näm-naren* 22(1), 41.
- Ölme, A. (1985). Miniporträtt - på klassens sätt. *Näm-naren* 12(1), 25.
- Dahl, K. (1991). *Den fantastiska matematiken*. Stockholm: Ficher&Co.
- Dahl, K. & Nordquist, S. (1994). *Matte med mening*. Stockholm: ALFABETA.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommentarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bidrag till Sveriges matematiklärarförenings som-markurs i Mullsjö 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T. (Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i interna-tionell belysning*. Göteborgs universitet, Institutio-nen för ämnesdidaktik.
- Hall, T. (1965). *Gauss, matematikens konung*. Stock-holm: Prisma.
- Johansson, B. (1993). Matematikdidaktik - nordiskt samarbete i historisk belysning. *NOMAD* 1(1), 55 - 61
- Johansson, B. (1995). Inledning. I Aurelius' räkne-lära från 1614. Nyutgåva av den första tryckta läroboken i matematik som skrivits på svenska. *Årsböcker i svensk undervisningshistoria* 178. Uppsala: Föreningen för svensk undervisnings-historia, 5-22.
- Johansson, B. & Wistedt, I. (1991). Undervisning om tal och räkning - ett historiskt perspektiv. I G. Ema-nuelsson, B. Johansson, & R. Ryding (Red), *Tal och räkning 1*. Lund: Studentlitteratur, 28-44.
- Kilborn, W. (1991a). *Didaktisk ämnesteor i matema-tik. Del 1. Grundläggande aritmetik*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1991b). *Didaktisk ämnesteor i ma-tematik. Del 2. Rationella och irrationella tal*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Lindberg, D. & Kuijl, B. (1993). *Hur man räknade förr*. Solna: Almqvist & Wiksell.
- McLeish, J. (1992). *Matematikens kulturhistoria*. Borås: FORUM.
- Nationalencyklopedin*. (1990). Höganäs: Bra Böcker.
- Newman, J. R. (Red) (1959). *Sigma. En matemati-kens kulturhistoria*. (Svensk huvudredaktör Tord Hall.) Stockholm: Forum.

- Nystedt, L. (1993). *På tal om tal*. Djursholm: Instant Mathematics.
- Schedinger-Jacobsson, M. (1991). *Räkna för Farao*. Dalby: Carlstedts förlag.
- Thompson, J. (1991a). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- Thompson, J. (1991b). Problemlösning – ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 165-179.
- Thompson, J. (1991c). Tal och räkning – ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Tal och räkning I*. Lund: Studentlitteratur, 13-27.
- Thompson, J. (1992). Geometri och statistik i ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 113-126.
- Wistedt, I. & Johansson, B. (1991). Undervisning om problemlösning - ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson, & R. Ryding (Red), *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur, 13-22.
- Wistedt, I. & Johansson, B. (1992). Undervisning om geometri och statistik - ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 15-25.
- Bergamini, D. (1972). *Mathematics*. New York: Time-Life Books.
- Brun, V. (1967). *Alt er tall. Matematikkens historie fra oldtid till renessanse*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Cajori, F. (1928). *A History of Mathematical Notations*. Chicago: The Open Court Publishing Company.
- Dossey, J. A. (1992). The Nature of Mathematics: Its Role and Its Influence. In Grouws D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Frandsen, J. (1992). *De(t) gyldne snit – i kunst, natur og matematik*. Herning: Forlaget Systime.
- Friberg, J. (1984). Numbers and measures in the earliest written records. *Scientific American* 250, 110-118.
- Führer, L. (1992). Historical stories in the mathematics classroom. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 127-138.
- Gardiner, T. (1992). Once upon a time. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 143-150.
- Heiede, T. (1992). Why teach history of mathematics. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 151-157.
- Ifrah, G. (1985). *From One to Zero. A Universal History of Numbers*. New York: Oxford University Press.
- Jacobs, H.R. (1982). *Mathematics, a Human Endeavor*. 2d ed. New York: W.H. Freeman & Co.
- Katz, V. (1993). *A History of Mathematics*. New York: Harper Collins College Publishers.
- Kilpatrick, J. & Johansson, B. (1994). Standardized mathematics testing in Sweden: The legacy of Fritz Wigforss. *NOMAD* 2(1), 6-30.
- McLeish, J. (1992). *Matematikens kulturhistoria*. Stockholm: Forum.
- Nissen, G. & Blomhøj, M. (Red) (1994). *Hul i kulturen*. Sæt matematik og matematikundervisning på plads i kultur- og samfundsbilledet. Viborg: Spektrum.
- Swetz, F. J. (1984). Seeking Relevance? Try the History of Mathematics. *Mathematics Teacher*, 77(1), 54-62.
- Swetz, F. J., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B. & Katz, V. (1995). *Learn from the masters*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America, MAA.
- Swetz, F. J. (1994a). *From five fingers to infinity. A journey through the history of mathematics*. Chicago and La Salle: Open Court.
- Swetz, F. J. (1994b). *Learning Activities from the History of Mathematics*. Portland, Maine: J. Weston Walch.

Historiskt perspektiv i klassrummet

Mikael Holmquist

I de nya kursplanerna betonas matematikens idéhistoria. Här berättas om hur elever löser "gamla" problem och diskutera olika lösningssätt i grupp.

Bakgrund

Varför studerar vi matematik? Det är en fråga de flesta ställt sig någon gång, självklart med olika utgångspunkt. Den är inte så lätt att besvara. Den döljer många underliggande frågor om matematik. Hur är matematiken till sin natur? Vad har den spelat för roll i historien och vilken är dess roll i nutid? Hur har matematiken påverkat olika kulturer under skilda tidsperioder och hur har uppfattningar om matematik inom en viss kultur påverkat matematikens innehåll?

Uppfattningen om matematik som en dynamisk process över tid får allt mera genomslag. Det kan man bl a se i det stora amerikanska arbetet NCTM Standards (1989). Dessa strömningar har också påverkat skrivningen av de nya kursplanerna i matematik för den svenska grund- och gymnasieskolan.

Som matematiklärare i grundskolan har man ofta anledning att fundera över elevernas förhållningssätt till matematiken och hur medvetet detta förhållningssätt är hos den enskilde eleven. Det påverkar i hög grad inlärningssituationen, särskilt om man frångår den tradition som bygger på att läraren är kunskapsbanken som eleven förväntas ta del av. Det finns studier som visar att vi matematiklärare borde fundera mer kring vårt eget förhållningssätt till matematik. Kanske kan en lärares uppfattning av matematik påverka inlärningssituationen mer än sättet att undervisa?

Relationer mellan matematiska idéer är enligt min uppfattning intimt kopplade till idéernas ursprung och den process de genomgått. Kunskaper om relationer mellan matematiska idéer avspeglar det förhållningssätt som en lärare har till matematik. Det historiska perspektivet får då stor betydelse för utveckling av uppfattningar, hos både lärare och elever. Detta synsätt kräver att vi är medvetna om svårigheter och faror, att vi gör en klar distinktion mellan anekdoter och underbyggda fakta och att vi vet vilka källor som utnyttjas.

Varför och hur

Det finns idag ett ökat behov av att man som lärare kan ge bakgrund, sätta in saker i ett sammanhang och kunna peka på tydliga syften med undervisningen i matematik. Huvudsyftet med mitt arbete har varit att se om det med hjälp av ett historiskt perspektiv går att frigöra elevernas tankar kring varför vi studerar matematik, dvs om deras förhållningssätt till matematik blir tydligt. Kännedom om detta är enligt min uppfattning en förutsättning för att kunna förbättra inlärningssituationen. Vi behöver veta mer om vad som ligger bakom ytliga påståenden som att matematik är roligt eller tråkigt. Det finns också underliggande syften med arbetet såsom att:

- motivera elever till problemlösning där problemets värde inte ligger i vardags-situationer utan istället ger ett tidsper-spektiv på matematik
- visa eleverna att matematik som ämne är internationellt
- låta eleverna jämföra våra möjligheter att lösa ett problem med de som fanns i den tid då problemet först dök upp
- öva eleverna i att argumentera för sin Lösingsstrategi men också i att lyssna på andras beskrivningar av lösningssätt
- utveckla självförtroende och tillit i arbete tillsammans med jämlingar
- skapa variation i arbetet.

Studiens innehåll och form utgår från tanken att den ska ge mest utbyte om den integreras i pågående verksamhet. Vi håller på med problemlösning. Jag väljer nio problem med historisk anknytning som får ersätta grundkursen i läromedlet. Det är också ett försök att ersätta kvantitet med kvalitet. Bokens grundkurs innehåller betydligt fler uppgifter.

Problemen väljs så att eleverna ska se i vilken kultur och i vilken tid de hanterats, med ett innehåll och en svårighetsgrad som motiverar samarbete. Min uppgift består i iakttagelser, samtal och noteringar under arbetets gång. För att få med deras uppfattningar av vad som sker, intervjuas fyra elever efter det att arbetet avslutats.

Ett klassrumsförsök

Elevggruppen består av tjugo elever i åk 7. Arbetet pågår ca 6 lektioner enligt följande:

Inledning

I början ges en kort introduktion som bl a innehåller en orientering om vad man idag anser sig veta om den äldsta matematikens ursprung (Friberg, 1992) samt något om arbetets karaktär.

Arbete

Problemen löses i smågrupper med tre elever i varje grupp, några arbetar i par. Arbetssättet grundar sig på en önskan att få variation och att på ett naturligt sätt få eleverna in i argumentation och diskussion. Varje grupp får ett problem som man har ett huvudansvar för. Problemet anses färdigbearbetat när alla i gruppen är överens och anser sig ha förstått problemet och den lösning som gruppen har att redovisa. Övrig tid fram till redovisningen, de två sista lektionerna, ska gruppen lösa något eller några av de andra gruppernas problem. Svar på problemen lämnas inte ut. Istället görs en rimlighetsbedömning inom gruppen.

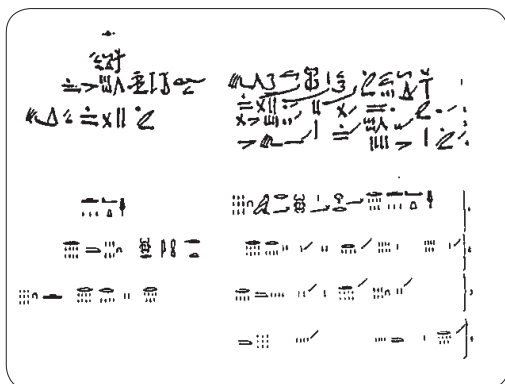
Redovisning och diskussion

Grupperna redovisar vid tavlan inför klassen, med tillgång till OH-projektor. Efter redovisning tar man emot kritik och synpunkter på innehållet. Därefter diskuteras och argumenteras för olika strategier. Avslutningsvis intervjuas fyra elever kring hur de har upplevt arbetet och dess olika delar.

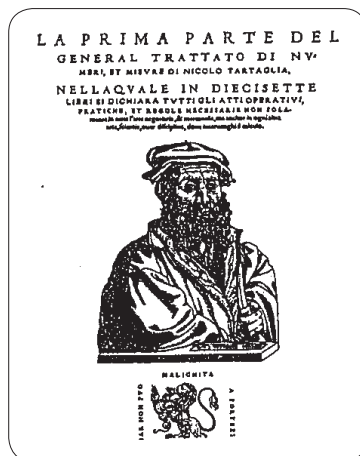
Resultat och funderingar

Studien har inte haft till syfte att avgöra om eleverna kan lösa ett visst problem, men klart är att flera elever i gruppen har stärkts i tron på sig själva som problemlösare – ett viktigt resultat av arbetet i grupperna. Innan elevernas reaktioner redovisas tar jag upp några egna reflektioner från arbetet.

Studien visar att arbete med detta perspektiv ställer nya krav på både elever och lärare. Arbete i små grupper kräver aktivt deltagande, förmåga att lyssna och att argumentera. Dessa förmågor är självklart inte färdigformade genom ett sådant här kort inslag. Det finns inte något facit, inget färdigt svar att arbeta mot. Det ställs nya krav på att behålla och bearbeta sina tankestrukturer över tid. Vissa grupper använde upp till tre lektioner för att nå uppsatt mål. Det behövs



Figur 1



Figur 2

Elevuppgifter

1 En kvantitet vars sjundedel adderad till den ger 19. Vilken är kvantiteten? (Problem nr 24 från Rhind papyrusen, Egypten 2000 f Kr).

2 Problemet handlar om tre fabriörer som behöver investera 1000 ducater för att kunna starta en ull-fabrik. Fabriör nr två föreslår att han ska investera dubbelt så mycket som den förste och den tredje tre gånger så mycket som nummer två. Hur mycket ska var och en investera för att kunna starta? (Ur Nicolo Tartaglias bok, Italien 1600-talet.)

3 Magiska cirklar från Ming-perioden (Kina 1368-1644). Undersök deras "magi"!

4 Från en hetvattenkran kan man fylla ett badkar på 5 minuter och från en kallvattenkran kan man fylla det på 3 minuter. Avloppsröret kan tömma det på 7 1/2 minuter. Hur lång tid tar det att fylla badkaret när både kranarna och röret är öppna samtidigt? (Problem ur Philipo Calandri's bok från Italien och 1400 talet.)

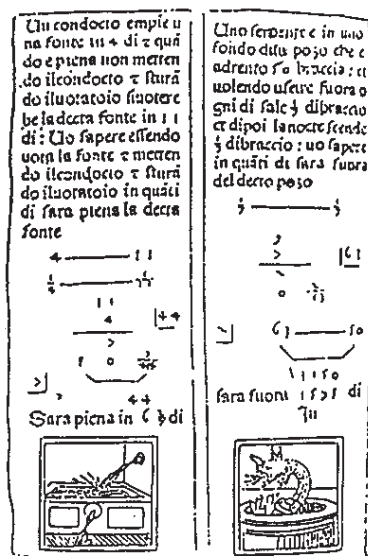
5 Huvudet på en fisk väger 1/3 av hela fisken, dess fenor väger 1/4 och dess kropp 30 ounces. Vad väger fisken? (Problem ur Philipo Calandri's bok från Italien och 1400 talet.)



Figur 5

5	68		3	70		1	72
32		41	34		39	36	37
42		31	40		33	38	35
67	6		69	4		71	2
18	55		16	57		14	59
19		54	21		52	23	50
53		20	51		22	49	24
56	17		58	15		16	13
11	62		9	64		7	66
26		47	28		45	30	43
48		25	46		27	44	29
61	12		63	10		65	8

Figur 3



Figur 4

nya tankemönster när det uppdragas att inte ens miniräknarhjälp självklart löser problemet. Allt detta är utmaningar som med vidare arbete kan utvecklas till goda redskap i matematikinläring.

I arbetet ser man att det är andra lärarkunskaper förutom de traditionellt ämnesmässiga som sätts på prov. Det ställs nya krav på hur man bemöter elevers tankar och funderingar när arbetet innebär ett större perspektiv på matematikinnehållet. I det följande ges några exempel på frågor och svar från intervjuerna. L är läraren.

1 Hur kan man veta att man har räknat rätt?

Alla uttrycker att de har stöd i gruppen, för att komma rätt med sin lösning. Vid självständigt arbete finns en viss osäkerhet.

A – Det är ju enklare med gruppen och kanske då vet...då är det bättre att tre är säkra än om en är säker på att det är rätt...då vet man ju mer om matte och så.

L – Hur menar du?

A – Ja hur menar jag...nej jag vet inte.

L – Du gjorde någon jämförelse här mellan gruppen och ensam.

A – Jaaa...Om man löser problem själv så vet...man kanske inte är säker på att det är rätt men om man säger att det är en grupp på tre så om alla får lika svar så är det troligast att det är rätt svar.

2 Vi jämför problemen med bokens uppgifter. Kan du se några likheter och/eller några skillnader?

Alla ser att det finns betydligt fler uppgifter i boken än i det material vi har arbetat med. Här nämns vissa likheter mellan uppgifterna i boken och problemen vad gäller strukturer samt att det borde vara möjligt att lösa båda typerna med samma strategier.

3 Vilka skillnader ser du i matematikanvändning förr och nu?

Ett par av eleverna berättar att de i So under åk 7 arbetat med historiska kulturer, bl a med Egypten. De redovisar en viss uppfattning om matematikens roll i dessa kulturer.

D – Det var ju inte alla som kunde räkna ut och så där det var mer sådana höga gubbar, kanske präster och sånt som använde kanske matematik för sina trollkonster och sånt. Medan det här... det är för skolbarn som går i sjuan och det är inte så stor skillnad på problemen just men på den tiden kanske man tyckte "Wow, kan man göra så!" men här "det är väl inte speciellt svårt" så där!

L – Vad har hänt däremellan då?

D – Man har gått i skolan! Man har fått börja skolan och lära sig matte!

4 Är detta ett bra sätt att lära sig?

Alla tycker, med vissa nyanser, att det är ett bra sätt att lära sig på.

B – Ja!

L – Varför?

B – Man gör då ett problem först sen får man då redovisa det för klassen då lär alla av det också, så visar man hur man gör och ser om nån annan gör på olika sätt och så.

L – Vad vinner man på det?

B – Om...man kanske kommer på nya sätt om det är någon som har ett sätt så säger den något annat så kan man ju ta efter det och så sen har man ju två.

5 Hur ser du på era förutsättningar att lösa samma diagnos i boken som de elever som enbart använt boken?

Två är något tveksamma och nämner antalet uppgifter som en avgörande faktor. De andra två svarar:

C – Eftersom det är i boken har de väl fått de...kanske lite bättre om vi jobbat i boken men sen har vi väl fått del av mer – i framtiden kanske.

L – Ta en snabbtitt på diagnosen. Typ av problem?

C – Det ska inte vara något problem tycker jag!

D – Dom har ju fått samma problem som finns här. För oss är det kanske lite svårare. Men om vi har fått våra problem

här så är det kanske enklare att lösa det här, det vet man ju inte så.

L – Det är inte självklart så att det måste vara besvärligare utan det finns en möjlighet som du säger. Kan det hänga ihop med vad man vågar?

C – Om man vågar tänka lite så här, om man vågar tro på sig själv att det här är rätt den här idén som jag har fått "det är nog rätt så!" Man vågar kritisera sig själv. "Det kanske inte är rätt jag försöker med det...jag försöker igen".

6 Skulle du vilja arbeta mera med denna typ av problem?

A – Ahh jag vet inte, det har varit skojigare och så jag vet inte det är inte lika jobbigt som att jobba i bok.

L – Vad beror det på?

A – Boken får man sitta en och en och hålla på hela tiden. Här får man liksom vad ska man säga, man får liksom samarbeta mer.

L – och det tycker du är...?

A – Ja mycket bättre!

C – Kanske lite mer det ger ju omväxling och så blir man ju inte så trött på boken.

D – Ja gärna, det är skojigt!

L – Följdfrågan är just varför du säger att det är skojigt?

D – Det är skojigt, man behöver tänka till lite extra så här.

Framförallt svaren på den sista frågan bekräftar att målet att åstadkomma stimulans och variation i arbetet har uppnåtts!

Elevgruppen har efter denna studie återgått till att arbeta med boken och där gjort samma diagnos som de skulle ha gjort efter bokens grundkurs. Vid en ytlig betraktelse av resultatet finns det inget som tyder på att elevgruppen skulle ha haft svårare med diagnosens innehåll än de elever i parallellgrupperna som arbetat enbart med boken.

Att avgöra hur det ser ut för den enskilde eleven kräver noggrannare analys av materialet, vilket ligger utanför ramen för denna studie.

Några frågor har studien givit svar på, men framförallt har den inneburit möjlighet för mig att reflektera över både mitt eget och elevernas förhållningssätt till matematik. Nya frågor har genererats, se studieuppgifter s 107).

Min slutsats är att det historiska perspektivet öppnar för större bredd och sammanhang i matematikundervisningen och möjliggör en verksamhet som ger gemensamma upplevelser för lärare och elever.

Referenser

- Ahlberg, A. (1991). Att lösa problem i grupp. I G. Emanuelsson m fl (Red.), *Problemlösning*, s 85-99. Lund: Studentlitteratur.
- Dossey, J. A. (1992). The Nature of Mathematics: Its Role and Its Influence. I Grouws D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, USA: Macmillan.
- Friberg, J. (1992). Mesopotamisk matematik – del 1. *Nämnamnaren*, 19(4), 9-16.
- Führer, L. (1992). Historical stories in the mathematics classroom. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 127-138.
- Gardiner, T. (1992). Once upon a time. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 143-150.
- Good, T. L., & Mulryan, C., & McCaslin, M. (1992). Grouping for Instruction in Mathematics : A Call for Programmatic Research on Small-Group Process. I Grouws D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, USA: Macmillan.
- Grouws D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, USA: Macmillan.
- Heiede, T. (1992). Why teach history of mathematics. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 151-157.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ofir, R., & Arcavi, A. (1992). Word problems and equations. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 69-84.
- Swetz, F. J. (1984). Seeking Relevance? Try the History of Mathematics. *Mathematics Teacher*, 77(1), 54-62.

Matematiken är en del av vår kultur

Frank Swetz

Matematik är inte något magiskt eller avskräckande främmande. Genom ett historiskt perspektiv i undervisningen kan vi minska vrångbilder av matematiken som formalistisk och auktoritär och visa hur den skapats av människor. Matematikämnet har en spännande och kreativ utveckling bakom sig, som kan återupptäckas och föras vidare.

Vad är matematik? Detta kan tyckas vara en egendomlig fråga att ställa till en påläst publik, bestående av matematiklärare. Men jag slår vad om att detta är svårt att svara på, om man tänker efter. Naturligtvis kan en mångfald kvickheter och klichéer ge svaret:

- *Det är konst*
- *En vetenskap – det är faktiskt vetenskapens drottning och tjänare*
- *Det är vad jag använder när jag kontrollerar mitt checkkonto*
- *Ett spel där vi spelar med regler som vi inte är säkra på*
- *Någonting som jag aldrig var bra på,*

och så kan listan byggas på. Vad dessa svar verkar undvika är det faktum att matematik är en nödvändig mänsklig aktivitet, som svarar mot behov som bestämts av den mänskliga existensen. Matematik är påtaglig i alla samhällen och kulturer. De behov mot vilka den svarar är både materiella och intellektuella och allteftersom de förändras, förändras också karaktären hos den matematik som tjänar behoven; följaktligen är matematik ett kunnande som ständigt utvecklas i relation till samhällets förutsättningar.

På samma sätt som varje svar på den inledande frågan är endimensionellt, är alltför ofta vår matematikundervisning endimensionell. Ofta finner vi oss själva koncentrerade på att undervisa ”matematik” – symbolerna, tekniken, procedurer att finna rätt svar- utan att verkligen undervisa om vad matematik ”handlar om” – var den kommer ifrån, hur den bearbetats, hur idéer uppfattats, förfinats och utvecklats till användbara teorier, – kort sagt, dess sociala och mänskliga betydelse. I bästa fall kan detta tränande producera kunniga tekniker som kan tillämpa matematik, men det kommer också att producera elever som uppfattar matematik som en obegriplig samling av regler och formler som uppträder i klump och hotfullt sänker sig ner över dem.

Tyvärr är denna senare grupp i majoritet i våra skolor. Dessa elever bygger psykologiska barriärer mot sann matematisk förståelse och utvecklar oro inför att lära sig och använda matematik. Lärare kan delvis råda bot på detta förhållande genom att införliva ett historiskt perspektiv i matematikundervisningen. I skolan lärs ofta historia ut för att göra de unga delaktiga i en gemenskap – få dem medvetna om traditioner, ge dem en känsla av samhörighet och av att vara delaktiga i ett pågående förlopp. Liknande mål kan motivera att man undervisar om

Bearbetad översättning av Swetz (1984).
 Bearbetning gjord av Göran Emanuelsson
 & Karin Wallby

matematikens historia. Genom att blanda in historia i matematikundervisning kan lärare minska den vrångbild av mystik som omger matematik. Matematik är inte något magiskt eller avskräckande främmande, utan snarare ett kunnande naturligt utvecklad av människor under en 5 000-årig tidsperiod – av människor som gjort misstag och som ofta varit förbryllade men som arbetade fram lösningar på sina problem och lämnade redogörelser för problemen så att vi kan dra nytta av dem.

Matematikundervisning borde erkänna och lyfta fram dessa människocentrerade fakta.

Helt klart innehåller matematikhistoriska böcker alla aspekter av mänskligt drama som kan fånga fantasin och föreviga intresset: mysterium, äventyr, intrig osv. Ett studium av Galileos utmaning av Ptolemaios teorier om planeternas rörelse kan erbjuda såväl högklassigt drama som en trevlig introduktion till teorier kring matematiska modeller. Mysterium finns i överflöd inom talteori, i konstruktionen av och syftet med Egyptens pyramider och i förekomsten av matematiska konstanter som π och e i olika situationer. Äventyr kan man uppleva i problemet att konstruera regelbundna polygoner med fler och fler sidor. Fängslande innehåll kan man hitta i olika typer av hemliga chiffer, bl a sådana som var populära under medeltiden, eller i den beskrivande geometri som 1789 dök upp för att användas av militären. Matematikens historia kan förmedla höjdpunkter av mänsklig skicklighet och kreativ genialitet – exempelvis Cantors bevis för de reella talens oändlighet – men den kan också demonstrera svagheter i människans förståelse, illustrerat av att det fortfarande finns bevis för vinkelns tredelning, trots att den bevisats vara omöjlig. Sådant material kan blåsa liv i matematiklektioner.

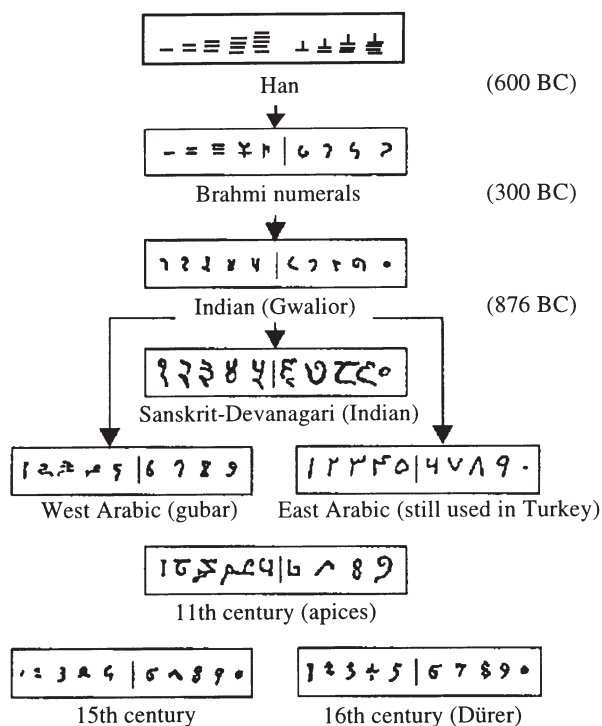
Införlixa historia i matematikundervisningen

Matematikundervisning kan således ges en mänsklig dimension om man tar in det historiska perspektivet i klassrumsdiskussioner. Detta kan och bör göras såväl genom användning av historiska anekdoter, filmer, projekt, utställningar och problem i undervisningen som genom kopiering av relevanta historiska experiment t ex att uppskatta värdet av π (NCTM, 1969). Det bör göras på ett naturligt sätt, som en integrerad del av lektionen – man bör inte presentera detta så att eleverna tänker ”nu ska vi tala om matematikens historia”!

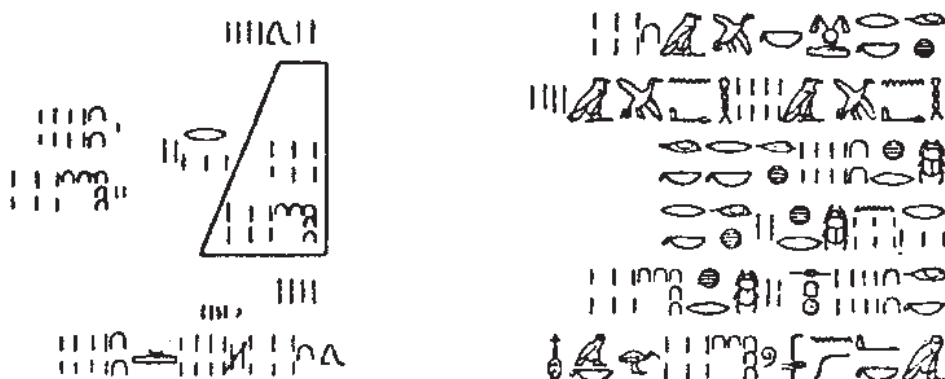
Betänk exempelvis hur lektioner om talsystemens utveckling skulle kunna förbättras med ett historiskt perspektiv. En diskussion kan peka på hur vårt nuvarande sätt att skriva siffror utvecklades från enkla ”poängstreck”-symboler som $_$ $\equiv$, och hur vanan att skriva och hastigheten förvandlade dessa symboler till $|$ $\geq$ $\leq$ Utvecklingen av arabiska siffror från sådana primitiva streck till vår tids flytande kristaller på miniräknarens fönster eller siffrorna på bankcheckarna kan demonstreras genom en enkel uppställning (figur 1).

Är den svarta streck-koden för optisk läsning av priset på en förpackning rengöringsmedel, den moderna motsvarigheten till dessa primitiva streck?

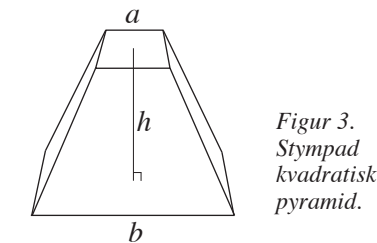
Ofta när man undervisar om räkning i olika baser hänvisar man till egyptiskt och babyloniskt talsystem. I stället för att bara tala om hieroglyfer och kilskrift kan man skapa mycket mer spänning genom att ge eleverna en möjlighet att faktiskt översätta sådana från faksimil av gamla nedteckningar. Med bara en viss kunskap i hieroglyfiska tal och med handledning kan en granskning av figur 2 avslöja det faktum att de gamla egyptierna kände till formeln för volymen av en stympad kvadratisk pyramid dvs



Figur 1. Utvecklingen av våra talsymboler.



Figur 2. Egyptierna kände till formler för pyramiders volym .



Figur 3.
Stympad
kvadratisk
pyramid.

$$V = \frac{1}{3} h(a^2 + ab + b^2)$$

där a och b är basernas sidor och h är höjden (figur 3). En sådan aktivitet kan ge upphov till många frågor. Dessa frågor erbjuder i sin tur nya möjligheter till kunskap och svaren kan leda till goda insikter i utvecklingen av matematiska idéer och tekniker. Som ett exempel på sådana möjligheter kan man betrakta följande frågor och slutsatser som skulle kunna härröra från en diskussion om talsystem.

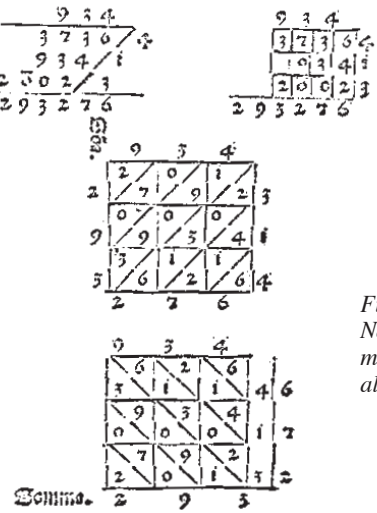
Varför dominerade användandet av romerska siffror den europeiska kulturen under så lång tid?

Hur utvecklades våra moderna algoritmer för de fyra räknesätten?

På 1400-talet fanns det i Italien åtta accepterade algoritmer för multiplikation med två flersiffriga tal. Några visas i figur 4. Även när man försökte standardisera algoritmen tog det lång tid innan man nådde önskat resultat. Detta kan illustreras av hur samma multiplikationsexempel såg ut i Taglientis Libro Dabaco i olika upplagor under en 50-års period, figur 5.

Var sådan förvirring resultatet av tryckarens inkompetens eller speglar det författarens fortlöpande förändring av algoritmen? Vilka faktorer bidrog till att popularisera en algoritm? Se på fallet med galärddivision, som var populär bland renässansmatematikerna. Även om den var matematiskt effektiv så var den inte populär bland boktryckarna som hade till uppgift att sköta sättningsarbetet, följaktligen föll algoritmen i glömska, figur 6.

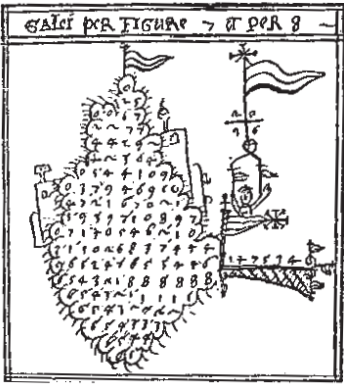
Undersökningar av matematikens historia avslöjar ofta slående likheter med nutida matematiska situationer och procedurer. Hur hanterades kvadratrötter under antiken? Det är intressant att notera att babylonierna använde metoden ”dividera och ta medelvärde” för att finna roten (fig 7). Vi tar talet x och söker kvadratroten ur x . Gissa



Figur 4.
Några
multiplikations-
algoritmer

(1515)	(1520)	(1541)	(1550)	(1567)
456	456	456	456	456
23	23	23	23	23
1368	1368	136 8	136 8	1368
912	912	912	912	912
10488	10488	1048 8	104 88	10488

Figur 5.
Försök att
standardisera
algoritmen.



Figur 6. Ga-
lärddivision

vilken roten är och kalla den a . Följ sedan denna modell:

$$\frac{x}{a_1} = r_1, \quad \frac{r_1 + a_1}{2} = a_2,$$

$$\frac{x}{a_2} = r_2, \quad \frac{r_2 + a_2}{2} = a_3,$$

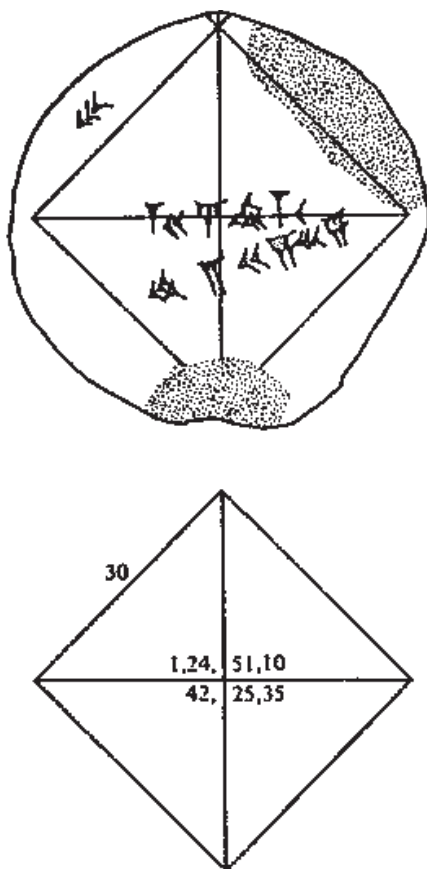
$$\frac{x}{a_3} = r_3, \quad \frac{r_3 + a_3}{2} = a_4,$$

Fortsätt med detta förfaringssätt tills du når önskad noggrannhet. Det som gör tekniken ännu mer intressant är att den är ett av de tidigaste exemplen, som vi känner till, på en iterativ metod och sådana processer, att beräkna med hjälp av upprepningar, ligger till grund för hur moderna datorer arbetar. Vår matematiska förbindelse med det förflutna är ständigt närvarande. I synnerhet har upprepningar och närmevärden alltid varit och kommer alltid att vara nödvändiga komponenter i datorns processer. När man diskuterar matematikens historia är det viktigt att notera den roll som närmevärden spelat i människans strävanden att mäta sin omvärld. "Hur bra och användbara var sådana närmevärden?" är en fråga som ofta borde ställas till eleverna. Kinesiska matematiker under den tidiga Han dynastin (ca 300 f Kr) använde ett parallelltrapets för att beräkna ett närmevärde för arean A av ett cirkelsegment.

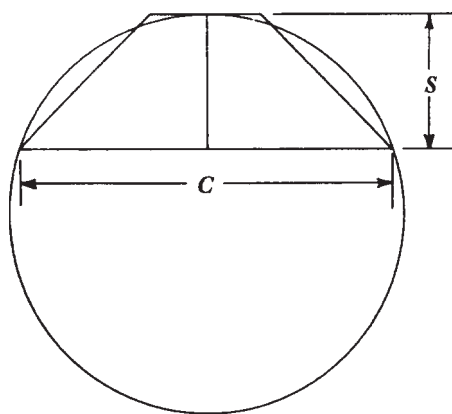
$$A = \frac{S}{2} (C + S)$$

där C är längden av kordan och S är "höjden" av segmentet, figur 8. Hur bra är detta närmevärde?

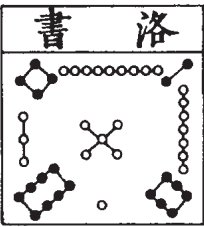
Matematik har ibland beskrivits som ett "studium av mönster". Historien tycks bekräfta denna beskrivning. Tal och talmönster, speciellt sådana som visade en framväxande regelbundenhet ur det som var uppenbart oregelbundet,



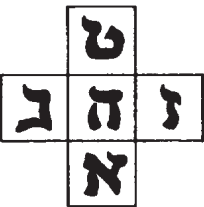
Figur 7. Att finna kvadratrötter



Figur 8.
En approximation av ett cirkelsegment med ett parallelltrapets.



Figur 9a. Lo shu



Figur 9b. Jahve

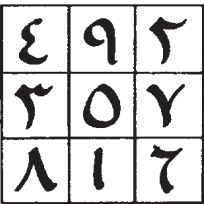


Fig 9c. "Clean plate" talisman

4	9	2
3	5	7
8	1	6

	9	
3	5	7
	1	

4	9	2
3	5	7
8	1	6

fascinerade tidiga iakttagare. Betydelser och sällsamma konfigurationer av magiska tal skapades. Magiska kvadrater exemplifierar denna sida i matematikens historia. Kineserna såg i sin magiska kvadrat "Lo shu" (fig 9a) ursprunget till vetenskap och matematik, medan hebréerna använde en del av samma kvadrat för att presentera det heliga namnet "Jahve" i kodform (fig 9b); denna kvadrat i sin tur fann sin väg till Islam, där den blev en talisman som målades på mattallriker som såldes till européer för att avvärja digerdöden (fig 9c). Fastän magiska kvadrater och konfigurationer av tal började som symboliska tecken med övernaturlig betydelse utvecklades de så småningom till intellektuella utmaningar och fängslade så framstående personligheter som Benjamin Franklin (fig 10a). De användes som en metod att skärpa förmågan till induktivt resonemang och till att bygga upp problemlösningsförmågan bland Ming dynastins kinesiska matematiker (fig 10b). Deras lockelse och dragningskraft är lika relevant för våra elever som kan utforska och reda ut deras mysterier med hjälp av miniräknare.

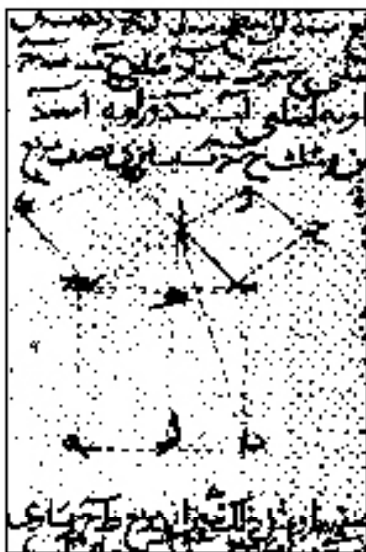
52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figur 10a. Franklins 8x8-kvadrat

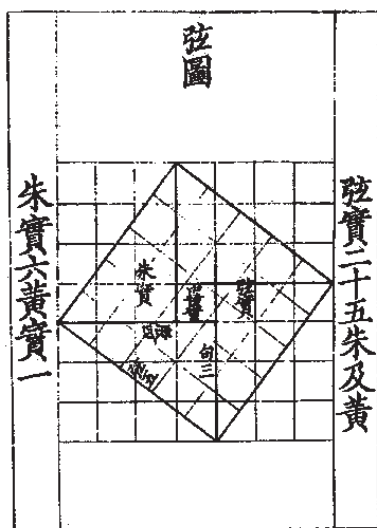
	5	68		3	70		1	72	
32		41	34		39	36		37	
42		31	40		33	38		35	
	67	6		69	4		71	2	
	18	55		16	57		14	59	
19		54	21		52	23		50	
53		20	51		22	49		24	
	56	17		58	15		16	13	
	11	62		9	64		7	66	
26		47	28		45	30		43	
48		25	46		27	44		29	
	61	12		63	10		65	8	

Figur 10b. Magiska cirklar från Mingperioden

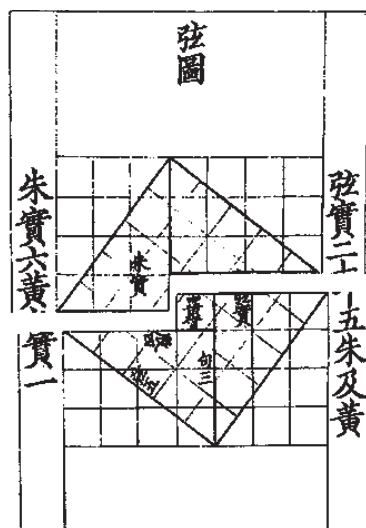
Historiskt material erbjuder ofta verkligt eleganta exempel och förklaringar som kan användas i klassrum. Om man ser på det traditionella och populära beviset av Pythagoras sats som kallas "the bride's chair" (figur 11), är detta bevis matematiskt lockande, men det har begränsad pedagogisk användbarhet p.g.a. att det är så sofistikerat. Ibland har det beskrivits som ett cirkelbevis och som ett "bevis som går på styltor, ja till och med ett tarvligt, lömskt bevis" (Kline, 1962 s 50). Ett alternativt bevis som lämpar sig för demonstration på overheadprojektor, är "Husan-thu beviset" som Kinesiska matematiker framlade under tidig Han-tid ca 300 f. Kr (figur 12). Genom matematikhistorien har en mängd sådana bevis framlagts för att bekräfta att i en rätvinklig triangel med kateterna a respektive b och med hypotenusan c gäller $a^2 + b^2 = c^2$ (Loomis, 1968). Under årens lopp har människor med olika bakgrund och intressen delat en gemensam besatthet att söka ett bevis till Pythagoras sats.



Figur 11. "The bride's chair"



Figur 12 a. Kvadraten med arean c^2 är sammansatt av fyra rätvinkliga trianglar och en liten kvadrat i centrum. Triangelnans kateter är a och b – hypotenusan c .



Figur 12 b. Delarna är här arrangerade så att arean av området under "delningen" är $c^2 = a^2 + b^2$.

Att illustrera hur matematiska idéer växer och utvecklas

Matematikhistoriens spännvidd över tiden vittnar om likheter mellan mänskliga matematiska angelägenheter och erfarenheter, men den överskrider också kulturer och bekräftar den globala naturen i matematisk medvetenhet och engagemang. Man kan jämföra samma matematiska situation från olika tidsperioder och från olika kulturella miljöer genom att studera sk ”vandringsproblem”.

När en 25 fot hög stege är rest mot en byggnads vertikala vägg är dess övre ände 17 fot längre ifrån byggnadens bas än dess nedre ände. Hur högt på väggen når stegen? (Dolciani 1970)

Ett spjut som är 20 fot långt lutar mot ett torn. Hur långt upp på tornet når spjutet om dess nedre ände flyttas ut 12 fot? (Italien 1300)

En mur är 10 fot hög. En påle med okänd längd lutar mot muren så att dess övre ända är i jämnhöjd med murens övre kant. Om pålens nedre ände flyttas en fot från muren så faller pålen till marken. Hur lång är pålen? (Kina 33 f Kr.)

En balk med längden 30 fot är lutad mot en vägg. Den övre änden kasar ner 6 fot. Hur långt rör sig nedre änden? (Babylonien 1600-1800 f Kr)

Det är intressant att notera att när vi går tillbaka nästan 4000 år i denna serie av problem med rätvinkliga trianglar så blir det begreppsliga innehållet inte lättare – i själva verket blir det mer komplext.

När Newton påstod att han kunde skapa differential- och integralkalkylen därför att han ”stätt på jättars axlar” visade han sin erkänsla till det faktum att matematiska upptäckter vanligtvis sker gradvis och görs efter lång tids hårt arbete av många män och kvinnor. Det gradvisa i processen ska göras tydligt för eleverna. Som ett exempel kan man se på uttrycket Cartesiska

koordinater (rätvinkligt koordinatsystem), som tycks tillerkänna den franske 1600-tals-matematikern och filosofen René Descartes populariseringen av användandet av koordinatsystemet. Var Descartes källan till denna idé? Nej, det verkar inte så för koordinatsystem användes av renässanskonstnärer som ett tekniskt hjälpmedel för att erhålla perspektiv i målningar; av tidiga grekiska, romerska och kinesiska kartritare som använde rektangulära nät i sina kartritningar och av Egyptiska gravmålare som så tidigt som under den artonde dynastin (1552-1306 f Kr) konstruerade rutnät för att kunna flytta skisser från arbetsbordet till gravens väggar, figur 13.

Om och om igen i matematikens historia spelas ett liknande scenario upp, ett scenario som visar hur matematik utvecklats som vetenskap; en matematisk idé eller ett begrepp har studerats p g a sin användbarhet eller sin sociologiska betydelse, men successivt har dess innehåll blivit abstrakt och avlägsnat sig från den empiriska verkligheten. Ett exempel på detta illustreras i tre klassiska problem från den grekiska antiken.

- 1 Kubens fördubbling
- 2 Vinkelns tredelning
- 3 Cirkelns kvadratur

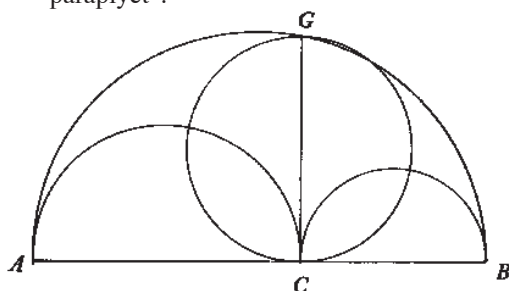
Dessa problem skulle lösas enbart med hjälp av linjal och passare. Det var 2000 år innan detta visade sig omöjligt. Men, under försöken att hitta lösningar gjordes ändå många matematiska framsteg. Däribland formulerades en teori om kägelsnitt och man utvecklade teorier om tredjegrads-, andragsrads- och transcendent kurvor. Ur dessa speciella problem som vi övertagit, har det uppstått ett antal geometriska problem, som kan utmana och fascinera vår tids elever. I försöken att hitta cirkelns kvadratur utvecklades exempelvis en teori för månformade figurer och problem liknande dessa uppstod:



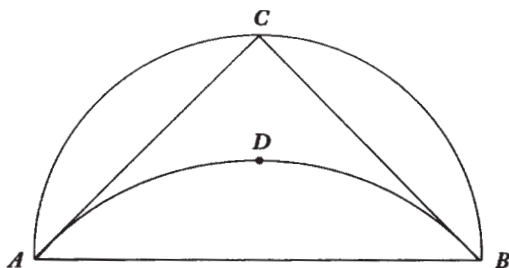
Figur 13. Rutnät ger underlag för överföring av skisser till grottvägg.

Problemen blir mer komplexa och kommer längre från verkligheten som följande exempel visar (Raphael, 1973).

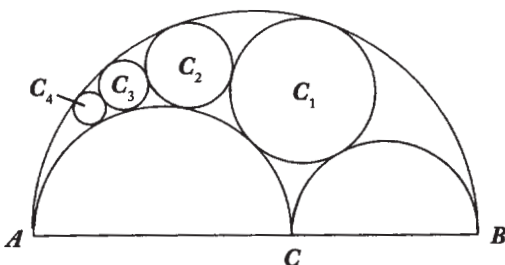
Låt A , C och B vara tre punkter på en rät linje. Konstruera halvcirkclar på samma sida av linjen med AB , AC och CB som diametrar. Området som begränsas av dessa tre halvcirkclar kan vi kalla "ett paraply". Genom punkten C dras en mot AB vinkelrät linje som skär den största halvcirkeln i punkten G . Visa att arean av den cirkel man kan konstruera med CG som diameter är lika stor som arean av "paraplyet".



I en halvcirkel med diameter AB , är bågen ADB inskriven. Området som begränsat av halvcirkeln och bågen kallas månskära. Visa att arean av månskäran $ACBD$ är lika stor som arean av den inskrivna triangeln ACB där $AC = CB$.



I ett "paraply" ligger cirkelarna $C_1, C_2, C_3, \dots$ sida vid sida. Visa att det vinkelräta avståndet från mittpunkten av den n :te cirkeln till linjen ACB är n gånger diametern för den n :te cirkeln.



När vi följer den kulturella, historiska och intellektuella vandringen av matematiska begrepp och tekniker är det viktigt att känna till och inse betydelsen av de sociala, politiska och ekonomiska krafter som har påverkat matematikens utveckling. Varför uppstod den deduktiva matematiken just i antikens Grekland? Varför ledde utvecklingen av den merkantila kapitalismen i 1300-talets Italien till en matematikens renässans? Hur påverkade boktryckarkonsten utvecklingen och spridningen av de matematiska idéerna? Är en nations matematiska kompetens betingad av dess välfärd? Påverkar krig inriktningen av ett lands matematiska aktivitet? Det är i betraktande av sådana frågor och deras svar som det dynamiska sambandet mellan matematik och samhälle uppstår.

Sammanfattning

Kunskapen om den pedagogiska betydelsen av vetenskapens och matematikens historia är inte ny. George Sarton, den berömda vetenskapshistorikern, argumenterade flitigt för detta. Vid en föreläsning 1953 formulerade Sarton ett budskap som är aktuellt idag:

I said that if you do not love and know science, one cannot expect you to be interested in its history; on the other hand, the teaching of the humanities of science would create the love of science as well as a deeper understanding of it. Too many of our scientists (even the most distinguished ones) are technicians and nothing more. Our aim is to humanize science, and the best way of doing that is to tell and discuss the history of science. If we succeed, men of science will cease to be mere technicians, and will become educated men. (Sarton, 1958)

Olyckligtvis har matematikens historia negligerats på senare år. Vid 1900-talets början var betydelsen av matematikens historia i relation till matematikundervisning erkänd. Nästan alla amerikanska universitet och lärarhögskolor erbjöd studier i ämnet, men gradvis har dess status minskat och enbart det matematiska innehållet har blivit fokus för undervisningen. En översikt över kursutbud vid amerikanska gymnasier och högskolor 1980-81 visade att endast 30% av dessa erbjöd kurser i matematikhistoria (IS-GHPM, 1982). I ljuset av detta kan man ironiskt nog notera att många yrkesutbildningar (juridik, medicin, arkitektur osv) under samma period kräver att de studerande läser kurser i historia inom respektive fält. Avsikten med denna ganska nyligen genomförda kursplaneförnyelse är att återigen fästa uppmärksamheten på att de olika vetenskapsgrenarna har ett mänskligt ursprung och en mänsklig tillämpning. Kanske är det också tid för en sådan omorientering när det gäller utbildningen i matematik.

Referenser

- Dolciani, M.P., Berman, S.L., and Wooten, W. (1970). *Modern Algebra and Trigonometry, Book 2*. Boston: Houghton Mifflin Co.
- International Study group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics (IS-GHPM). (1982). *Newsletter* (February 1982):3.
- Kline, M. (1962). *Mathematics: A cultural Approach*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co.
- Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition*. Washington, D.C.: NCTM.
- NCTM. (1969). *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Thirty first Yearbook. Washington, D.C.: Author.
- Raphael, L. (1973). "The Shoemaker's Knife." *Mathematics Teacher* 67, 319-23.
- Sarton, G. (1958). *Ancient and Medieval Science during the Renaissance*. New York: A.S. Barnes & Co.

5

Miniräknare

Att kunna utnyttja miniräknarens möjligheter har blivit ett viktigt mål för matematikundervisningen. I detta kapitel diskuteras den viktiga balansen mellan olika sätt att räkna och hur räknaren kan användas som räknetekniskt och metodiskt hjälpmedel.

I vår undervisning ska vi sträva efter att eleven

med förtrogenhet och omdöme (kan) utnyttja miniräknarens och datorns möjligheter.

I slutet av det femte skolåret ska eleven

ha grundläggande färdigheter i att räkna med naturliga tal – i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare.

I slutet av det nionde skolåret ska eleven

ha goda färdigheter i överslagsräkning och räkning med naturliga tal, tal i decimalform samt med procent och proportionalitet - i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare.

Kursplan i matematik

Bakgrund och motiv

Användningen av miniräknaren har hittills varierat mycket mellan olika lärare och skolor. Även i åk 7–9 har många lärare varit återhållsamma och istället låtit eleverna utföra beräkningarna huvudsakligen med traditionella algoritmer. Under de senaste åren har standardprovens utformning sannolikt påskyndat utvecklingen mot en större användning av miniräknaren framför allt vid problemlösning. När det gäller att använda miniräknaren som ett metodiskt hjälpmedel är dock många lärare fortfarande osäkra.

Som framgår av citaten har goda räknefärdigheter med miniräknare nu blivit ett viktigt mål i den nya kursplanen i matematik. Målen bör konkretiseras och preciseras i de lokala arbetsplanerna och i den enskilde lärarens undervisningsmål.

Attityder till miniräknaren

Många lärare är övertygade om att miniräknaren är ett bra hjälpmedel i matematikundervisningen. Den kan vara ett hjälpmedel vid rutinberäkningar och dessutom kan en genomtänkt och varierad användning av miniräknaren bidra till att stärka elevernas taluppfattning och ge bra tillfällen till övning, t ex i huvudräkning. Därigenom kan undervisning om och med miniräknaren faktiskt leda till att eleverna blir mindre beroende av miniräknaren när de ska utföra enkla beräkningar.

Många föräldrar, kanske i synnerhet de som lyckades bra i ”räkneskolan”, kan vara tveksamma till att miniräknaren introduceras tidigt i grundskolan. Bästa sättet att bemöta detta är naturligtvis att visa hur vi låter eleverna använda miniräknaren i skolan, vad eleverna kan lära sig med miniräknare som varit svårt eller omöjligt tidigare, samt påpeka miniräknarens begränsade tankeförmåga!

Olika beräkningsmetoder

Att först lära sig att ”räkna på riktigt”, dvs med traditionella algoritmer, innebär för många elever att de i alltför liten utsträckning ägnar sig åt problemlösning och kreativa utvecklande uppgifter. Genom att eleverna slipper att lägga alltför mycket tid och koncentration på beräkningssteget, hinner de lösa fler problem. För att eleverna inte ska bli slavar under miniräknaren istället för slavar under algoritmerna måste de få tillfälle att utveckla sin taluppfattning och sina färdigheter i huvudräkning. Olika skriftliga räknemetoder, som inte nödvändigtvis måste vara traditionella algoritmer, ska komplettera miniräknaren.

Miniräknarkunskap

För att eleverna med ”förtrogenhet och omdöme” ska kunna använda miniräknaren, krävs grundläggande kunskaper om dess användning och de olika tangenternas funktion. En möjlighet är att eleverna forskar fritt eller lär av varandra, men några grunder bör läraren uppmärksamma, t ex

ON/C - tangenten (eller motsvarande) kan rätt använd underlätta arbetet betydligt vid en felaktig inmatning.

$\ominus$ - tangenten har en annan innebörd än den eleverna tidigare vant sig vid. Tecknet $\ominus$ är i det här sammanhanget ett funktionstecken, vilket kan visas med inmatningen $3 \times \ominus \ominus \ominus$.

Varje gång vi trycker på tangenten ”gör den något” med de tal vi matat in.

En fråga som bör uppmärksammas är hur miniräknaren prioriterar räkneoperationerna. Vilket svar ger miniräknaren på inmatningen $5 + 3 \times 2$? En miniräknare som prioriterar korrekt ger svaret 11.

En miniräknare som ger svaret 16 har istället beräknat $(5 + 3) \cdot 2$.

Fördelen med minnesfunktionerna upptäcker eleverna snabbt om de får pröva på några enklare flerstegsproblem. Hur konstantfunktionen fungerar upptäcker de lätt om de t ex prövar med upprepad addition respektive multiplikation med 2. Rotteckentangenten kan kanske eleverna undersöka på egen hand medan vi bör vara lite försiktiga med $\%$ - tangenten. Den får inte bli en tangent som eleverna använder mekaniskt utan insikt i procentbegreppets grundläggande innebörd. Så småningom bör vi låta eleverna uppleva finessen också med denna funktion.

Ett räknetekniskt hjälpmedel

Naturligtvis ser vi miniräknaren i första hand som ett räknetekniskt hjälpmedel. Genom att miniräknaren snabbt och säkert utför rutinberäkningar kan elevens koncentration och tankar inriktas på andra delar av problemlösningsarbetet som t ex rita en bild eller figur, gissa och pröva, lösa ett enklare problem först, göra upp en tabell eller ett diagram, använda laborativa material eller modeller, arbeta baklänges, ställa upp en ekvation eller ett uttryck osv. Vi kan ägna mer tid åt att formulera problem. (Se kapitel 3 om problemlösning). Vi bör öka intresset för överslagsräkning och för att teckna de uttryck vars värde skall beräknas.

En annan fördel med miniräknaren är att vi kan arbeta mer med ”verklighetens siffror” istället för friserade tal som är anpassade till de färdigheter eleverna har i algoritmräkning. Eleverna bör också uppmärksammas på att man ofta kan nöja sig med ett ungefärligt svar så som vi ibland gör när vi gör en beräkning i vardagslivet.

Vi bör också låta eleverna märka att huvudräkning ibland är snabbare än uträkning med miniräknaren.

Exempel på elevaktiviteter

Två elever arbetar i par. Den ene räknar i huvudet och den andra använder miniräknaren. Vem är snabbast? Vilken typ av uppgifter går snabbast på miniräknaren? Vilken typ av uppgifter klarar huvudräknaren snabbast?

Uppgifter med ränta på ränta löser miniräknaren elegant åt oss om vi kan använda den på rätt sätt.

Du sätter in 4 000 kr och får 8% ränta på ränta. Hur mycket har du på banken efter 5 år?

$$1,08 \times 4\,000 \quad \text{⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞}$$

Med utgångspunkt från detta kan eleverna säkert klara följande uppgift.

Du har 300 kr i månadspeng. Varje månad höjs den med blygsamma 4%. Hur länge dröjer det tills du har dubbelt så stor månadspeng?

Ett metodiskt hjälpmedel

Det finns många möjligheter att använda miniräknaren som metodiskt hjälpmedel. Det är bara fantasin hos oss lärare som sätter gränser. Vi visar här några exempel som belyser möjligheterna.

Knappa in talet 5 474 och utför sedan en enda beräkning så att de båda 4:orna ersätts med nollor. Denna övning bidrar till förståelsen av positionssystemet.

Genom mata in $25 \text{ ⊕ ⊞ ⊞ ⊞ } \dots$ vandrar eleverna framåt med ”25-steg”. De ska tänka ut vilket tal som följer innan de trycker på ⊞ - tangenten för att kontrollera.

Med hjälp av konstantfunktionen för multiplikation kan eleverna öva upp sin säkerhet på multiplikationstabellerna eller varför inte ”femtons multiplikationstabell”.

$15 \times 3 \text{ ⊞ } 5 \text{ ⊞ } 2 \text{ ⊞ } 10 \text{ ⊞ } 6 \text{ ⊞}$ o s v. Även här skall eleven tänka ut vilket tal som kommer upp på displayen efter nästa tryck på ⊞ - tangenten.

Läraren eller en kamrat matar ”i smyg” in t ex $900 - 25 =$ och lämnar miniräknaren till en elev. Genom att upprepade gånger trycka på $\ominus$ - tangenten ska eleven tänka ut vad som händer och kunna förutsäga nästa tal. Uppgiften kan varieras för olika elever, helt enkelt genom att man frågar ”vill du ha ett lättare eller svårare uppgift?”.

$$720 - 35 \ominus \ominus \dots \quad \text{eller} \quad 12,4 - 0,75 \ominus \ominus \dots$$

Eleverna kan upptäcka, beskriva eller bekräfta enkla matematiska samband, t ex vad som händer med olika tal vid division med 10, 100, 1000 osv eller vad som händer när man dividerar ett tal med ett positivt tal mindre än 1, t ex 0,5.

Låt eleverna undersöka om det finns ett tal som multiplicerat med sig själv ger produkten 729. Om eleverna inte redan listat ut rottangentens funktion så kan man välja produkten 30, en uppgift på en helt annan nivå. Undersökningen kan utveckla elevernas förståelse av tal i decimalform och av multiplikation med två decimaltal.

Eleverna kan undersöka vilka mönster de kan hitta bland decimalerna när man tolkar bråkstrecket hos enkla bråk som ett divisionstecken. Börja t ex med att dividera 1 med 2, 4, 8, 3, 11 och 13.

Låt också eleverna undersöka hur man kan räkna med negativa tal på miniräknaren.

Ett motivationsskapande hjälpmedel

Att slippa det ibland tunga beräkningsarbetet med algoritmerna kan ge många elever en ökad motivation. För elever med matematiksvårigheter innebär det sannolikt en dramatisk förändring som ganska snabbt bör leda till en kvalitetshöjning i vår undervisning. Matematik kan nu i allt större utsträckning bli just matematik och mindre räkning.

Förhoppningsvis kan miniräknaren indirekt vara en hjälp på vägen mot att leva upp till kursplanens intentioner, t ex ”en kreativ och undersökande aktivitet som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition”. Genom att ta uppgifter direkt från verkligheten, t ex ur tidningar, kan vi visa användningen av matematik utanför skolan och på det sättet också öka elevernas motivation.

Färdighetsträning, t ex överslagsräkning, kan eleverna bli mer motiverade att öva, om de snabbt kan få besked från miniräknaren, se elevuppgift på nästa sida.

Vilket av talen i rutan är det bästa närmevärdet vid beräkningen?

- a) $6,85 \cdot 5,7$
- b) $18,8 \cdot 32,6$
- c) $1,03 \cdot 3,87$
- d) $0,7 \cdot 0,8$

0,5	4	40
60	200600	

Ett individualiserande hjälpmedel

Vid problemlösning kan det avslutande beräkningssteget anpassas till olika elevers förutsättningar genom att eleverna tänjer sin huvudräkningsförmåga så långt som möjligt, men alla kan lösa uppgiften genom att miniräknaren finns till hands. Vid övning i huvudräkning kan eleven anpassa svårighetsnivån på egen hand genom att själv mata in uppgifter, försöka att lösa dem med huvudräkning och sedan kontrollera. Gränserna för huvudräkning, skriftliga räknemetoder och miniräknar användning bör få vara diffusa och olika för olika elever. Många av de uppgifter som vi nämnt ovan kan varieras av läraren eller eleven själv, så att de får lämplig svårighetsgrad.

- Vilka erfarenheter har du själv av miniräknaren i matematikundervisningen a) som räknetekniskt hjälpmedel b) som metodiskt hjälpmedel?
- Låt gärna eleverna diskutera följande frågeställning i smågrupper. Behöver vi ha någon matematikundervisning i skolan nu när det finns miniräknare? I vilka sammanhang och i vilken omfattning skall miniräknaren användas?
- Även om vi inser att vi i ökad utsträckning ska låta eleverna använda miniräknare så kan kanske elevernas föräldrar ändå hävda att ”de skall väl ändå lära sig att räkna på vanligt sätt först”. Vad svarar du då?
- I texten påpekas att gränserna mellan huvudräkning, skriftliga räknemetoder och miniräknar användning kan se olika ut för olika elever. Hur tolkar du det?
- En ökad användning av miniräknaren kan innebära förändringar av elevernas matematikkunnskap. Diskutera möjligheter till förbättringar och faror för försämringar.
- I texten ovan påstås att ökad användning av miniräknaren kan leda till att eleverna blir mindre beroende av miniräknare. Hur ser du på detta paradoxala påstående?

Elevaktiviteter

Fula fyror och fina femmor

I de första uppgifterna ska du försöka att ta bort alla ”fula fyror”.

Mata först in talet...	...och skriv här vilket tal du subtraherar med...	...för att få svaret
---------------------------	--	-------------------------

$$346 - \underline{\hspace{2cm}} = 306$$

Kontrollera med miniräknare att du gjorde rätt!

1. Gör på samma sätt med de här uppgifterna. Kontrollera med miniräknaren om du valt rätt tal.

$$734 - \underline{\hspace{2cm}} = 730 \quad 1\,546 - \underline{\hspace{2cm}} = 1\,506$$

$$428 - \underline{\hspace{2cm}} = 28 \quad 1\,204 - \underline{\hspace{2cm}} = 1\,200$$

$$414 - \underline{\hspace{2cm}} = 10 \quad 4\,624 - \underline{\hspace{2cm}} = 620$$

$$548 - \underline{\hspace{2cm}} = 508 \quad 2\,444 - \underline{\hspace{2cm}} = 2\,000$$

$$944 - \underline{\hspace{2cm}} = 900 \quad 4\,434 - \underline{\hspace{2cm}} = 30$$

2. Addera med ett lämpligt tal för att få bara ”fina femmor”.

$$535 + \underline{\hspace{2cm}} = 555 \quad 5\,255 + \underline{\hspace{2cm}} = 5\,555$$

$$155 + \underline{\hspace{2cm}} = 555 \quad 4\,555 + \underline{\hspace{2cm}} = 5\,555$$

$$353 + \underline{\hspace{2cm}} = 555 \quad 2\,454 + \underline{\hspace{2cm}} = 5\,555$$

3. Se upp! Subtrahera för att få bara ”fina femmor” i svaret.

$$575 - \underline{\hspace{2cm}} = 555 \quad 6\,565 - \underline{\hspace{2cm}} = 5\,555$$

$$758 - \underline{\hspace{2cm}} = 555 \quad 8\,755 - \underline{\hspace{2cm}} = 5\,555$$

$$975 - \underline{\hspace{2cm}} = 555 \quad 7\,657 - \underline{\hspace{2cm}} = 5\,555$$

4. Gör nya uppgifter med tal i decimalform, tex

$$3,46 - \underline{\hspace{2cm}} = 3,06 \text{ osv}$$

Hundrakompisar

Mata först in talet...	...och skriv här vilket tal du adderar med...	...för att få svaret
---------------------------	--	-------------------------

$$75 + \underline{\hspace{2cm}} = 100$$

Kontrollera med miniräknare att du gjort rätt!

1. Gör på samma sätt med de här uppgifterna.

$$80 + \underline{\hspace{2cm}} = 100 \quad 85 + \underline{\hspace{2cm}} = 100$$

$$30 + \underline{\hspace{2cm}} = 100 \quad 55 + \underline{\hspace{2cm}} = 100$$

$$92 + \underline{\hspace{2cm}} = 100 \quad 86 + \underline{\hspace{2cm}} = 100$$

$$47 + \underline{\hspace{2cm}} = 100 \quad 69 + \underline{\hspace{2cm}} = 100$$

2. Arbeta gärna tillsammans med en kamrat. Turas om att mata in ett tal, lämna över miniräknaren och låt kamraten försöka att addera rätt tal så att summan blir 100. Öva så att ni blir säkra på hundrakompisar!

3. Nu kanske du vill försöka att hitta tusenkompisarna också.

$$350 + \underline{\hspace{2cm}} = 1\,000 \quad 870 + \underline{\hspace{2cm}} = 1\,000$$

$$525 + \underline{\hspace{2cm}} = 1\,000 \quad 695 + \underline{\hspace{2cm}} = 1\,000$$

$$490 + \underline{\hspace{2cm}} = 1\,000 \quad 725 + \underline{\hspace{2cm}} = 1\,000$$

$$399 + \underline{\hspace{2cm}} = 1\,000 \quad 502 + \underline{\hspace{2cm}} = 1\,000$$

4. Gör nya uppgifter med tal i decimalform, tex

$$0,75 + \underline{\hspace{2cm}} = 1,00 \text{ osv}$$

Hoppa lagom långt

Efter uträkningen får du ett tal som ligger mellan de båda talen till höger, se exempel.

Mata först
in talet...

...och skriv här vilket tal
du adderar med...

...för att svaret ska
ligga mellan ...

518 + _____ = _____ 720 _____ 760

Gör en uppskattning av summan.

Kontrollera med miniräknare.

Ligger ditt svar mellan de båda talen till höger?

1. Gör på samma sätt med de här uppgifterna.

245 + _____ = _____

310 _____ 350

775 + _____ = _____

1 000 _____ 1 100

654 + _____ = _____

910 _____ 950

2. Nu ska du subtrahera så att du hoppar lagom långt!

384 – _____ = _____

250 _____ 280

725 – _____ = _____

430 _____ 490

999 – _____ = _____

567 _____ 587

3. Multiplicera det första talet med en lämplig faktor.

40 x _____ = _____

300 _____ 350

75 x _____ = _____

900 _____ 1 000

17 x _____ = _____

200 _____ 250

Försök också att få produkten av två faktorer att ligga mellan två bestämda hundratal.

4. Gör egna liknande uppgifter med tal i decimalform.

Ändra talets storlek

Gör en operation så att 8 i talet ändras till 3.

1. Skriv den operation som du ska göra och kontrollera att du gjort rätt med hjälp av miniräknaren.

684 _____

3 809 _____

6,8

14,28 _____

2. Ändra 4 till 7. Skriv på samma sätt den uträkning som du ska göra och kontrollera med miniräknaren.

8 492 _____

4 889 _____

36,48 _____

3,04 _____

3. Ändra alla 9:or till 5:or. Gör på samma sätt som ovan.

3 979 _____

49 093 _____

39,92 _____

96,49 _____

4. Hitta på egna uppgifter och byt med en kamrat. Gör t ex några uppgifter där alla 2:or ska ändras till 6:or.

Samma svar på flera sätt

1. Mata in två tal så att likheten stämmer. Försök att hitta minst 4 olika möjligheter. Kontrollera med miniräknaren.

$$___ \times ___ = 40$$

$$___ \times ___ = 40$$

$$___ \times ___ = 40$$

$$___ \times ___ = 40$$

2. Gör på samma sätt med de här uppgifterna.

$$___ \times ___ = 9$$

$$___ \times ___ = 9$$

$$___ \times ___ = 9$$

$$___ \times ___ = 9$$

$$___ \times ___ = 7,5$$

$$___ \times ___ = 7,5$$

$$___ \times ___ = 7,5$$

$$___ \times ___ = 7,5$$

3. Nu ska du istället beräkna en kvot. Kontrollera genom att dividera med hjälp av miniräknaren.

$$___ / ___ = 3$$

$$___ / ___ = 3$$

$$___ / ___ = 3$$

$$___ / ___ = 3$$

$$___ / ___ = 1,5$$

$$___ / ___ = 1,5$$

$$___ / ___ = 1,5$$

$$___ / ___ = 1,5$$

$$___ / ___ = 0,75$$

$$___ / ___ = 0,75$$

$$___ / ___ = 0,75$$

$$___ / ___ = 0,75$$

4. Arbeta tillsammans med en kamrat. Fortsätt att hitta på egna uppgifter på samma sätt som ovan. Kontrollera med miniräknaren!

Litteratur

- Anderberg, B. (1983). Från 24 till 100 med miniräknare. *Nämnnaren* 9(4), 34-35.
- Anderberg, B. (1984). Är miniräknaren något att räkna med? *Nämnnaren* 10(3), 10-13.
- Apiola, H. (1984). Så här använder jag miniräknaren på lågstadiet. *Nämnnaren*, 10(3), 52-53.
- Aronsson, R. & Johansson, J. (1994). Uppslaget: Multiluffarschack. *Nämnnaren* 21(4), 28-29.
- Bach, F. m fl (1990). Miniräknaren i Standards. *Nämnnaren* 17(3-4), 73-76.
- Björk, L-E. & Brolin, H. (1986). Färdigheter och förståelse. *Nämnnaren* 13(2-3), 26-29.
- Björk, L-E. & Brolin, H. (1990). Matematiken och de nya verktygen. *Nämnnaren* 17(3-4), 63-67.
- Björkstén, C. & Åman, L. (1984). Laborativ matematik med hjälp av miniräknare. *Nämnnaren* 10(3), 34-35.
- Dunkels, A. (1984). Problemavdelningen. *Nämnnaren* 10(3), 56-59.
- Ekström, W. m fl (1990). Samarbete – Självkänsla – Ansvar. *Nämnnaren* 17(2), 18-21.
- Forsberg, B. (1992). Miniräknaren i min klass. *Nämnnaren* 19(3), 26-30.
- Johansson, B. (1986). Miniräknaren löser inte problemen. *Nämnnaren*, 13(2-3), 24-25.
- Johansson, B. (1991). Forskning och utvecklingsarbete i matematikdidaktik i Sverige. *Nämnnaren* 18(3/4), 47-53.
- Johansson, B. (1991). Två spelare – en miniräknare. *Nämnnaren* 18(3/4), 94-95.
- McIntosh, A. m fl (1995). UPPSLAGET: Olika vägar till målet. *Nämnnaren* 22(4), 24-25.
- Miniräknarartiklar införda i *Nämnnaren* (1976-1983). *Nämnnaren* 10(3), 28.
- Nämnnaren* (1984). Tema Miniräknaren. *Nämnnaren* 10(3).
- Nerman, K. & Vedin, B. (1985). Miniräknaren - ett naturligt inslag på lågstadiet. *Nämnnaren* 12(2), 16-18.
- Orstadius, A. (1984). Är alla försök dömda att lyckas? *Nämnnaren* 10(3), 24-28.
- Persson, I. O. (1995). Vad tänker lärare om miniräknare? *Nämnnaren* 22(4), 13-16.
- Reys, B. & Reys, R. (1995). Perspektiv på Number Sense och taluppfattning. *Nämnnaren* 22(1), 28-33.
- Reys, B. m fl (1995). Vad är god taluppfattning? *Nämnnaren* 22(2), 23-25, UPPSLAGET, 25-29 och Problemavdelningen, 51.
- Reys, B. m fl (1995) Svenska elevers taluppfattning. *Nämnnaren* 22(3), 34-40.
- Reys, B., Reys, R. & Emanuelsson, G. (1995). Meningsfulla tal. *Nämnnaren* 22(4), 8-12.
- Rystedt, E. (1991). Miniräknaren – metodiskt hjälpmedel. *Nämnnaren* 18(3/4), 110-114.
- Sjöström, H. (1986). Gatan som klassrum eller Verkligheten som läromedel. *Nämnnaren* 13(2-3), 81-83.
- Trankjær, I. (1990). Hvordan vil vi regne den ud i 90'erne? *Nämnnaren* 17(2), 34-38.
- Unenge, J. (1985). Huvudräkning i flera dimensioner. *Nämnnaren* 12(1), 19-21.
- Anderberg, B. (1991). Praktiskt och metodiskt arbete med miniräknare. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Tal och räkning 2*. Lund: Studentlitteratur, 119-133.
- Björk, L-E. & Brolin, H. (1984). *ARK-projektet: En sammanfattande rapport för verksamheten 1976-1983*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommentarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bidrag till Sveriges matematiklärarförenings sommarkurs i Mulsjö 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T. (Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning*. Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
- Hedén, R. (1991). Miniräknaren i den grundläggande matematikundervisningen. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Tal och räkning 2*. Lund: Studentlitteratur, 135-140.
- Hedén, R. (1994). *Miniräknaren eller algoritmer i den elementära matematikundervisningen*. Rapport nr 1995:2, Högskolan i Falun/Borlänge.
- Johansson, H. & Skoogh, L. (1994). *Miniräknar-metodik*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Sandahl, A. & Unenge, J. (1991). Barn lär med miniräknare. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Tal och räkning 2*. Lund: Studentlitteratur, 103-117.
- Unenge m fl (1989). Rutinfärdigheter. *Täljaren*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Faragher, R. et al (1994). *Calculators and Computers in Mathematics Education*. Maths Works. Adelaide, South Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.
- NCTM (1992). *Calculators in Mathematics Education*. 1992 Yearbook. Reston, Va: Author.

Miniräknaren i min klass

Björn Forsberg

Är det så att användning av miniräknare förändrar elevernas inställning till matematik. Här redogörs för en klassrumsstudie som gjordes 1991 i samband med en matematikdidaktikkurs på 10 poäng. Resultaten visar på en bättre arbetssituation och ökat intresse för matematik. De svaga eleverna har störst fördel av miniräknaren.

Miniräknaren slår inte igenom

Miniräknarens vara eller inte vara i den svenska grundskolan har diskuterats i många år. Trots att miniräknare idag är både billiga och var mans egendom i hemmen har den haft svårt att slå igenom i det vardagliga arbetet.

En orsak till den ringa framgången i våra klassrum kan vara att det tidigare rättesnöret för undervisningen i grundskolan, Lgr 80, inte nämnde miniräknaren vid namn, utan endast att *eleverna genom undervisningen skall förvärva säkerhet i numerisk räkning med och utan hjälpmedel, färdigheter i huvudräkning och överslagsräkning* (Lgr 80, s 98).

En annan viktig orsak är att matematikundervisningen traditionellt har haft algoritmräkning som ett av de viktigaste momenten. Att abrupt rycka undan en av grundvalarna för ett viktigt skolämne låter sig inte göras så enkelt, allrahelst som varken lärare eller läromedel har haft någon klar och genomtänkt strategi för vad som ska ersätta algoritmerna och hur ämnet kan byggas upp från första årskursen.

Flera undersökningar har påvisat att miniräknaren är ett lämpligt redskap för elever i olika åldrar och för olika delar inom matematikundervisningen. I det brittiska CAN-projektet (Calculator Aware Number) har yngre elever, från skolstarten vid 5 års ålder, tillgång till miniräknaren. I rapporten redogörs för hur eleverna snabbt tar sig fram till komplicerade problem från sitt vardagsliv. Eleverna behöver inte lägga ned möda på algoritminläring utan kan koncentrera sig på taluppfattning, att skapa sig egna funktionella algoritmer och tillämpa ett undersökande arbetssätt (Walsh, 1989).

Inom det svenska ARK-projektet (Analytisk av Räknedosans Konsekvenser) har man undersökt mellanstadieklasse, som arbetat med miniräknare (Hedré, 1987). Dessa fick mycket goda resultat vad gällde viktiga grundkunskaper i matematik. Bl a undersöktes:

- bedömning av tals storleksordning
- överslagsräkning
- val av räkneoperation.

Artikeln har tidigare varit införd i *Nämaren* 19(3), 1992.

Miniräknaren anses av många vara ett alltför effektivt räkneinstrument.

–Det är fusk att använda miniräknare, då lär man sig inget, sa en elev. Ändock är det ett hjälpmedel som idag de flesta vuxna använder i stället för nedtecknade algoritmer med papper och penna. Allt talar för att dagens unga generation kommer att använda miniräknare (och annan modern teknik) ännu mera i framtiden än dagens vuxna.

Med miniräknarens hjälp finns en reell chans att förverkliga kursplanens primära mål, nämligen att eleverna ska lära sig lösa vardagsproblem. Nu behöver de inte fastna på uträkningarna, utan kan koncentrera sig på problemlösningen.

Uppläggning av ett försök

Syftet med mitt försök var att föra in miniräknaren som ett ordinarie verktyg i den dagliga undervisningen tillsammans med det vanliga läromedlet. Följande punkter studerades särskilt:

- 1 Vad händer med stämning, koncentration och attityder till ämnet matematik när ett såpass svårt och ständigt närvarande moment som algoritmräkning ersätts av miniräknaren?
- 2 Att lösa en benämnd uppgift innebär inte bara en, utan flera svårigheter att klara av. En av dessa svårigheter är själva uträkningen, vilket vid svårare uppgifter löses med hjälp av en algoritm. Vilken betydelse får det för de enskilda eleverna att de slipper utföra algoritmer och i stället kan koncentrera sig på text och matematikförståelse i uppgifterna?
- 3 Missbrukar eleverna miniräknaren så att de använder huvudräkning allt mindre och succesivt ökar bruket av miniräknaren?

Metod och genomförande

Min klass i åk 6 hade från början 15 elever. En elev flyttade efter endast några veckor och en invandrarelev hade så stora problem med språket och grundläggande taluppfattning, att han inte ingick i undersökningen. Återstod 13 elever, 10 pojkar och 3 flickor. Tre månader hade de fri tillgång till var sin miniräknare. Räknaren låg i bänken och kunde tas fram vid behov.

Någon dag innan försöket startade fick eleverna svara på en enkät som behandlade deras attityder till matematik, till miniräknaren samt elevernas tillgång till och kunskap om miniräknaren. En ny enkät gavs efter periodens slut. Den andra enkäten hade något annorlunda frågeställningar än den första för att se om attityderna till ämnet eller miniräknaren ändrades eller om det intensiva bruket av miniräknaren resulterade i ändrad användning av miniräknaren på fritiden.

För att kunna analysera och reflektera över mina egna attitydförändringar, över elevernas spontana kommentarer, över nya frågeställningar, funderingar mm, skrev jag dagbok i samband med varje matematiklektion. Jag hade också korta, informella, samtal med eleverna dagligen. Avsikten var att söka utröna om de hade svårigheter med att använda miniräknaren, om det uppstod nya och oväntade problem vid själva problemlösningen, vid vilka uppgifter miniräknaren kom till användning och att överhuvudtaget söka pejla stämningar och attityder till miniräknaren och ämnet matematik.

Klassen arbetade på sedvanligt sätt med hjälp av det ordinarie läromedlet. Där finns, som i alla andra läroböcker, en blandning av benämnda uppgifter och traditionella algoritmuppgifter av typen ”Ställ upp och räkna ut”. Vid de förstnämnda uppgifterna räknade eleverna på vanligt sätt, förutom att de fick använda miniräknaren för beräkningar som

i vanliga fall utförs med algoritmer. Vid de sistnämnda uppgifterna gjorde eleverna först en approximativ beräkning vilken tecknades i häftet och därefter en exakt uträkning med hjälp av miniräknaren, vilken då fungerade som facit till överslagsberäkningen

Resultat

Arbetsro och arbetsglädje – förbättrade attityder till matematik

Enkätsvaren visar att de flesta elever före perioden tyckte att ämnet matematik var "skapligt intressant". Ingen påstod sig direkt ogilla ämnet. Efter periodens slut anser sig ytterligare tre elever gilla ämnet. Alltså en förskjutning mot ökad popularitet för ämnet. Vid de små, individuella, elevsamtalen påtalades ofta att ämnet nu upplevdes som roligare. En känsla som snabbt spred sig till de flesta eleverna.

– *Får jag ta hem och jobba extra? Du, det har jag aldrig frågat förut.*

– *Nu räknar jag hela timmen.*

Eleverna tyckte själva att de fick mera uträttat på lektionerna. De störande avbrotten, vilka tidigare varit vanliga, försvann nästan helt. De flesta räknade intensivt större delen av lektionerna. Detta får också stöd av elevernas svar på den andra enkäten där 9 st elever svarar "ja" på frågan om de tycker de har lärt sig mer nu än tidigare.

Även i dagboken finns liknande tankar :

"Nästan 100 % av pratet handlar om matte."

"Sjuk igår. Vikarien förbluffad över att ha kommit till en "ny" klass."

Olika effekter för olika elever

Förutom att matematiklektionerna blev lugnare med mer arbete och utan störande moment, vilket kom samtliga elever till del, kunde det ju tänkas att vissa elever hade

större fördel än andra. Ingen elev i klassen var speciellt högpresterande. Ingen var heller särskilt lågpresterande, även om 3-4 elever hade påtagliga problem. Under hela låg- och mellanstadieperioden har två elever presterat mera än de övriga.

Samtliga elever var positiva till räknaren. Detta uttrycktes på många sätt vid de små intervjuerna. De mest positiva intrycken kom från de elever, som tidigare haft störst problem med matematik.

– *Nu har jag rätt på nästan varje uppgift.*

– *Jag har aldrig räknat så här många sidor utan fel förut.*

– *Varför har vi inte fått använda miniräknaren förut?*

De två elever som klarat sig bäst tidigare var mera återhållsamma i sina kommentarer:

– *Jag tycker jag hinner lika mycket nu som förr.*

– *Tänk om jag glömmer bort "uppställning" nu.*

Att just de två varit minst positiva till förändringen visar också svaren på fråga 4 på den andra enkäten vilken lyder: *Tror du att du har lärt dig mer matte nu än tidigare?* Nio elever svarade "ja", två svarade "nej" och två var osäkra. De två som svarade "nej" är de två duktigaste(?) eleverna.

När används miniräknaren?

För att söka utröna vid vilka uppgifter miniräknaren kom till användning togs ämnet upp vid elevsamtalen vid några diskussioner med hela klassen och slutligen i enkät II.

Eleverna visade gott förnuft och verkade inte utnyttja miniräknaren vid alltför lätta uppgifter. Endast vid ett tillfälle berättade en flicka hur hon kommit fram till ett resultat genom att slå in enkla additioner på miniräknaren. För övrigt var samstämmigheten

stor ”var gränsen gick” för att det ska vara befogat att utnyttja miniräknaren. Fråga 7 på enkät II lydde: *När använder du inte miniräknaren?* Den besvarades unisont:

–När det är lätta tal, t ex $6 \cdot 8 = 48$.

–När det är plus tar jag inte miniräknaren.

–Lätta divisioner och gånger.

Tidvis användes miniräknaren så sällan att eleverna själva blev förvånade:

–Jag har inte tagit fram min miniräknaren på jättelänge.

–Fastän vi får, så använder jag den sällan.

Diskussion

Att värdera ett försök i en enda klass, därtill på endast 13 elever, och under så kort tid som tre månader, är inte lätt. Utifrån detta bör kanske inte alltför långtgående slutsatser dras.

Hur ärligt besvarar eleverna en enkät? Min erfarenhet är att de ibland svarar som de förväntas svara. Hur objektiv är jag som klasslärare? Efter drygt två år i klassen och utan andra, samtida, klasser att jämföra med, växer man ihop med klassen. Eleverna anpassar sig till läraren och läraren anpassar sig till eleverna. Detta sker sakta och omärkligt. Allt för att skapa ett så drägligt arbetsklimat som möjligt i klassrummet. Kanske hade en utomstående person sett andra effekter vid införandet av miniräknaren i undervisningen.

Klassen hade under de två tidigare mellanstadieåren varit måttligt intresserade av ämnet. Lektionerna hade innehållit många störningsmoment. Eleverna hade svårt med koncentrationen och minsta möjlighet till ”annan aktivitet” togs. En kraftigt bidragande orsak var att flera elever hade läs- och skrivsvårigheter.

Enligt fråga 2 i enkät I, tyckte de flesta att ämnet var ”skapligt intressant”. Ingen påstod sig ogilla ämnet även om jag väntat mig att 2-3 elever skulle besvarat frågan med ”gillar ej”.

Vanliga benämnda uppgifter innehåller för de flesta elever tre svårigheter:

- Förstå textens budskap
- Bestämma lämpligt räknesätt och ingående tal
- Utföra beräkningen

Många elever har stora svårigheter med alla tre stegen. För dessa är varje benämnd uppgift en hög och besvärlig tröskel att ta sig över. Med miniräknarens hjälp kan åtminstone det tredje steget klaras galant, vilket borde överföra både tid och koncentration till läs- och matematikförståelsen. Förutom den psykologiska uppmuntran det innebär att veta att en svårighet redan är avklarad.

Vår lärobok bygger, enligt min värdering, på ett elevaktivt arbetssätt. Relativt få färdiguppställda algoritmer, men desto fler problemuppgifter, vilka söker anknytning till elevernas verklighet. Uträkningarna är av traditionell typ och svårighetsgrad. Texten är ganska svår för svaga läsare. Klassen har arbetat med detta läromedel sedan år 4 och är väl inskolde i arbetsgängen.

Att miniräknaren har bidragit till att skapa en mera positiv arbetsmiljö är egentligen inte så konstigt. Är man som elev osäker på ett såpass stort moment inom ämnet innebär det oupphörliga svårigheter. Inte sällan är det samma elever som har läs- och skrivsvårigheter. Dessa elever har svårt att orka koncentrera sig en hel lektion när det mesta sker ”i uppförsbacke och motvind”. Att då ta till andra, mer störande, sysselsättningar är ett sätt att ”lätta på trycket” och få tiden att gå.

Ofta är det ett fåtal elever som har nyckeln till större problem och i detta fall träffade det rätt och förbättrade arbetssituationen till gagn för hela klassen. Eftersom eleverna hade alternativ till algoritmerna, behövde jag inte ta tid i anspråk för att hjälpa till med detta. Istället koncentrerades hjälpen till text och problem. De elever som behövde

hjälp fick det. Faktiskt gick det att få tid att sitta hos vissa elever så lång tid som jag egentligen tyckte behövdes, men annars sällan hinner. Elevkommentarer visar samma upptäckt:

- *Du behöver inte sitta här på nästa tal.*
- *Man får fortare hjälp när man behöver det.*

De svagare eleverna har känt att de vunnit mest på att få tillgång till miniräknaren och de duktigare har varit mindre positiva. Två av eleverna har de tidigare grundskoleåren hela tiden varit ett steg framför den övriga klassen. De har haft ambitioner, starkt stöd från hemmen och upplevts av de andra som ”plugghästar” i den annars inte särskilt studiemotiverade gruppen. Miniräknaren ersätter algoritmräkning och ingenting annat. Är det något som dessa två elever varit duktiga på så är det ett lugnt, tryggt och metodiskt manipulerande med siffror vid algoritmräkning. Med miniräknarens införande har deras fördel av algoritmkunskaper plötsligt raderats ut. Klasskamraterna har fått en chans att komma ikapp. Naturligtvis har de svagare eleverna fortfarande ett långt avstånd fram till de duktigare, men de förstnämnda uttrycker verkligen en känsla av att ha fått vara med om ett ”lyft”, något som de två duktigare inte gör.

De duktigare har vant sig vid en viss position inom klassens matematikhierarki. Visserligen sker alltid förändringar inom hierarkin, men de sker vanligtvis långsamt och mer omärkligt för eleverna. I detta fall skedde en snabb framryckning från ”de bakre leden”. De duktigare eleverna kände sin position hotad, utan att kunna göra så mycket åt saken.

Kanske även de inser att de i längden har mycket att vinna genom att utnyttja miniräknaren. Samtliga elever i klassen var överens om att de ville använda räknaren även i fortsättningen.

En kritik som funnits hela tiden som miniräknare har använts i skolorna, gäller förmågan till huvudräkning. Det har hävdats att eleverna efter en tid ”slår in” allt enklare uppgifter och nödvändiga färdigheter i huvudräkning hotas.

Huvudräkning är mycket viktig och måste tränas i meningsfulla sammanhang. Under periodens gång diskuterades i klassen vilka uppgifter som borde klaras i huvudet och vilka som passade för miniräknaren. Eleverna var samstämmiga i sina åsikter om detta:

- *Det vi klarade i huvudet förr måste vi ju kunna klara nu också.*

Här är det säkert en viktig förutsättning att eleverna har skolats in i att utnyttja huvudräkning som ett alternativ till algoritmen. Att låta eleverna räkna färdiguppställda uppgifter först approximativt i huvudet och sedan exakt med hjälp av miniräknaren är ett sätt att träna både huvudräkningsförmåga och överslagsräkning.

Tiden för undersökningen, 3 månader, känns dock alltför kort för att det ska gå att se några tydliga tendenser till förändringar.

Referenser

- CAN-project. (1989). *The Second Year of the CAN-project*. University of Cambridge.
- Forsberg, B. (1992). *Miniräknaren i min klass*. Studieuppgift i 10 poängs matematikdidaktikkurs, Institutionen för pedagogik, Göteborgs Universitet.
- Hedén, R. & Köhlin, K. (1983). *Miniräknaren på mellanstadiet*. Slutrapport från RIMM-gruppens arbete inom Skolöverstyrelsens ARK-projekt. Högskolan i Falun-Borlänge.
- Läroplan för grundskolan. (1980). Allmän del. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Sandahl, A. & Unenge, J. (1990). *Med miniräknare från början*. Erfarenheter från ett försök på lågstadiet. ALM-rapport nr 5. Högskolan i Jönköping.

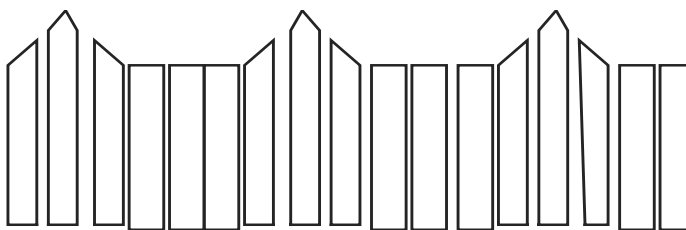
6

Talmönster

Mönster möter vi varje dag. Geometriska mönster ser vi i golvplattor, murar och dekorationer, talmönster i almanackor, reklammaterial och tabeller. Studier av mönster ska fördjupa elevers omvärldsuppfattning, utveckla deras rums- och taluppfattning och vara en stimulerande förberedelse för algebra och funktioner. Detta kapitel innehåller huvudsakligen talmönster.

Att upptäcka mönster

Redan när små barn trär olikfärgade pärlor på ett snöre för att göra ett halsband, vill de ofta rent intuitivt skapa ett vackert mönster. En tårtdekoration eller mönstret i en trasmatta kan också vara exempel på hur vi försöker att göra vackra geometriska mönster. Om mönstret återfinns på ett lapptäcke eller en stickad tröja upphöjer vi verksamheten till konst och hantverk. Geometriska mönster på en tegelvägg eller stensättares arbete med gatsten är andra exempel. Regelbundenheten i ett villastaket ger ytterligare prov på geometriska mönster som vi möter i vår omgivning.

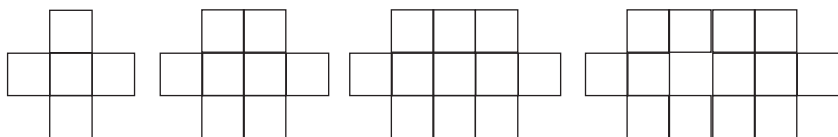


Talmönster har intresserat människor i alla tider. Hur fortsätter t ex följden

2, 4, 8, 16, 32 ...

och vad brukar vi kalla dessa tal? Det markeras i den nya kursplanen att i slutet av femte skolåret ska eleverna kunna upptäcka talmönster (se s 207). Det finns alltså anledning att studera detta område lite noggrannare. Med några exempel vill vi visa hur talmönster kan

illustreras med bilder som därigenom kan vara ett stöd vid generalisering och för att nå förståelse av variabelbegreppet. Talföljden 5, 8, 11, 14 ... kan t ex illustreras med det här geometriska mönstret:



Vi ser att antalet kvadrater tycks öka med 3 hela tiden. I den första figuren finns det $2 + 3$ st, i den andra $2 + 3 + 3 = 2 + 2 \cdot 3$, i den tredje $2 + 2 \cdot 3 + 3 = 2 + 3 \cdot 3$ osv. Vi kan beskriva antalet kvadrater i figur nummer n som $2 + n \cdot 3$. Kontrollera fortsättningen för $n = 4, 5, 6$ osv mot det geometriska mönstret. Om eleverna, med visst stöd, själva kan upptäcka detta, bör de kunna se en poäng med bokstavsuttryck. Det är ju ganska listigt att vi med det matematiska symbolspråket kan ersätta en beskrivning av mönstret med ord med ett mycket kortfattat generellt uttryck.

Uppgifter av den här typen kan sannolikt vara en hjälp för eleverna att generalisera och nå förståelse för användning av bokstäver och formler och även ge svar på den vanliga elevfrågan – ”Vad är det egentligen bra för, det där med bokstäver i matte?”

I förlängningen kan eleverna få möta talmönster och formelsamband som är vackra, t ex:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2, n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

Kan likheten verkligen vara sann för varje värde på det naturliga talet n . Låt oss kontrollera för $n = 4$. Värdet för de båda uttrycken blir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

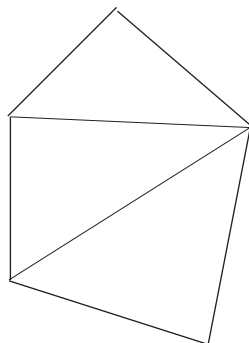
$$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2 = 100$$

Sambandet förefaller stämma men att bevisa det generellt är en matematisk utmaning som vi avstår från här (se t ex Bondesen, 1983).

Vinkelsummor i månghörningar

Ibland kan vi upptäcka en geometrisk formel genom att studera samband i en värdetabell. Om eleverna vet att vinkelsumman i en triangel är 180° så kan de dela in ett polygonområde i trianglar och studera hur vinkelsumman växer när vi ökar antalet hörn. En femhörning kan t ex delas in i tre triangelområden och vinkelsumman är således $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

Hur stor är vinkelsumman i en sexhörning? Om eleverna för in resultaten av sina undersökningar i en värdetabell kan de själva komma fram till det generella sambandet.



Antal hörn	3	4	5	6	7
Vinkelsumma	180	360	540	720	...

En månghörning kan delas in i trianglar, där varje triangel har vinkelsumman 180° . Antalet trianglar är antalet hörn minskat med 2. Detta är en beskrivning som räcker och duger för att bestämma vinkelsumman i varje upptänklig månghörning. Men i matematiken brukar man gå vidare och beskriva detta samband i en formel.

Om antalet hörn betecknas med bokstaven n så får vi vinkelsumman s :

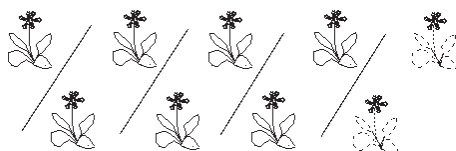
$$s = (n - 2) \cdot 180$$

Kontrollera formeln genom att räkna ut några värden i tabellen och formulera betydelsen i egna ord. Vilken beskrivning är enklast, den kursiverade eller formeln? Ofta ser elever en formel bara som en beräkningsföreskrift. Vad kan det bero på?

Udda och jämna tal

Med mönster i matematiken avser vi t ex en geometrisk form eller en talföljd som upprepas eller förändras på ett regelbundet sätt. Vi ska här studera talmönster som kan ges en geometrisk representation. Dessutom ska vi se hur dessa mönster genom sitt ”regelbundna sätt” kan uttryckas generellt med bokstavsuttryck. På vägen möter vi diskussionsfrågor som förbereder eleverna för detta. Vi börjar med några enkla exempel.

Redan de udda och jämna talen kan vi åskådliggöra i bilder. En möjlighet är att låta talen i talföljden 1, 3, 5, 7... vara antalet klossar eller antalet blommor som ordnas i en rabatt på det här sättet. I nästa steg kommer vi således att se det 5:e udda talet.



Hur kan vi på ett liknande sätt plantera blommorna så att mönstret visar de jämna talen? Eleverna har säkert något förslag! Är den här rabatten lika vacker?



Exemplen är enkla och visar på sambandet mellan talmönster och geometriska mönster. På vilka andra sätt kan eleverna ordna blommorna i ett mönster som alltid visar de udda respektive de jämna talen? Vilka mönster kan de göra med talen 5, 10, 15, 20 ... Eleverna kan naturligtvis arbeta laborativt med mönstren vilket kan vara en hjälp på vägen att se mening i talmönster.

Flera mönster

Om vi vill göra en annorlunda rabatt kan vi kanske plantera blommorna så här.



När eleverna ritar större figurer kan de fundera och ställa sig frågor kring mönstret.

- Hur många nya blommor behövs till nästa figur? Är det alltid så?
- Varför?

Eftersom detta mönster inleds på ett annorlunda sätt kan man kanske fundera kring frågorna

– Varför är antalet blommor inte svaren i 3:ans multiplikationstabell?

– Varannan figur har ett udda antal blommor. Fortsätter det så? – Varför?

Så småningom ställer frågor och svar krav på ett mer abstrakt tänkande.

– Hur många blommor behöver du till den 10:e figuren?

– Tänk att man kan bestämma antalet blommor i den 50:e figuren utan att behöva rita den!

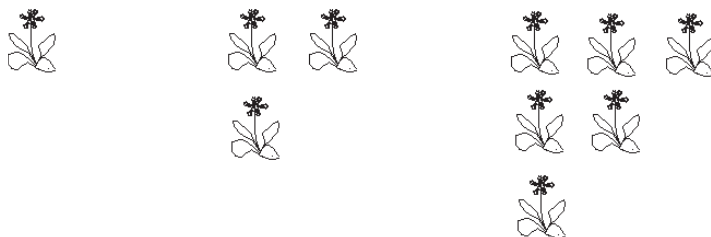
Elever med sådana tankar är på väg att förstå idén med att se mönster och generaliseringar som kan leda fram till formler.

Uppgifter med mönster är ett bra stöd för diskussioner eftersom eleverna har en gemensam bild att titta på. De kan också arbeta laborativt för att tydligare upptäcka hur mönstret växer. Förutom taluppfattning och upptäckarglädje är detta en inkörsport till förståelse av symboler. Det är ju bara en fråga om språkval om man säger att ”Det ska vara 3 nya blommor i varje figur och 2 extra som fanns från början” eller, med det matematiska symbolspråket,

$$B = 2 + x \cdot 3, \text{ där } B \text{ står för antalet blommor i ”figur nr } x\text{”}.$$

(De tre mönster med blommor som diskuterats ovan finns som aktiviteter på s 153.)

Mönstren kan vara underlag för elevernas arbete i smågrupper men också en inspiration för eleverna att upptäcka, rita och beskriva egna mönster.



Även detta mönster kan representeras på olika sätt. En möjlighet är att arbeta laborativt, en annan att rita hur mönstret växer.

– Hur finner man nästa tal i följd? Och nästa igen?

Om eleverna målar varannan diagonal med blommor röda och varannan blå kan de göra upptäckter om udda och jämna tal. Talen i detta mönster kallas *triangel*tal. Tack vare den geometriska bilden med

blommorna kan man också visa att det 15:e triangeltalet kommer att vara summan av de 15 första naturliga talen.

Vi kan gå vidare bland de s k figurtalen om vi planterar ihop blommorna i andra och tredje talet till en kvadrat.

– Vilket tal får vi då?

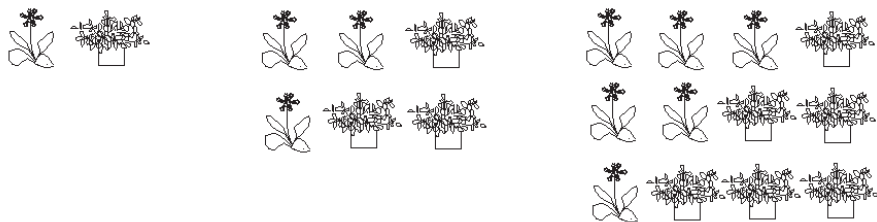
– Vilket tal får vi om vi gör på samma sätt med blommorna i tredje och fjärde talet?

– Är det alltid så att vi får ett kvadrattal om vi adderar två närliggande triangelantal?

Miniräknaren kan vara ett bra stöd i sökandet efter talsamband. Vi kan undersöka vilket som är det största tresiffriga triangeltalet, det minsta fyrsiffriga kvadrattalet och vilka två triangelantal som har 232 som summa – om man nu skulle vilja veta det.

Många upptäckter kan göras och problem ställas (se elevuppgifter). Elevernas och lärarens intresse för upptäckter i talens värld får balanseras mot behov av tid för träning av färdigheter. Läraren har ansvar för att hjälpa eleverna att systematisera sitt kunnande och tillsammans med eleverna välja ut intressanta problemställningar.

Den generella formeln för ett triangelantal kan vi finna lägger två triangelmönster intill varandra, t ex sätter några krukväxter bredvid blommorna.



De s k kallade rektangeln talen är $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$ o s v. Den generella formeln för det n -te rektangeltalet är således $n(n + 1)$. Det n -te triangeltalet är således: $n(n + 1)/2$

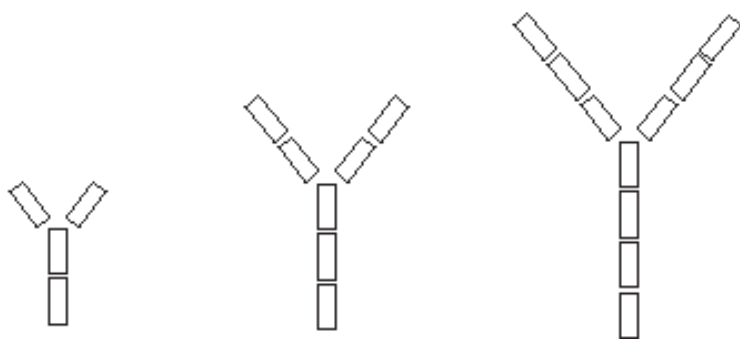
Syftet med resonemanget är naturligtvis inte att man ska gå så här långt med alla elever när de undersöker mönstret med triangelantal. Avsikten är att påvisa att samma mönster kan spänna över ett stort spektrum av uppgifter alltifrån konkreta mönster som elever ritat till generella samband.

Individualisering

En poäng är att arbetet med mönster och samband kan individualiseras på ett naturligt sätt genom att eleverna kan lösa uppgifter och rita mönster efter sin egen förmåga. Eleverna lyckas och kan känna tilltro till sin förmåga att lära sig matematik genom att arbetet inte nödvändigtvis inriktas på ett facit svar. Den enskilde eleven kan successivt gå fram mot en lämplig abstraktionsnivå mot en alltmer matematisk beskrivning av mönstret.

Låt oss göra nya upptäckter med två mönster där eleverna bygger större och större bokstäver, t ex med makaroner.

Diskussionsuppgifterna kan vara desamma som då vi planterade



blommorna. Några exempel på frågeställningar med gradvis stegrad abstraktion (se vidare elevaktiviteter).

- 1 Hur många makaroner behöver du till den 4:e figuren?
Bygg den 4:e bokstaven och kontrollera om det stämmer.
- 2 Hur många makaroner behövs till den 6:e bokstaven i mönstret?
(Här måste man tänka två steg framåt)
- 3 Hur många makaroner behövs till den 10:e bokstaven?
- 4 Beskriv med egna ord hur du kan räkna ut antalet makaroner i en figur.
- 5 Hur många makaroner behövs till den 40:e bokstaven?
- 6 Bygg en bokstav av 52 makaroner? Vilket nummer har den?
- 7 Antag att antalet makaroner är m och bokstavens nummer x . Skriv ner ett samband med dessa symboler för antalet makaroner i bokstav "nr x ".

Talmönster och algebra

En av poängerna med symboler i matematiken är att vi kan skriva generella samband och formler på ett kortfattat och tydligt sätt. Genom att studera bildmönster som växer kan eleverna succesivt närma sig begrepp som obekant och variabel. En annan poäng med bokstavsuttryck är att vi algebraiskt kan härleda och bevisa samband och regler. Låt oss studera det här talmönstret:

$$2^2 - 1^2 = 2 + 1$$

$$3^2 - 2^2 = 3 + 2$$

$$4^2 - 3^2 = 4 + 3$$

$$5^2 - 4^2 = 5 + 4$$

$$6^2 - 5^2 = 6 + 5$$

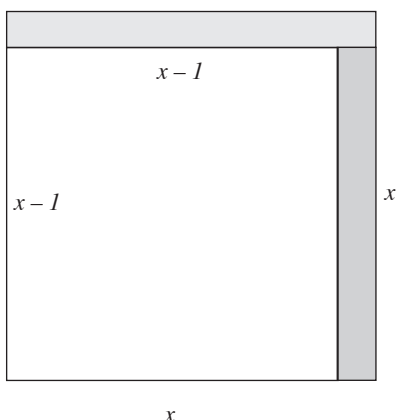
Upprepas mönstret även i fortsättningen? Då eleverna undersöker detta, t ex med miniräknaren, upptäcker de att mönstret fortsätter även för mycket stora tal. Men hur kan vi vara absolut säkra på att det alltid gäller? En utväg att ta reda på detta är att söka göra ett generellt bevis med bokstavsräkning, d v s algebra.

Om vi betecknar det första talet med x så är det andra talet $x - 1$.

Om vi tecknar differensen får vi:

$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - (x^2 + 1 - 2x) = x^2 - x^2 - 1 + 2x = 2x - 1 = x + (x - 1)$$

Sambandet kan göras troligt med en bild där vi lägger in två rektangelremsor med sidan 1 och alltså ”skär ut” en kvadrat med sidan $x - 1$ från en större kvadrat med sidan x .



– Vilken längd har de båda skuggade områdena i figuren?

(Den liggande rektangeln har längden x medan den stående har längden $x - 1$)

Anmärkning: Det finns matematiska samband som förefaller att alltid gälla men som man ännu inte lyckats bevisa. Ett sådant exempel är Goldbachs förmodan:

Varje jämnt tal kan skrivas som summan av två primtal.

(Se t ex Dahl, 1994)

Triangeltal och kvadrattal

Vi kan nu återgå till frågan om vi alltid får ett kvadrattal om vi adderar två närliggande triangeltal. Ett exempel påminner oss om sambandet.

Det 6:e triangeltalet är 21 och det 7:e triangeltalet är 28. Summan av de båda talen är 49 vilket kan skrivas 7^2 . Vi får nu ytterligare ett tillfälle att bevittna "algebrans kraft"!

Triangeltal "nr x " kan skrivas $x(x+1)/2$. Det närmast föregående talet "nr $x-1$ " får man genom att byta ut x mot $x-1$ i sambandet ovan: $(x-1)(x-1+1)/2 = (x-1)x/2$

Vi tecknar nu summan och förenklar uttrycket.

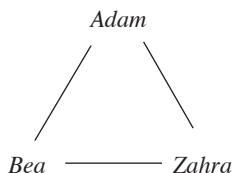
$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{(x-1)x}{2} = \frac{(x^2+x)}{2} + \frac{(x^2-x)}{2} = \frac{(x^2+x+x^2-x)}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

Alla möter alla

Europa top 12 är en bordtennisturnering där de 12 bästa spelarna i Europa deltagar. Segraren koras efter en turnering där alla möter alla. Uppgiften är att bestämma hur många matcher som behöver spelas. Här möter vi begreppet mönster som en problemlösningstrategi som gärna kan kombineras med strategierna "förenkla problemet" och "gör en tabell".

En turnering med bara två deltagare blir tråkig eftersom det bara behövs en enda match.

Om det är tre tävlande behövs 3 matcher, se figur. Nu är det dags att göra en tabell för att få en bättre överblick och kanske finna ett mönster som hjälper oss att lösa problemet med 12 deltagare.

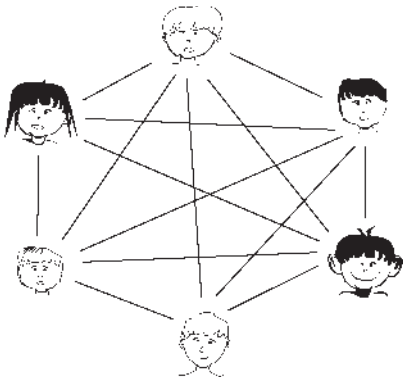


Antal deltagare	2	3	4	5	6	7		12
Antal matcher	1	3	6					?

Kanske är talföljden bekant. Nu kan nog eleverna inte bara lista ut hur många matcher det är i turneringen Europa top 12 utan också räkna ut antalet matcher om alla klassens elever skulle spela en bordtennisturnering alla mot alla.

Knyta vänskapsband

Problemställningen med bordtennisturneringen kan konkretiseras om vi ritar vänskapsband mellan ett ökat antal klasskamrater. Elevuppgift 6 kan användas som underlag för elevernas arbete. Mellan 2 kamrater finns 1 vänskapsband och mellan 3 kamrater finns 3 vänskapsband. Hur många vänskapsband kan vi rita mellan 4 kamrater? Så här ser bilden ut om vi ritar alla vänskapsband mellan 6 kamrater. Låt eleverna rita på motsvarande sätt med 7 kamrater, gör en värdetabell och jämför med resultatet vi fann för bordtennisturneringen. Nu kan vi faktiskt komma fram till hur många vänskapsband det kan finnas i klassen.



Mönster med rektanglar

När vi ritar mönster med rektanglar med längden 2 cm och bredden 1 cm som bilderna visar upptäcker vi att den andra figuren har en rektangel med längden 4 cm och två rektanglar med längden 2 cm. I den tredje figuren finner vi tre rektanglar med längden 2 cm, två med längden 4 cm och en rektangel med längden 6 cm. Hur många rektanglar kan du finna i den fjärde figuren?

Rita på samma sätt den 5:e figuren och räkna antalet rektanglar.

Figur 1		1
Figur 2		2 + 1
Figur 3		3 + 2 + 1
Figur 4		?

När vi gör en värdetabell ser vi att talen är våra gamla vänner triangel-talen.

Figur nr	1	2	3	4	5	6	7
Antal rektanglar	1	3	6				

Fibonacci och mönster

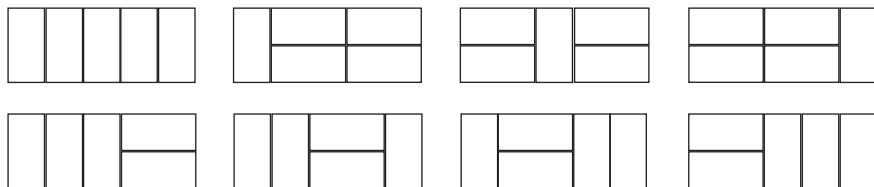
Klinkerplattor med måtten 1 dm x 2 dm ska läggas i en rad med bredden 2 dm. På hur många olika sätt kan vi lägga plattorna? En platta kan naturligtvis bara läggas på ett sätt men med 2 plattor finns det 2 olika sätt så här:



Med 3 plattor kan mönstret se ut på 3 olika sätt och med 4 plattor finns det 5 sätt:



När vi har 5 plattor finns det fler möjligheter:



Med en värdetabell kan vi lättare överblicka våra upptäckter.

Antal plattor	1	2	3	4	5	6	7
Möjligheter	1	2	3	5	8		

På vilket sätt fortsätter talföljden? Rita och kontrollera om det stämmer fortsättningsvis.

Talföljden, som byggs upp genom att man adderar de båda föregående talen, kallas Fibonacci efter den italienske matematikern Fibonacci. Han påstås ha upptäckt talföljden när han studerade hur kaniner förökar sig.

- Av vilken anledning kan det vara motiverat att återge ett talmönster också som ett geometriskt mönster?
- I början av kapitlet finns bilder med blommor som är planterade i mönster. Hur ser du på möjligheterna att på detta sätt stimulera och utveckla elevernas arbete och tänkande?
- Under rubriken Individualisering beskrivs hur elever kan nå olika abstraktionsnivåer då de arbetar med mönster som växer. Vilka möjligheter och svårigheter ser du när det gäller att hantera detta i din undervisning?
- I texten ges exempel på hur man genom att studera enkla mönster som växer och undersöka formler kan stödja förståelsen av variabelbegreppet. Vad anser du om detta? Vilka erfarenheter har du?
- Traditionell algebraundervisning under grundskolans senare årskurser har till stor del handlat om att förenkla algebraiska uttryck. Enligt den nya kursplanen ska undervisningen sträva efter att eleverna utvecklar "ett algebraiskt tänkande". Vad lägger du i formuleringen "algebraiskt tänkande"? På vilket sätt kan exemplen ovan bidra till att utveckla "ett algebraiskt tänkande"?
Vilka andra uppgifter kan vara lämpliga att låta eleverna arbeta med för att utveckla "ett algebraiskt tänkande"?
- På vilket sätt kan och bör vi förändra innehåll och arbetssätt för att eleverna ska uppleva "att använda x " som skapande och meningsfullt?

Elevaktiviteter

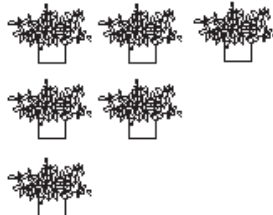
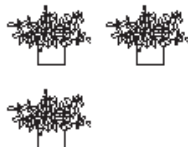
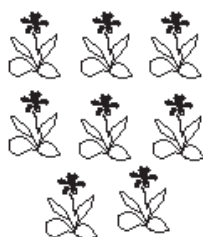
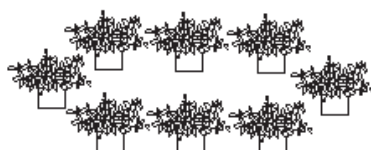
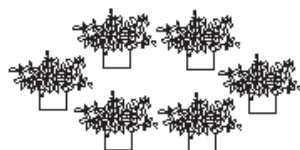
Mönster med blommor

1 Undersök antalet blommor när mönstren växer. Hur många blommor behövs till

a) 4:e figuren

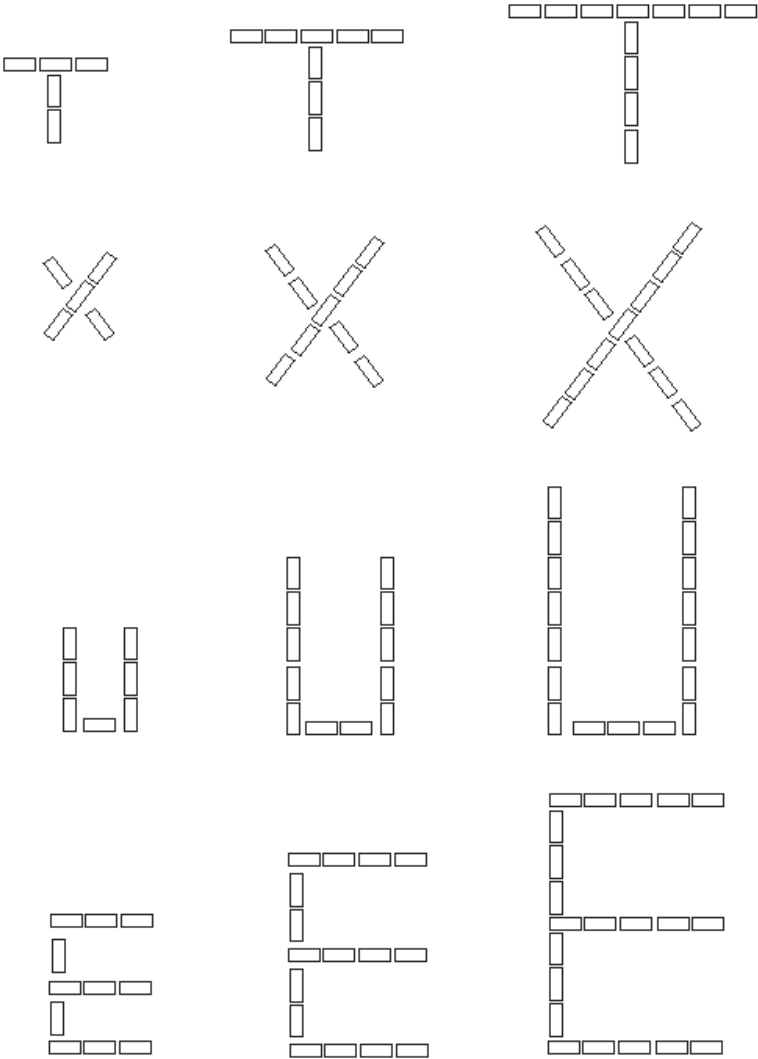
b) 5:e figuren

c) 10:e figuren



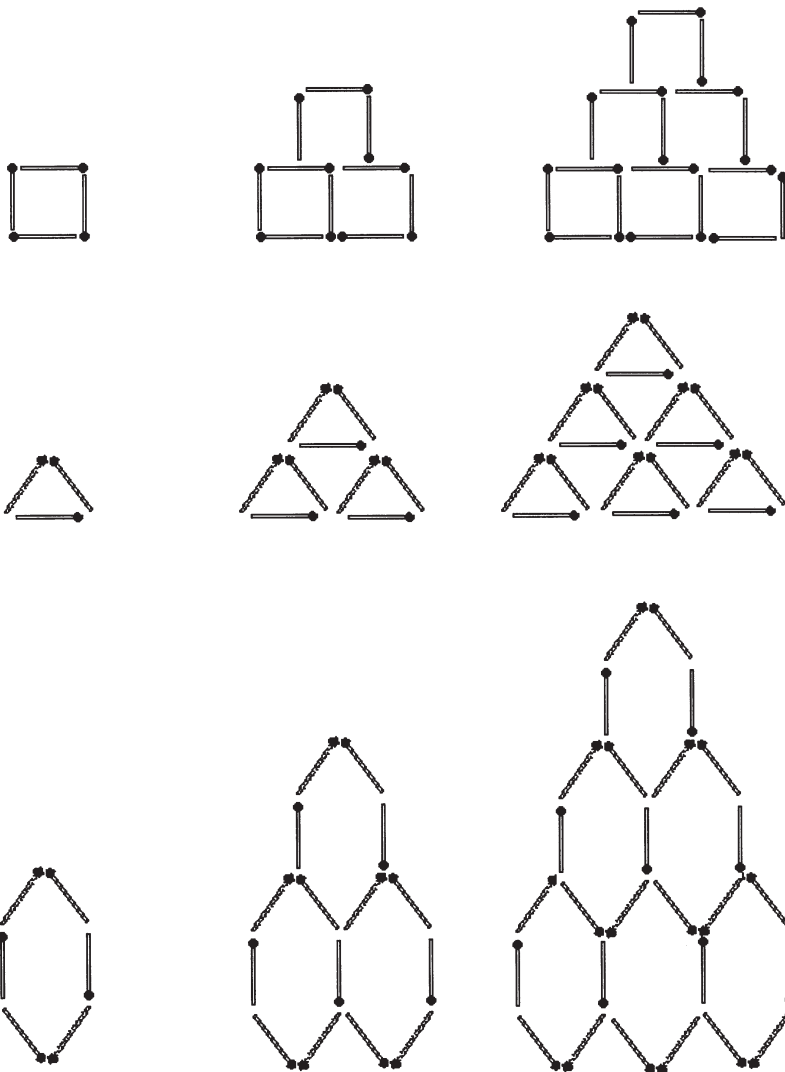
Bokstäver som växer

- 2 Ta reda på hur många makaroner som behövs i den
- a) 4:e bokstaven b) 5:e bokstaven c) 10:e bokstaven



Figurer som växer

- 3 Undersök hur figurerna med stickor växer. Ange en formel som visar antalet stickor S i figur ”nr x ”.



Mönster i multiplikationstabellen

Vilka mönster hittar du?

Skugga alla tal som är delbara med 2.

12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Skugga alla tal som är delbara med 5.

12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Skugga alla tal som är delbara med 3.

12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Skugga alla tal som är delbara med 6.

12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Skugga alla tal som är delbara med 4.

12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Skugga alla tal som är delbara med 8.

12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

5 Från multiplikationstabellen kan du välja kvadrater och rektanglar för att undersöka mönster med multiplikation. Använd miniräknare!

a Vi ”skär först ut” en kvadrat i figuren till höger.

Jämför produkterna $27 \cdot 32$ och $24 \cdot 36$.

Vad finner du?

18	27	36	45
----	----	----	----

b Nu skär vi ut en rektangel i figuren till höger.

Försök att hitta ett liknande mönster med multiplikation.

16	24	32	40
----	----	----	----

c Vilka mönster med multiplikation kan du finna bland de inramade talen i figuren nedan?

14	21	28	35
18	27	36	45

d Skär ut kvadrater och rektanglar på andra ställen i multiplikationstabellen. Undersök om mönstret alltid stämmer. Kan du finna andra mönster?

16	24	32	40
----	----	----	----

14	21	28	35
----	----	----	----

18	27	36	45
16	24	32	40
14	21	28	35

18	27	36	45
16	24	32	40
14	21	28	35

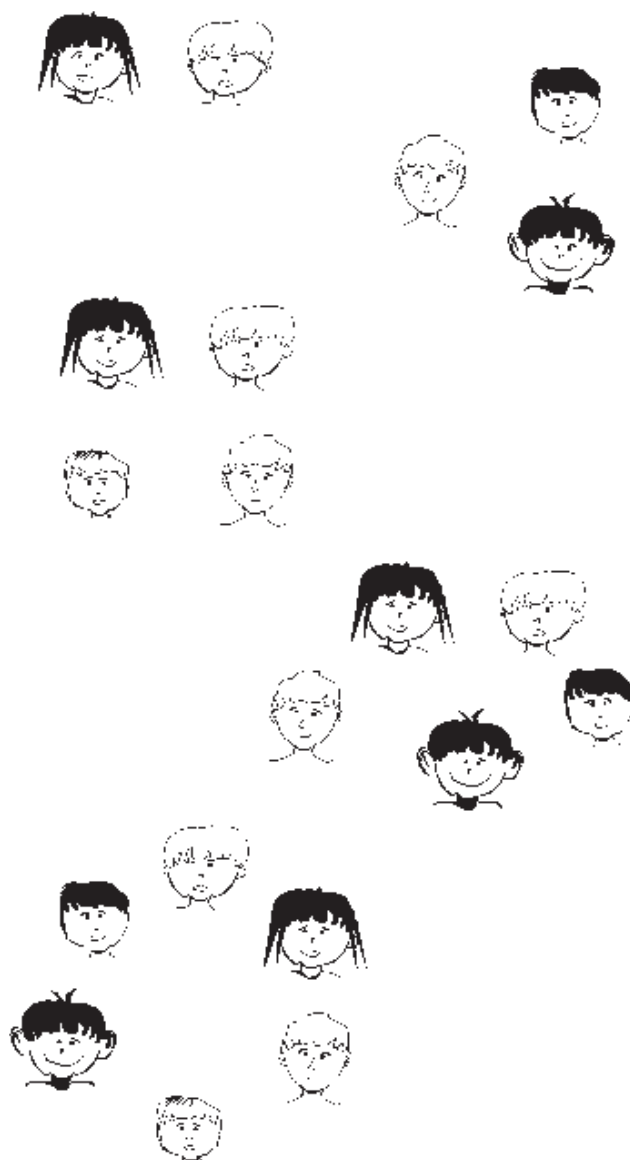
6 Vilka mönster får du om du byter ut multiplikationstabellen i uppgift 4 mot tabellen nedan?

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Vänskapsband

- 7 Rita in vänskapsbanden mellan kamraterna. Rita egna bilder med fler elever.

För in dina resultat i tabellen längst ner. Kan du upptäcka ett mönster? Ta reda på hur många vänskapsband det finns i din klass!



Antal kamrater	2	3	4	5	6	7	8	9	
Antal vänskapsband	1								

Litteratur

- af Ekenstam, A. (1986). Mellan aritmetik och algebra. *Nämnnaren* 12(3), 11-13.
- af Ekenstam, A. (1991). Dubbel algebra. *Nämnnaren* 18(3/4), 130-134.
- Ahlström, R. (1995). Uppslaget: Trianglar som ska sammanfogas. *Nämnnaren* 22(1), 26-27.
- Bondesen, A. (1983). Från triangelantal till pyramidtal – och kanske vidare. *Nämnnaren* 9(4), 58-61.
- Claesson, P. (1979). Uppslaget: Fattiga och rika tal. *Nämnnaren* 6(2), 29-32.
- Claesson, P. (1980a). Uppslaget: Att räkna med almanackan. *Nämnnaren* 6(3), 33-44.
- Claesson, P. (1980b). Uppslaget: Räkna med bitsocker. *Nämnnaren* 6(4), 31-40.
- Dahl, K. (1995). Ger matematiken men eller mening? *Nämnnaren* 22(2), 15-22.
- Dunkels, A. (1981). Miniporträttet: Fibonacci. *Nämnnaren* 7(3), 44-49.
- Emanuelsson, G. & L. (1994). Problemavdelningen. *Nämnnaren* 21(2), 53.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1993). Måltavlan. *Nämnnaren* 20(4), 10-11.
- Emanuelsson, G. & L. (1994). Uppslaget: Kvadrater i kvadrat. *Nämnnaren* 21(4), 26-27.
- Emanuelsson, L. & G. (1994). Problemavdelningen. *Nämnnaren* 21(2), 53.
- Emanuelsson, L. (1992). Utvecklande ytkunskaper. *Nämnnaren* 19(1), 20-23.
- Firsov, V. (1995). Algebra i olika former. *Nämnnaren* 22(3), 31-33.
- Johansson, B. & Emanuelsson, G. (1994). Måltavlan. *Nämnnaren* 21(4), 3.
- Klasson, J. & Persson, B. (1991). Mönsterplan 87, Lgr 80 och National Curriculum. *Nämnnaren* 18(2), 23-28.
- Klasson, J. & Persson, B. (1991). Uppslaget. *Nämnnaren* 18(2), 2.
- Kongsted, J. (1984). 1984 – ett anmärkningsvärt år. *Nämnnaren* 11(1), 52-54.
- Miniporträtt (1991). Miniporträtt genom åren. *Nämnnaren* 18 (3/4), 150.
- Neuman, D. (1992). Kraften i det odelade 5-talet. *Nämnnaren* 19(1), 30-33.
- Persson, I. O. (1988). Laborativ multiplikation och räkning med bokstäver. *Nämnnaren* 15(3), 24-27.
- Thompson, J. (1984). Vad kan vi lära av matematikens historia? *Nämnnaren* 11(2), 49-52.
- Ulin, B. (1983). Problemlösning och tänkande. *Nämnnaren* 9(3), 34-38.
- Ulin, B. (1985). Skolmatematiken och den "verkliga matematiken". *Nämnnaren* 11(3), 52-55.
- Anderberg, B. & Söderström, U. (1988). *Täljaren: Bokstäver att räkna med*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Bergsten, C. (1990). *Matematisk operativitet. En analys av relationen mellan form och innehåll i skolmatematik*. Linköping Studies in Education. Dissertations No. 19. Linköping: Department of Education and Psychology (Doktorsavhandling).
- Bolt, B. (1984). *Boken om aktiviteter i matematik*. Göteborg: Förlagshuset Gothia.
- Dahl, K. & Nordquist, S. (1994). *Matte med mening*. Stockholm: ALFABETA.
- Domar, T. (1991). Tal och räkning – ett matematiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Tal och räkning 2*. Lund: Studentlitteratur, 167-190.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommentarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bidrag till Sveriges matematiklärarförenings sommarkurs i Mullsjo 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G. Johansson, B. & Lingefjärd, T. (Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning*. Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
- Murray, Å. & Liljefors, R. (1983). *Matematik i svensk skola*. Utbildningsforskning FoU Rapport 46. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget och Skolöverstyrelsen.
- Jacobs, H.R. (1982). *Mathematics, a Human Endeavor*. 2d ed. New York: W.H. Freeman & Co.
- NCTM (1993a). *Patterns and functions*. Activity Books for Grades 5-8. Reston, Va.:Author.
- NCTM (1993b). *Patterns*. Subject-Matter Books for Grades K-6. Reston, Va.:Author.
- NCTM (1995). *Algebra in a technological world*. Activity Books for Grades 9-12. Reston, Va.:

Rumsuppfattning och geometri

Grundläggande rumsuppfattning är en förutsättning för att kunna orientera sig i rummet och för att lära sig geometri. Kapitlet innehåller en diskussion kring undersökande aktiviteter för att stärka elevernas rumsuppfattning och kunnande kring grundläggande geometriska begrepp.

I vår undervisning ska vi sträva efter att eleven förstår och kan använda

olika metoder, måttssystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma storleken av viktiga storheter, grundläggande geometriska begrepp, egenskaper, relationer och satser

I slutet av det femte skolåret ska eleven

ha en grundläggande rumsuppfattning och kunna känna igen och beskriva grundläggande egenskaper hos geometriska figurer och mönster, kunna jämföra, uppskatta och mäta längder, areor, volymer, vinklar och massor, kunna använda skala för att tolka ritningar och kartor

I slutet av det nionde skolåret ska eleven

kunna använda metoder, måttssystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma längder, areor, volymer, vinklar, massor, tidpunkter och tidsskillnader, kunna känna igen, avbilda och beskriva viktiga egenskaper hos vanliga geometriska objekt samt tolka och använda ritningar och kartor

Kursplan i matematik

Rumsuppfattning

Vad menas med grundläggande rumsuppfattning?

I första hand innebär det att ha förståelse och sådana kunskaper och färdigheter som är grundläggande för att kunna orientera sig i rummet (Johansson & Emanuelsson, 1992).

Eleven har en grundläggande rumsuppfattning om han/hon

- kan förstå, använda och utbyta information om var i rummet ett föremål, inklusive eleven själv, befinner sig i förhållande till omgivningen med hjälp av begrepp som avstånd och riktning (tex över, till vänster, mellan, längre bort, närmare)

- kan beskriva hur man har förflyttat eller kan förflytta ett föremål,

- kan jämföra och uppskatta storleken av avstånd, vinklar, plana områden och föremål som han/hon har erfarenhet av och som vanligen förekommer i närmiljön.

- känner igen och kan beskriva viktiga egenskaper hos våra vanligaste geometriska objekt (tex linje, sträcka, rektangel, triangel, kub)

- har förmåga att kunna avbilda föremål och omgivande objekt och kunna orientera sig i ett tänkt rum i fantasin, en inre rumsuppfattning.

Hur utvecklas grundläggande rumsuppfattning?

Ett litet barn utforskar och upptäcker sin omgivning genom lek och andra aktiviteter. Ett av flera sätt att utveckla spatiala färdigheter, är att genomföra övningar som fokuserar på olika geometriska förhållanden som t.ex. riktning, läge, perspektiv samt form och storlek hos figurer och föremål.

Barn ser mönster, figurer, föremåls läge och rörelse. Synintrycken förstärks med hjälp av kroppsposition och av de övriga sinnena som hörsel, känsel och lukt. Alla intryck integreras med barnets erfarenheter och ger kunnande om hur omgivningen är beskaffad. I skolan ska vi sedan utveckla och fördjupa barns rumsuppfattning. Här följer en kort beskrivning av några aspekter av grundläggande spatiala färdigheter som är betydelsefulla för barns utveckling (NCTM¹, 1993).

Koordination

När ett barn springer, hoppar, sparkar en boll eller klättrar över ett staket styr seendet fötternas rörelse. Ögon och kropp "samarbetar". Om barnet har stora problem med motoriken måste det koncentrera sig så på själva rörelsen, att det är svårt att också tänka på vad det egentligen ska utföra.

Om barnet exempelvis ska rita av en figur och har stora svårigheter med att hålla i pennan, trycka lagom hårt och utföra själva rit-rörelsen med handen, är det svårt att tänka på figurens proportioner.

¹ Som underlag för detta kapitel har bl a använts vissa häften ur "Addenda" en serie som skall underlätta för lärarna i USA att förverkliga de mål som finns uppställda i "Standards", den amerikanska matematiklärarföreningens målsättning för framtiden. Denna lärarförening, vars fullständiga namn är National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) har ett stort inflytande och en stark ställning inom matematikundervisningen i USA.

Bakgrund

Ett föremål kan inte uppfattas tydligt om det inte kan urskiljas från sin bakgrund. När en flicka står och bollar på skolgården är hennes uppmärksamhet koncentrerad på bollen. Den är ”figur” i det hon uppfattar. Allt annat på skolgården som träd, buskar, byggnader och barn utgör bara en bakgrund. De är inte i fokus för hennes uppmärksamhet, bara tillräckligt för att t ex undvika en kollision. Att kunna skilja figurer från bakgrunden är viktigt för att kunna rita bilder, konstruera diagram och för att kunna tolka dem.

Konstans

Denna aspekt innefattar förmågan att känna igen former och figurer oavsett storlek, läge och riktning. En person ”ser” bordsskivan som den rektangel som den verkligen är, trots att den från personens synvinkel egentligen liknar ett parallelltrapets. En basketspelare vet att bollen som ligger 10 meter bort är lika stor som då hon har den i sin hand (storlekskonstans).

Läge

Denna aspekt innebär förmåga att relatera föremål i förhållande till den egna personen. Barnet upplever sig som centrum i sin värld och föremålen uppfattas därför som bakom, framför, över, under eller bredvid. Det kan också gälla förmågan att se två eller flera föremål i relation till varandra. Bedömning av likheter och olikheter mellan eller bland föremål görs med hänsyn till läge, dvs oberoende av om objekten ligger upp och ned eller hur de är vända.

Aktiviteter där eleverna sorterar t ex knappar, burklock, löv kan vara lämpliga för att utveckla denna förmåga.

Synminne

I vardagslag pratar man ibland om ”fotografiskt minne”. De flesta kan hålla fem till sju detaljer i arbetsminnet under en kortare tid. För att komma ihåg ett större antal detaljer behöver vi som regel gruppera det vi ser eller ta det symboliska tänkandet till hjälp. Synminne är betydelsefullt för att kunna uppfatta mönster. Enkla mönster kan man komma ihåg genom att använda sig av ”ordminne”: Två röda, en blå, två röda... För mer komplicerade mönster behöver vi hålla ett stort antal faktorer i minnet; form, linjers riktning, avstånd, vinklar, korsande linjer...

Abstrakt seende

Detta utvecklas genom att barnet skapar sig en inre bild av föremålet. På detta sätt kan intrycket av föremålet förstärkas och uppfattas ännu tydligare än om barnet bara vidrört det med sina händer.

Barn som utvecklar en god grundläggande rumsuppfattning och behärskar språkliga och geometriska begrepp, är bättre rustade att få en god taluppfattning, att förstå måttssystemets idé och för att utveckla mer avancerade begrepp inom matematiken.

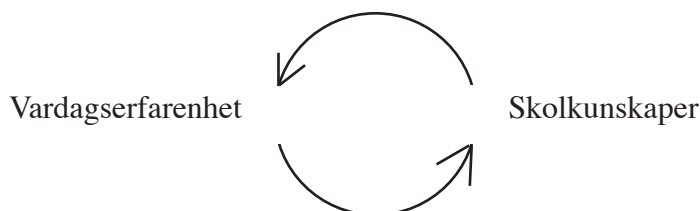
Aktiviteter i rumsuppfattning

Vardagserfarenheter – skolkunskaper

Det är viktigt att utgå från elevernas erfarenheter och uppfattningar och sträva efter att utveckla deras tänkande och kunnande. I skolan kan en diskussion föras utifrån barnens vardagserfarenheter för att ge en fördjupad förståelse av tex geometriska begrepp.

Det är lätt att elever uppfattar den kunskap i matematik de tillägnar sig i skolan, som endast användbar i skolsammanhang (Skolverket, 1993a, 1993b). Kvadrater och rektanglar är något som bara finns i matematikboken och som man enbart sysslar med under matematiklektionerna. Att geometriska former finns på skolgården eller på vägen till skolan, kanske de inte alls uppmärksammat.

Kopplingen mellan elevernas vardagserfarenhet och skolkunskaper



är betydelsefull. Olika geometriska objekt kan ses som enkla modeller av verkligheten, tex en känd form på en yta – en kvadratisk eller cirkelformad rabatt, ett rätblock som innehåll i en låda eller ett klot som en modell av vår jord.

Skattjakt är ett exempel på en aktivitet som kan göra relationen mellan vardagserfarenhet och skolkunskaper konkret och tydlig, s 172.

Ord och begrepp i geometri

Enligt kursplanen i matematik ska matematikundervisningen ge eleverna möjlighet att kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer. För att klara detta behövs bland annat ett språk i vilket man behärskar och förstår innebörden i de ord och begrepp som används.

Hur mycket funderar vi som lärare kring elevernas förståelse av de ord och begrepp som förekommer i exempelvis geometriundervisningen?

På nästa sida redovisas två listor på ord och begrepp i geometri. Den första är en översikt av ord och begrepp som förekommer inom momentet geometri och den andra är en sammanställning av ytterligare ord som finns i geometriavsnitten i några aktuella läromedel. Ingen av listorna gör anspråk på att vara heltäckande men ger ändå en uppfattning om den mängd av ord och begrepp som kan komma till uttryck i geometriundervisningen.

I det följande finns förslag på hur innehållet i dessa listor kan utnyttjas i geometriundervisningen.

Aktiviteter

I följande förslag ges eleven möjlighet att utveckla sin rumsuppfattning. Övningarna är ganska utförligt beskrivna, men behöver naturligtvis inte alls utföras på det föreslagna sättet utan kan förändras så att de passar dig och din klass. Flera av aktiviteterna kan med små modifieringar användas även under senare år i grundskolan.

Faktorer som elevsammansättning, tillgång till material och lokaler kan påverka val av arbetsformer och arbetssätt:

- Enskilt, i par, i grupp eller i helklass.
- Stationssystem där eleverna går från aktivitet till aktivitet.
- Matematikhörna där material är framdukat och eleverna kan turas om att utföra uppgifterna.

De flesta övningarna lämpar sig sannolikt bäst som par-arbete eftersom eleverna då får rika möjligheter att formulera sina egna tankar i ord, att diskutera och svara på frågor, förklara och argumentera för sitt tänkande. Aktiviteterna har egentligen inget slut. De kan hela tiden vidareutvecklas i samspel med eleverna:

Vad händer om...?

Varför blir det...?

Stämmer det alltid?

Kan man göra det på något annat sätt?

Det övergripande syftet är att skapa kreativa och undersökande aktiviteter, där eleverna ges möjlighet till ett experimenterande och utforskande arbetssätt. Övningarna ska stimulera till ett aktivt och öppet sökande efter förståelse och nya insikter inom geometri (kursplan i matematik, s 205).

Ord & begrepp i grundskolans geometri

Alternativinkel	Längdenhet	Sfär
Area	Längdskala	Sida
Areaenhet	Mantelyta	Sidokant
Areaskala	Medelpunkt	Sidovinklar
Avstånd	Medelpuntsvinkel	Sidoyta
Bas	Median	Skala
Baskant	Mittpunkt	Skära
Basyta	Mittpunktsnormal	Skärningspt
Bisektris	Motstående	Spegling
Bågvinkel	Månghörning	Spets
Cirkel	Normal	Spetsvinklig
Cirkelbåge	Normalplan	Stereometri
Cirkelområde	Oaktaeder	Storckirke
Cylinder	Omkrets	Stråle
Cylinderyta	Område	Sträcka
Diagonal	Omskriven	Sträckning
Diameter	Origo	Symmetri
Dimension	Parabel	Sym.centrum
Dodekaeder	Parallella	Symmetrilinje
Ellips	Parallellaxiom	Tangent
Fotpunkt	Parallelepiped	Tangeringspt
Förminskning	Parallellförskjutn.	Tetraeder
Förstoring	Parallelogram	Toppvinkel
Generatris	Parallelltrapets	Translation
Grad	Plan	Transversal
Halvcirkel	Polyeder	Triangel
Halvplan	Polygon	Trubbvinklig
Hexaeder	Prisma	Varv
Hyperbel	Projektion	Vertikalvinklar
Hypotenusa	Punkt	Vinkel
Hörn	Pyramid	Vinkelben
Ikosaeder	Radian	Vinkelspets
Inskreven	Radie	Vinkelsumma
Kant	Rand	Volym
Katet	Randvinkel	Volymenhet
Klot	Regelbunden	Volym skala
Kon	Rektangel	Vridning
Koncentrisk	Romb	Vridn.riktning
Kongruent	Rotation	Yta
Koordinat	Rotationsaxel	Yttervinkel
Koord.axlar	Rotationskropp	Ändpunkt
Koord.system	Rotationsyta	
Korda	Rum	
Kropp	Rymd	
Kub	Rymddiagonal	
Kurva	Rymdgeometri	
Kvadrant	Rymdområde	
Kvadrat	Rymdvinkel	
Kägelsnitt	Rätblock	
Likbelägna	Rätlinjig	
Likbent	Rätvinklig	
Likformig	Sammanfallande	
Liksidig	Segment	
Linje	Sekant	
Längd	Sektor	

Ord & begrepp i aktuella läromedel

För år 1-3 har *alla* förekommande ord och begrepp tagits med, mest för att visa på hur många de egentligen är! För år 4-9 har ord som finns på den första listan inte tagits med. Vid behov får dessa sorteras efter vad som är relevant på respektive nivå i geometriundervisningen.

År 1-3	År 4-6	År 7-9
Avstånd	Areamall	Areaenhet
Bottenyta	Avbildning	Areamätning
Bredd	Cirkeldiagram	Basvinkel
Cirkel	Cirkelformad	Begränsningsarea
Cirkelskiva	Delsträcka	Begränsningsyta
Diagonal	Dimension	Block(kropp)
Diagram	Enhetssträcka	Centrum
Diameter	Format	Cirkelsektor
Figur	Geometrisk	Cirkulär
Form	Gradskiva	Cylindervolym
Föremål	Gradtal	Elliptisk
Förminska	Hjälpmått	Kantlinje
Förstora	Horisontell	Kantlängd
Höjd	Korsa	Klotformad
Hörn	Kortsida	Konstruera
Kant	Kubformad	Kula
Kvadrat	Kubikmeter	Likformighet
Litermått	Kvadratisk	Linjediagram
Längd	Kvadratmeter	Motsatt(sida)
Medelpunkt	Lodrät	Oval
Meter-syst.	Långsida	Parvis-parallella
Meterband	Längdmått	Randpunkter
Meterstav	Passare	Rektangulär
Mått	Periferi	Ring(form)
Måttband	Rektangelområde	Rund
Måttsats	Sidostycke	Rätblocksformad
Mäta	Stapeldiagram	Sammansatt form
Mönster	Stegmått	Stympad(kon)
Omkrets	Två-dimensionell	Topptriangelsats
Prick	Varv	Tresidigt
Punkt	Vertikal	Tvärsöver
Pyramid	Vinkelhake	
Rektangel	Vågrät	
Runt(om)	Ytterkant	
Ruta	Ögonmått	
Sexhörning		
Sida		
Skala		
Spegelbild		
Stapel		
Storlek		
Sträcka		
Symmetrilinjer		
Tjocklek		
Triangel		
Täcka(en yta)		
Volym		

Ord som ansluter till geometri
Bostadsyta
Genomskärningsrea
Millimeterutat
Måttpil
Måttsättning
Olinjerat
Plattform
Taklutning
Takvinkel
Utrymme
Vingbredd
Vinkelrum
Vätskevolym

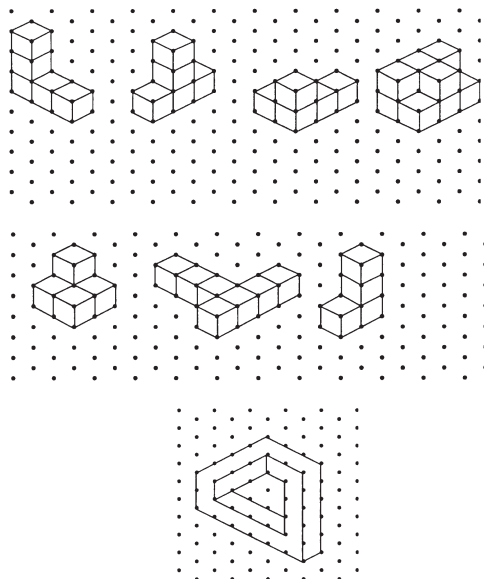
Kuber

Syfte: Att utveckla olika aspekter av rumsuppfattning, t ex koordination och konstans genom att konstruera och undersöka modeller gjorda av kuber.

1 Eleverna ritar av modeller på prickpapper och bygger dem sedan med hjälp av kuberna.

2 Låt sedan eleverna bygga en egen valfri modell och rita av modellen på prickpapper från olika håll. Eleverna bestämmer svårighetsgraden och avgör om de vill använda ett litet antal kuber när de bygger, kanske tre eller fyra stycken. Andra kanske använder betydligt fler.

3 Man kan också stimulera fantasin genom att rita modeller som inte går att bygga, se t ex boken Omöjliga figurer (Reutersvärd, 1985). Några elever kanske vill färglägga och rama in ”konstverket”.



Form och storlek

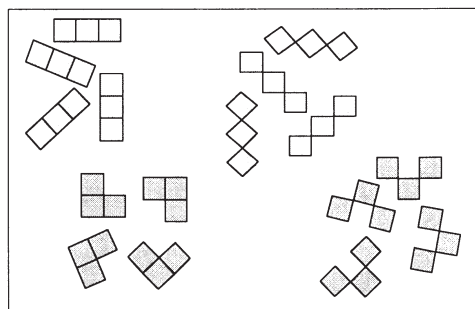
Syfte: Att konstruera och upptäcka figurer med samma form och storlek. Att jämföra figurer i olika läge genom att ”i tanken” vända och vrida figurer i olika riktningar

Material: Kvadrater av plast eller urklippta i papper, prickpapper.

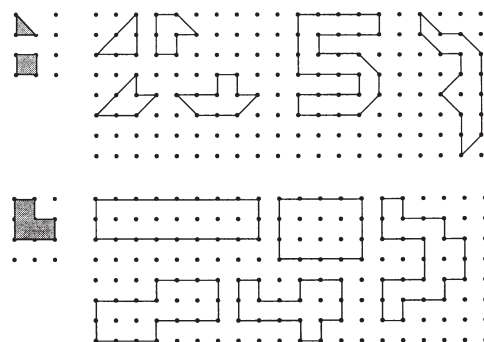
1 Varje elevpar får tre eller fyra kvadrater beroende på vilken svårighetsgrad som önskas. Eleverna ska skapa så många olika figurer som möjligt, rita av dem på prickpapperet och klippa ut dem. Figurer med likadan form samlas i en hög eller klistras på samma papper. Eleverna uppmanas att diskutera och motivera sin kategorisering.

2 Övningen kan utvecklas och varieras genom att istället använda trianglar, sexhörningar eller andra geometriska figurer. Eleverna avgör själva hur de vill lösa uppgifterna, färglägga, endast dra streck mellan figurerna eller helt enkelt se, hur många figurer som får plats.

3 Eleverna kan konstruera liknande uppgifter på prickpapper som klasskamraterna får lösa. Konstruktörerna bör också göra ”ett facit”, eftersom det då sker en kontroll av att uppgifterna verkligen går att lösa.



Räkna figurer

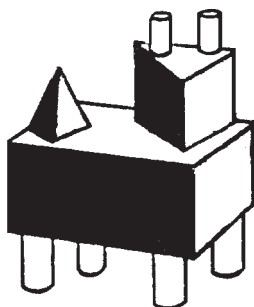


Sortera och klassificera

Syfte: Att känna igen geometriska former och bli medveten om likheter och olikheter mellan olika föremål.

1 Be eleverna ta med sig ett lämpligt antal olika föremål hemifrån. Klipp ut bilder på föremål från tidningar, kataloger och reklambroschyrer. Be eleverna berätta vad olika saker används till. De kan sedan sortera sina objekt med avseende på form. Samlingen kan sedan användas på olika sätt:

- Gör utställning om kvadrater, cirklar, kuber.
- Bygg hus eller djur av tredimensionella föremål som mjölkkartonger, toalettpappersrullar.



2 Eleverna klipper ut ett antal kvadrater, cirklar och trianglar och lägger ut dem i en sekvens, ett mönster.



Hur ska det fortsättas? Hur ser den 10:e figuren ut? Den 100:e?

3 Här höjs svårighetsgraden, eftersom figurerna inte är likformiga.

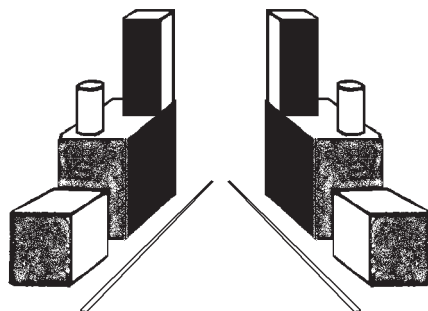
Triangeln återkommer som tredje objekt hela tiden, men det kan vara olika trianglar varje gång. Eleverna måste hela tiden hålla kvar figureernas utmärkande egenskaper i minnet, när de testar om de stämmer in i mönstret.



Spiegelbilder av hus

Syfte: Att känna igen, kommunicera och använda olika geometriska begrepp och lägesuttryck som framför, bakom, över under, till vänster, till höger, spegelbild osv.

Material: Klossar och kuber, spegel, maskeringstape e d.



1 Markera en gata på bordet genom att fästa två bitar maskeringstape med ca 20 cm mellanrum och visa två identiska hus som är spegelbilder av varandra.

”När du går på den här gatan, ser du ett hus på vänster sida och ett på höger sida. De ser exakt likadana ut. Hur är de lika? Hur är de olika?”

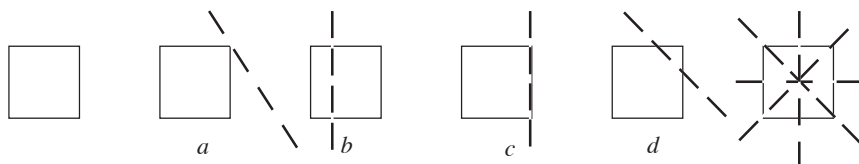
Diskutera tillsammans vad *spegelbild* och *spegelvänd* innebär och kontrollera med en ”riktig” spegel. Finns det hus eller andra byggnader i skolans närhet som är spegelvänt byggda? Bygg på med fler klossar, på båda sidor av vägen.

2 Varje par elever får samma uppsättning klossar och kuber. En av dem bygger ett hus på den ena sidan av gatan och den andra ska bygga huset spegelvänt på den andra sidan gatan.

”Hur kan ni använda spegeln för att kontrollera om ni gjort rätt?” ”Beskriv med ord hur ditt hus ser ut !”

Övningen kan upprepas med ombytta roller.

3 Två elever sitter på varsin sida om en skärm (uppslagen pärm, kartbok e d) med varsin likadan uppsättning klossar. Ada bygger en modell som Beda inte kan se. Ada beskriver



sin modell med ord och Beda försöker bygga en likadan. Skärmen tas sedan bort och modellerna jämförs.

En variant kan vara att Beda får ställa frågor som Ada besvarar med endast "ja" eller "nej". Upprepa övningen med ombytta roller.

Denna aktivitet kan också användas vid utvärdering. Observera elever och uppmärksamma hur de beskriver de olika geometriska figurerna och deras läge. Förstår de, kan de använda sig av de geometriska och språkliga begreppen?

Spegelövningar

Syfte: Att finna "spegelbilden", att upptäcka att en figur och dess spegelbild har samma form och storlek – är kongruenta. Att göra förutsägelser.

Material: Fickspeglar

1 Eleverna ritar en linje med hjälp av linjal. Spegeln placeras på eller så nära linjen att de kan se en längre linje, en kortare linje, en linje av samma längd eller två linjer. "Visa på minst två olika sätt hur man kan se två linjer?"

2 Eleverna kan rita t ex ett lok med två vagnar.



"Hur kan spegeln placeras så att loket får fyra vagnar, tre vagnar, två vagnar, en vagn?" "Kan spegeln placeras så att loket får fem vagnar?"

3 Eleverna ritar tre cirklar. Placera spegeln på eller så nära cirkelarna att 6, 5, 4, 3, 2 och endast en cirkel kan ses. Exempel:

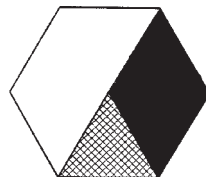


4 Eleverna ritar en kvadrat. Använd spegeln och kvadraten för att finna följande bilder:

- två kvadrater, "Är kvadraterna lika stora? Har de samma form?" (t ex figur a ovan)
- en rektangel (t ex b)
- en så stor rektangel som möjligt (t ex c)
- en kvadrat som är mindre än den ritade (t ex d).

"På hur många olika sätt kan spegeln placeras så att ni får en likadan kvadrat som den ursprungliga?" (Fyra sätt; e).

"Vilka andra figurer med olika form kan du göra med hjälp av spegeln?"

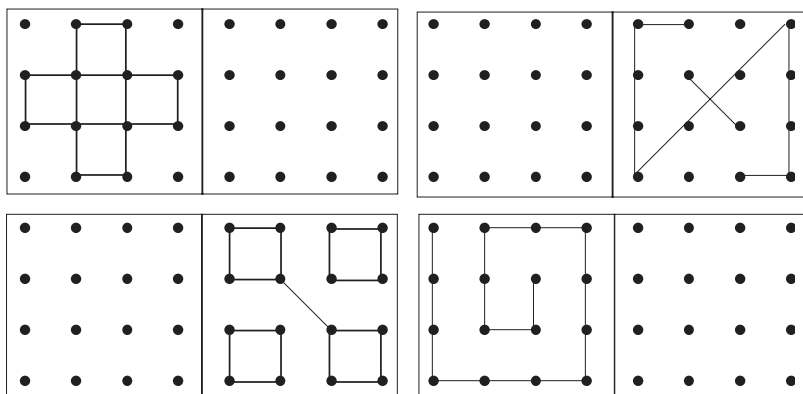


4 Prova att placera spegeln på eller nära den stora sexhörningen så att följande mönster uppträder.



"På hur många olika sätt kan spegeln placeras på en sexhörning så att en likadan sexhörning med samma form och samma storlek framträder?" (Sex sätt.)

Placera spegeln så att två sexhörningar blir synliga. "Har de samma storlek och form?" Om spegeln placeras nära, men inte på sexhörningen, syns två sexhörningar med samma storlek och form – originalet och spegelbilden.



Kommer du ihåg?

Syfte: Att utveckla synminnet och abstrakt seende.

Låt eleverna titta på en figur i taget några sekunder, vika bort den och så rita en bild av det de kommer ihåg och sedan jämföra sin bild med originalet ovan.

Skuggor

Syfte: Att känna igen och beskriva geometriska figurer av olika storlek och i olika läge som skuggor av geometriska figurer. Göra förutsägelser.

Material: Föremål som kan finnas i ett klassrum – klossar, kuber, små lådor, askar, burkar, pappersrullar. En stark ljuskälla behövs t ex ficklampa, bordslampa, projektor, starkt solsken.

Med hjälp av ljus och skugga är det möjligt att räkna ut vinklar, kurvor och djup. Exempelvis bestämdes formen och storleken på månens berg genom studier av deras skuggor.

Föremål och skuggor är en vardagsnära erfarenhet för de flesta. I följande aktivitet kan eleverna uppfatta både vanliga och ovanliga skuggor formade som geometriska figurer.

1 Handskuggor. Eleverna demonstrerar de skuggfigurer de kan göra.

2 Visa en urklippt kvadrat fastklistrad på tex en penna. Utmana eleverna genom att be dem skapa en skugga av den urklippta kvadraten som har formen av en kvadrat, rektangel och

linje. Eleverna visar dessa skuggor mot ett stort papper. ”Hur ska man göra för att få skuggan skarp?”

Rita av skuggornas form och ange eller rita den geometriska form som åstadkom dessa skuggor.

3 Tänk ut vilka skuggformer som kan uppstå av plana former som rektanglar, trianglar i olika former, sexhörningar och cirklar. Prova sedan och rita av skuggorna.

4 Arbeta på liknande sätt när det gäller kuber, cylindrar, prismor och pyramider. Eleverna gör först ett antagande och provar därefter om hypotesen stämmer.

En kub kan t ex ge skuggor formade som en kvadrat, en rektangel och till och med som en sexhörning.

En cylinders skugga kan bli en cirkel, en ellips (oval) eller en rektangel.

Plana figurer kan ge en skugga som ser ut som en linje, men det kan inte en tre-dimensionell figur ge. Be eleverna förklara varför!

Likformighet

Syfte: Att ge en innebörd av begreppet "likformighet" och förstärka elevernas rumsuppfattning. Att upptäcka olikheterna och likheterna i relationerna mellan likformiga figurers längd, area och volym.

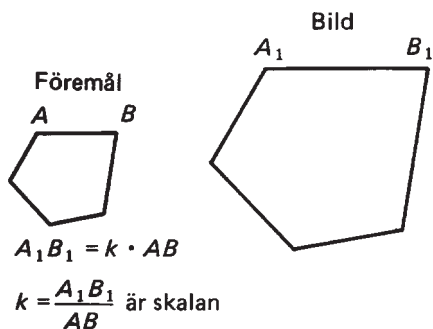
Material: Utklippta kvadrater, trianglar och romber, kuber.

Genom att använda konkret material, kan elevernas rumsuppfattning förstärkas, vilket också är betydelsefullt för deras fortsatta förståelse av mer formell geometri.

1 Diskutera kring begreppet "likformig". Be t ex eleverna att sätta in ordet i egna meningar. Inom matematiken finns en exakt definition:

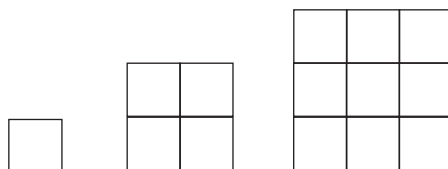
Två punktmängder är likformiga om avståndet mellan två godtyckligt valda punkter i den ena (föremålet) multiplicerat med ett positivt tal k är lika med avståndet mellan motsvarande punkter i den andra.

(Matematikterminologi i skolan s. 52)



I vardagssammanhang kan vi associera till fotografier, diabilder, OH-bilder, kopieringsmaskiner som förstorar och förminskar, modeller av olika slag.

2 Eleverna arbetar par- eller gruppvis med småkvadrater.



"Vilken är den minsta kvadrat som ni kan visa/bygga?"

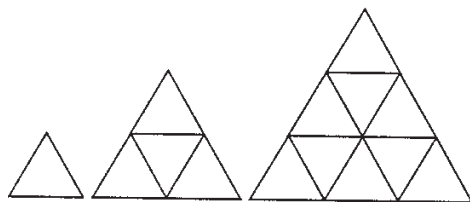
"Vilken är den näst minsta kvadraten ni kan bygga?" "Nästa storleksordning?"

Jämför sidornas längder med arean och gör en tabell. Förutsäg hur stor area den fjärde kvadraten har, den femte osv. Undersök om det stämmer. Formulera resultatet med egna ord.

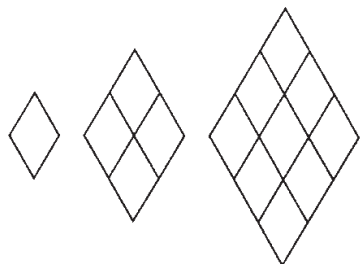
"Om en kvadrat har en sida som är dubbelt så lång som en annan kvadrats, hur stor är arean på den större kvadraten?" "Vad händer med omkretsen?" Diskutera längdskala – areaskala.

"Kan man bygga en kvadrat av 27 små kvadrater?" "Kan man bygga kvadrater som inte är likformiga?"

3 Gör på liknande sätt med trianglar. Eleverna kan förutsäga antalet små trianglar i varje figur, innan de bygger den och kontrollera sitt svar. För in värden i en tabell. Formulera resultatet i egna ord.



3 Gör motsvarande med romber.



Uppmana eleverna att leta efter mönster, när det gäller det antal små figurer som behövs för att bygga likformiga kvadrater, trianglar och romber. Upptäcker de kvadrattalen? 1, 4, 9, 16...

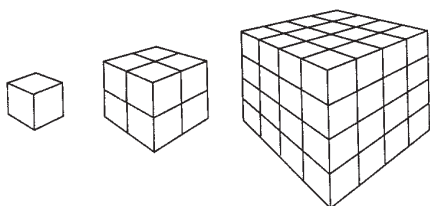
4 Här utvidgas övningen till tredimensionella objekt.

Utgå från en kub. "Hur många kuber behövs för att göra en dubbelt så hög kub?" "Tre gånger så hög?" Prova! Gör en tabell.

5 Generalisera resultaten från övningarna i två och tre dimensioner. Hur hänger det ihop med enheter?

6 Här är det möjligt att ta upp relationen area-skala-volym skala.

"Om en kub har begränsningsytor som har fyra gånger så stor area som en annan kubs, är då volymen fyra gånger så stor?" Varför inte? Hur många gånger större är den?



Aktiviteter kring ord och begrepp i geometri

Syftet med dessa aktiviteter är att utveckla elevernas tänkande i ett socialt sammanhang. Eleverna ska ges tillfälle att muntligt få förklara och argumentera för sitt tänkande och "kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer" (Kursplan i matematik).

Lärarens roll är att gå runt och observera eleverna och ta del av deras förklaringar och diskussioner, ställa frågor där eleverna saknar egna, göra inpass och komma med förslag som leder mot nytt kunnande och nya erfarenheter (se också kapitel 2). Denna information kan också användas vid utvärdering av vilka erfarenheter och kunskaper de har i geometri och om hur de förstår och kan använda geometriska begrepp.

Vid den inledande aktiviteten behövs en uppsättning med lappar med geometribegrepp.

Vad är jag?

Välj ut lämpliga ord från listan över "Geometriord och begrepp" (s 168).

Varje elev får en lapp och ska beskriva det begrepp, som ordet betecknar, för sina klasskamrater. Stimulera dem att inte endast göra det med hjälp av ord, utan genom att rita tex på tavlan, visa på verkliga exempel i klassrummet eller hämta föremål i skolan eller på skolgården. Uppmuntra samarbete och att de frågar varandra om råd och hjälp. De som blir färdiga kan hämta ytterligare en lapp.

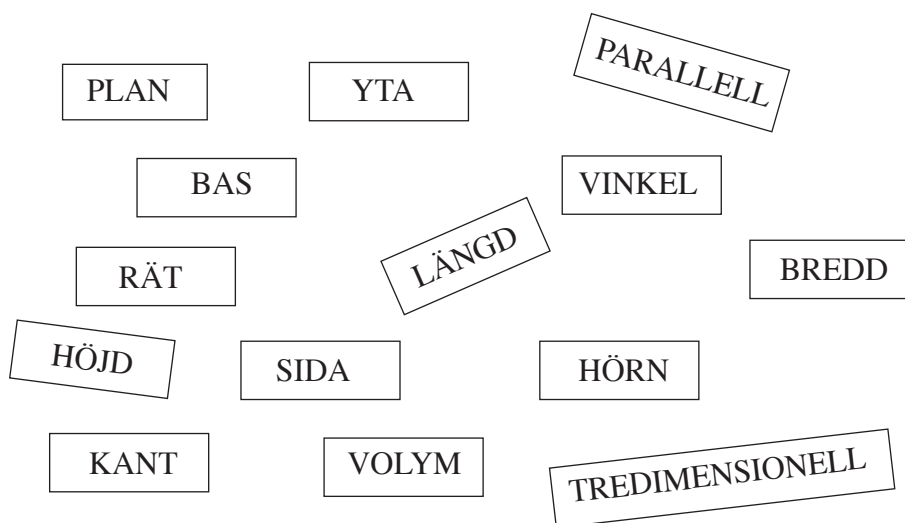
Vid redovisningen kan beskrivningen ges först och klasskamraterna får föreslå vilket ord eller begrepp som avses.

Här stimuleras såväl muntlig framställning som förmågan att lyssna.

Vid redovisningen är det intressant att som lärare reflektera över vilka sätt de valt att förklara på. Överväger någon representationsform? (jfr kapitel 1, s 15) Varför? Säger det något om mitt sätt att undervisa?

Hemliga kännetecken

Vid den andra delen av aktiviteten kan man arbeta i grupper om 3–4 elever i varje. Varje grupp behöver en egen uppsättning av lappar med geometriord. De ska nu välja ut ord eller begrepp som som de anser hör ihop på något sätt – som har något matematiskt kännetecken gemensamt. De ska inte avslöja för de andra grupperna vilken figur eller vilket begrepp de bestämt sig för, utan behålla det som gruppens hemlighet.



Dessa ord valde en grupp ut när de bestämt sig för begreppet "KUB".

Varje grupp plockar undan de överblivna lap-parna som de inte behöver. Därefter går de runt och försöker lista ut vilket gemensamt kriterium de andra grupperna valt för sina ord.

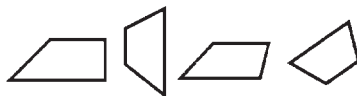
Begreppskort

Syftet är att ge eleverna tillfälle till att utveckla sitt tänkande genom att jämföra och utesluta, formulera och testa hypoteser och att sammanfatta sina slutsatser i en definition eller beskrivning.

Ett *Begreppskort* kan användas för att bygga upp och tydliggöra olika begrepp inom matematiken. Välj ord från listan över "Geometri ord och begrepp" och tillverka egna kort som passar din klass. Både exempel och motexempel tas upp och utifrån informationen avgör eleverna vilka av figurerna som uppfyller kriterierna för begreppet. Därefter ger de själva exempel och motexempel. Till sist skriver de med egna ord vad som kännetecknar det aktuella begreppet.

Detta sätt att arbeta med att skapa egna definitioner till matematiska begrepp kan naturligtvis användas i många olika moment inom matematiken – inte bara i samband med geometri.

Det här är parallelltrapetser:



Det här är inte parallelltrapetser



Vilka av följande figurer är parallelltrapetser?



Rita en parallelltrapets.

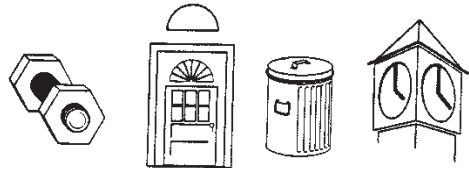
Rita en figur som inte är en parallelltrapets.

Vad är en parallelltrapets?

Skattjakt

Välj ut ord och begrepp från listan på s 168 och organisera en egen skattjakt som passar din klass. Här är ett exempel.

- 1 Här är objekt på din väg till skolan. Vilka geometriska namn skall du ge dem?
- 2 Gå på geometrisk skattjakt. Leta efter geometriska objekt.



Rita dem	Var finns de?	Vad används de till?
En cirkel?		
En halvcirkel?		
En kvadrat?		
En triangel?		
En kub?		
En rektangel?		
En pyramid?		
En romb?		
En cylinder?		

Frågor gällande grundläggande rumsuppfattning:

- Föreslå andra aktiviteter som kan utveckla och stärka elevernas rumsuppfattning? Är det skillnad mellan pojkar och flickor? (se t ex Levander, 1990) Hur påverkar detta undervisningen?
- Ägnar vi i skolan rimlig tid åt tredimensionella objekt i jämförelse med tvådimensionella objekt? Om inte, hur kan läget förbättras i matematik? I andra ämnena?
- Hur hanterar vi relationen mellan två- och tredimensionella objekt?

Frågor gällande begrepp och ord i geometri:

- Inventera ditt eget läromedel med avseende på begrepp/ord i geometri. Hur och när förekommer dessa begrepp och ord i undervisningen?
- Vilka krav ställer du på språkriktighet i geometriundervisningen? På dig själv som lärare? På eleverna? Vad kan man vinna med att i matematikundervisningen avsätta tid för bearbetning av innebörden i ord och begrepp?

Litteratur

- af Ekenstam, A. (1982). Geometrin genom skolan. *Nämnnaren* 8(3), 10-21.
- Ahlström, R. (1995). Uppslaget: Trianglar som ska sammanfogas. *Nämnnaren* 22(1), 26-27.
- Ardfeldt, A. (1992). Min matematikverkstad. *Nämnnaren* 19(1), 24-27.
- Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnnaren* 21(4), 36-45.
- Bodin, M. (1990). Klipp till med Pythagoras. *Nämnnaren* 17(3-4), 89.
- Bridén, G. (1988). Uppslaget: Volymberäkning. *Nämnnaren* 15(3), 28-29.
- Claesson, P. (1985). Uppslaget: Pussel med pentominobrickor. *Nämnnaren* 11(4), 38-42.
- Claesson, P. (1990). Att spela Nim. *Nämnnaren* 17(3-4), 46-49.
- Dunkels, A. & Claesson, P. (1983). Uppslaget: Små groddarna. *Nämnnaren* 10(2), 64-65.
- Dunkels, A. (1991). Problemlösning på geobräde. *Nämnnaren* 18(3/4), 96-100.
- Dunkels, A. (1991). Uppslag 6: Problemlösning på geobräde. *Nämnnaren* 18(3-4), 96-100.
- Ehrnberg, H. (1990). Matte med mått. *Nämnnaren* 17(1), 26-27.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1992). Måltavlan. *Nämnnaren* 19(4), 4.
- Emanuelsson, G. & L. (1994). Problemaavdelningen. *Nämnnaren* 21(1), 44-45, *Nämnnaren* 21(2), 54 och 21(3), 48-50.
- Emanuelsson, G. & L. (1994). Uppslaget: Kvadrater i kvadrat. *Nämnnaren* 21(4), 26-27.
- Emanuelsson, L. (1992). Utvecklande ytkunskaper. *Nämnnaren* 19(1), 20-23.
- Erlandsson, L. (1992). Uppslaget: Skuggor. *Nämnnaren* 19(4), 24-25.
- Ernestam, A. & Olsson, H. (1989). Tennis och matematik. *Nämnnaren* 16(1), 23-27.
- Hamarila L. (1988). *Titel saknas*. *Nämnnaren* 15(2), 65-67.
- Holmström, G. (1990). Uppslaget: Tredimensionellt luffarschack. *Nämnnaren* 17(1), 28.
- Hägemark, P. (1989). Ett brev betyder så mycket. *Nämnnaren* 16(2), 39-41.
- Hägemark, P. (1990). Geometriundervisning-1. *Nämnnaren* 17(2), 43-45 och Geometriundervisning-2. *Nämnnaren* 17(3-4), 82-84.
- Hägemark, P. (1991). Geometriundervisning-3. *Nämnnaren* 18(1), 41-44.
- Hägemark, P. (1993). Cirkelns kvadratur. *Nämnnaren* 20(4), 1993, 48-51.
- Joki, J. (1990). En dykning i tre dimensioner. *Nämnnaren* 17(3-4), 85-88.
- Klasson, J. & Persson, B. (1991). Uppslaget: Undersökning av en figur som växer. *Nämnnaren* 18(2), 29.
- Larsson, S. (1992). Man lär så länge man har elever. *Nämnnaren* nr 3, 1992, s. 34-35.
- Levander, S. (1990). Tar skolan hänsyn till könskillnader? *Nämnnaren* 17(2), 11-17.
- Lundell, K. & Widmaier P. (1993) Varför ska man lära sig matte? *Nämnnaren* 20(4), 30-35.
- Magne, O. (1990). Hur småbarn leker geometri. *Nämnnaren* 17(3-4), 77-81.
- Pehkonen, E. (1993). Problem med kvadrater. *Nämnnaren* 20(3), 28-29.
- Pehkonen, E. (1994). Övningar med Tangrapussel. *Nämnnaren* 21(3), 26.
- Piculell, B. (1988). Uppslaget: Skolgården. *Nämnnaren* 15(4), 26-27.
- Problemaavdelningen, Nämnnaren. I slutet av Nämnnaren finns ofta aktiviteter med anknytning till geometri.
- Rystedt, E. (1994). Matematik-Bild-Svenska. *Nämnnaren* 21(3), 30-31.
- Skoogh, L. (1991). Uppslag 2: Grundläggande färdigheter. *Nämnnaren* 18(3-4), 83-86.
- Stavle, E-L. (1993). Hur ser lärare på geometri? *Nämnnaren* 20(2), 18-20.
- Swetz, F. (1989). Proving the Pythagorean Theorem. *Nämnnaren* 16(2), 42-44.
- Tvete, K. (1987). Geometri – Jordmåling. *Nämnnaren* 14(2), 34-39.
- Ulin, B. (1988). Geometriupplevelse 1. *Nämnnaren* 15(4), 38-45.
- Ulin, B. (1989). Geometriupplevelse 2. *Nämnnaren* 16(1), 33-41.
- Ulin, B. (1991). Den mångsidiga fyrhörningen – några uppslag till problemlösning i geometri. *Nämnnaren* 18(2), 50-53.
- Ulin, B. (1995). Generalisering är en dygd. *Nämnnaren* 22(1), 37-40.
- Wistedt, I. (1993). Matematiska samtal. *Nämnnaren* 20(4) 21-23.
- Anderberg, B. (1992). Begrepp och termer i geometri. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 99-112.
- Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *NOMAD* 2(2), 6-35.
- Dahl, K. & Nordquist, S. (1994). *Matte med mening*. Stockholm: ALFABETA.

- Dunkels, A. (1983). *Boken om geometri på ett bräde*. Göteborg: Gothia.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommentarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bidrag till Sveriges matematiklärarförenings sommarkurs i Mallsjö 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T. (Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning*. Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red) (1992). *Geometri och Statistik*. Lund: Studentlitteratur.
- Emanuelsson, L. (1992). Ett arbetsområde i geometri. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 47-56.
- Fritzén, L., Sjöström, B. & Wallerback, M. (1992). Förstår du vad du mäter? I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 72 - 84.
- Furness, A. (1988). *Mönster i matematiken*. Malmö: Ekelunds Förlag.
- Hedén, R. (1989). *Geometri och vår omvärld. Täljaren*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Hedén, R. (1992). Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometri-undervisningen. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 27-36.
- Hägmark, P. (1989). *Laborativ geometri*. Lund: Studentlitteratur.
- Kilborn, W. (1992a). *Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 3. Mätning, geometri, funktioner, sannolikhetslära och statistik*. Malmö: Almqvist & Wiksell, Hermöds.
- Kilborn, W. (1992b). Mätning. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 37-45.
- Reutersvärd, O. (1985). *Omöjliga Figurer*. Lund: Doxa.
- Skolöverstyrelsen (1982). *Matematikterminologin i skolan*. Stockholm: Liber.
- Skoogh, L. (1992). Begrepp och termer i geometri. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 99-112.
- Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår* (3:e upplagan). Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Ulin, B. (1992). Undersökande arbetssätt i geometri. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 57-71.
-
- Jacobs, H.R. (1982). *Mathematics, a Human Endeavor*. 2d ed. New York: W.H. Freeman & Co.
- Johnson, D.A. (1995). *Paper Folding for the Mathematics Class*. Reston, Va.: NCTM.
- McIntosh, M. E. (1994). Word Roots in Geometry. *The Mathematics Teacher* 87(7).
- NCTM (1993a). *Geometry and spatial sense*. Subject-Matter Books for Grades K-6. Reston, Va.: Author.
- NCTM (1993b). *Geometry from multiple perspectives*. Activity Books for Grades 9-12. Reston, Va.: Author.
- NCTM (1993c). *Geometry in the middle grades*. Activity Books for Grades 5-8. Reston, Va.: Author.
- NCTM (1993d). *Measurement in the middle grades*. Activity Books for Grades 5-8. Reston, Va.: Author.
- NCTM (1987). *Learning and Teaching Geometry*. 1987 Yearbook. Reston, Va.: Author.
- Paasonen, J. (1994). What on earth is a straight line? *NOMAD* 2(3/4), 47-56.
- Wyndham, J. (1993). Mediating artifacts and interaction in a computer environment. An exploratory study of the acquisition of geometry concepts. *NOMAD* 1(2), 59-85.

8

Statistisk kommunikation

Att kunna förstå och analysera statistisk information har blivit allt viktigare i vårt moderna samhälle. Sådana kunskaper kan eleverna utveckla när de själva genomför och redovisar statistiska undersökningar. Undervisningen kan integreras med andra ämnen och anknytas till aktuella händelser.

Andrejs Dunkels beskriver hur man kan arbeta med stam-blad-diagram och Lisbeth Åberg-Bengtsson redogör för elevers svårigheter vid tolkning av diagram.

I vår undervisning ska vi sträva efter att eleven

inser värdet av och kan använda matematikens språk, symboler och uttrycksformer,

samt förstår och kan använda

grundläggande statistiska begrepp och metoder för att samla in och hantera data och för att beskriva och jämföra viktiga egenskaper hos statistisk information.

Kursplan i matematik

Arbete med statistik och diagram ger goda möjligheter att låta eleverna uppleva samband både mellan olika delar av matematiken och mellan matematik och andra ämnen. Samla in, analysera och redovisa data kan man göra i många olika sammanhang tex i naturorienterande ämnen, geografi och samhällskunskap.

Eleverna ges möjlighet att träna sina kommunikativa färdigheter när de formulerar frågor, läser och tolkar olika typer av diagram och skriftligt eller muntligt analyserar data. De får tillfälle att resonera och argumentera och diskutera kring orsak och verkan och kring alternativa förklaringar till ett resultat. När klassen arbetar med statistik är det förhållandevis lätt att hitta uppgifter som kräver en längre tid för att lösas; insamling av data, bearbetning, analys och redovisning tar tid. För många elever handlar matematik om att hitta snabba svar, och de behöver därför också få arbeta med uppgifter som kan engagera under en längre period. Man kan göra undersökningar om företeelser som förändras över tid, exempelvis hur mycket klassen växer

(se elevuppgift) eller hur mycket en amaryllis växer (se Svanberg, 1991, där det också finns andra exempel på hur man kan använda amaryllislöken i matematikundervisningen).

Eleverna kan också genomföra undersökningar utifrån egna frågor och idéer. Det kan handla om frågor som aktualiserats i andra sammanhang, som tex ”Jag undrar hur vanligt det är med vänsterhänta”. Miniundersökningar kan göras på den egna skolan. Egna undersökningar kan i sig ge upphov till nya frågor och de ger dessutom utmärkta möjligheter till att diskutera frågor som felkällor och urval¹.

Genom att genomföra egna undersökningar får eleverna erfarenhet av hur en statistisk undersökning genomförs. Om eleverna själva får vara med om att genomföra en undersökning ökar förutsättningarna för att de lär sig att kritiskt analysera statistiska uppgifter. De får själva erfara hur resultatet kan förändras av exempelvis felmätningar och dåliga urval.

För att på ett konkret sätt illustrera skillnaden mellan median och medelvärde kan man ställa upp alla elever i exempelvis åldersordning. Medianen hittar man lätt, den elev som står i mitten. Medelvärdet kan man räkna ut. Därefter låter man även läraren ingå i materialet. Då ser eleverna att medianåldern knappast ändras, medan medelvärdet förändras mer. Ju äldre lärare desto bättre! Att införa extremvärden i sina undersökningar och se vad som händer kan hjälpa eleverna att förstå att olika lägesmått säger olika saker. Det kan utveckla deras kritiska förmåga när det gäller att tolka statistiskt material.

I många sammanhang träffar eleverna på diagram av olika slag. Det är ett enkelt och snabbt sätt att åskådliggöra viss information och används dagligen i tidningar och TV.

Många elever har svårt att tolka cirkeldiagram. De inser inte att dessa visar relationer och inte absoluta värden. Det kan alltså vara värdefullt att barnen får arbeta med att själva konstruera cirkeldiagram. Detta behöver inte vara så komplicerat, eftersom man inte behöver använda sig av grader och vinklar. Vi visar två övningar som passar redan de första skolåren. ”Vilken mjölk dricker vi?” och ”Hur mycket mjölkprodukter köper vi under en vecka?”

En annan svårighet handlar om att tolka värden i ett koordinatsystem, att beakta två dimensioner samtidigt. För att träna detta kan man göra övningar liknande ”Busskön”. I det sammanhanget kan det vara lämpligt att diskutera med eleverna när det är möjligt att sammanbinda punkter till en linje. Det händer att man i tidningar ser diagram där punkter är sammanbundna på ett felaktigt sätt.

¹ I boken ”Geometri och statistik” finns ett antal artiklar om statistik, både om statistik i skolan och om statistik i allmänhet, för lärares fördjupning (Emanuelsson m fl, 1992). Nämnaren nr 4, 1986-87 är ett temanummer om Statistik.

Busskön

Vilken punkt hör ihop med vilken person i kön?

Avsikten med övningen är att få eleverna att utnyttja all information som finns i diagrammet. Dessutom tränar de samarbete och förmågan att resonera och argumentera.

Låt eleverna fundera en stund enskilt.

Uppmana dem sedan diskutera i mindre grupper och resonera därefter i klassen.

Exempel på frågor:

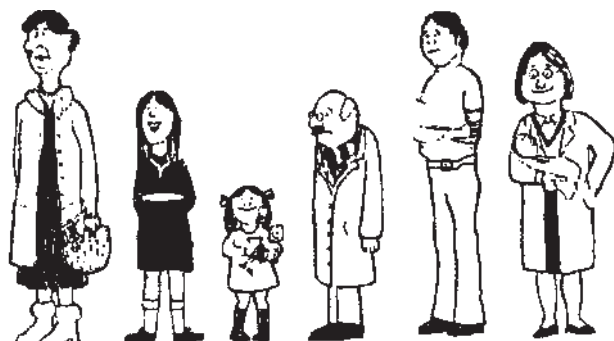
Hur kan man i diagrammet se att två personer är lika långa? Lika gamla?

Var skulle du placera dig själv?

Kan man se hur gamla och hur långa personerna är?

Spelar det någon roll i den här uppgiften?

Hur ska diagrammet se ut för att man ska kunna avläsa ålder och längd?

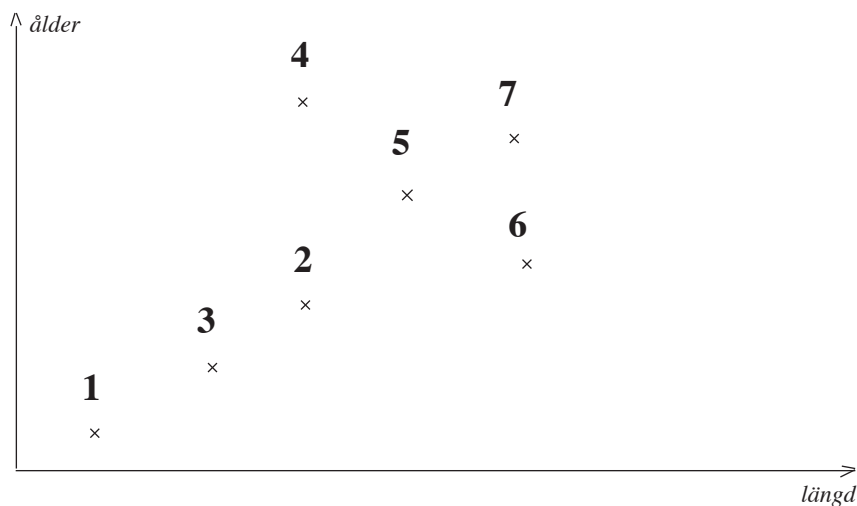


Rut

Eva Pia

Hugo

Per



Hur mycket växer vi?

Avsikten med övningen är att utföra mätningar, resonera om fel och noggrannhet, sammanställa data, konstruera diagram, använda och förstå begreppen typvärde, median och medelvärde samt att arbeta med en uppgift under längre tid. Du behöver arbetsbladet, måttband eller meterstock och rutpapper till diagram. Börja övningen i början av ett läsår. Fråga klassen:
Hur mycket tror ni att ni kommer att växa under det här året?
Menar vi var och en eller sammanlagt, på längden eller i vikt?

Låt eleverna komma med gissningar och låt dem förklara varför de gissar just så. Försök att hitta någon som tänker efter hur mycket han/hon själv vuxit det senaste året. Dela ut uppgiften på nästa sida ”Så här mycket växer jag” och låt eleverna hjälpas åt att fylla i dem. Visa hur man kan förenkla mätningen genom att sätta märke eller tejp på vissa bestämda längder och sen mäta därifrån. Diskutera med klassen hur noga ni ska mäta. Låt eleverna göra var sitt eget diagram där de för in sin egen längd. Eftersom det är tillväxten som ska studeras kan linjediagram vara lämpligt, då eleverna sannolikt har träffat på den typen av ”växtkurvor” hos skolsköterskan. Man kan dock utnyttja tillfället att diskutera huruvida tillväxten verkligen är linjär och hur långa avstånd mellan punkterna man kan tillåta sig att ha.

Efter en månad görs mätningen om. Fyll i tabell och diagram som tidigare. Visa att man eventuellt kan binda samman punkterna i diagrammet.
Hur kan ni se om ni har vuxit?
Hur ser det ut om ni inte vuxit något?
Har någon blivit kortare? Varför i så fall?

Ställ sedan frågorna:
Hur mycket har vi vuxit sammanlagt?
Hur ska vi ta reda på det på enklaste sätt?

Låt eleverna föreslå och försök hitta någon som vill systematisera med hjälp av en tabell.

Gör en gemensam tabell :

Har vuxit	Antal elever
0 cm	III
0,5 cm	—III
1 cm	—III —III
1,5 cm	—III III

Hur mycket har vi vuxit sammanlagt?
Hur mycket har de flesta vuxit?
Vilket är det vanligaste värdet? (Typvärdet).

För att på ett konkret sätt visa vad median är kan man ställa upp eleverna på rad. Först de som inte vuxit alls, därefter de som vuxit 0,5 cm etc. Bestäm sedan vilken elev som står i mitten, eller vilka två. Hur mycket har den eleven vuxit?

Om alla hade vuxit lika mycket och vi sammanlagt skulle vuxit så mycket som vi nu har gjort, hur mycket hade var och en då vuxit?

Resonera om hur man kan hitta svaret. Stimulera eleverna att komma med olika konkreta lösningar. Anteckna sedan månadens resultat, så att det finns kvar.

Konstruera ett stort diagram över något av värdena att ha på väggen, så att klassen kan följa utvecklingen. Man kan exempelvis följa den sammanlagda tillväxten.

Fortsätt denna övning regelbundet. Efter några månader kan man inleda mätningarna med att låta eleverna gissa månadens värden.

Om man inte vill använda elevernas tillväxt som underlag kan man naturligtvis mäta andra företeelser.

Så här mycket växer jag

Namn _____

Ålder i augusti _____ år _____ månader

Ålder i juni _____ år _____ månader

Dag	Månad	Längd i cm	Så här mycket har jag vuxit den senaste månaden
	aug		
	sep		
	okt		
	nov		
	dec		
	jan		
	feb		
	mars		
	april		
	maj		
	juni		

Vilka data ligger bakom dessa värden?

Ofta arbetar eleverna utifrån givna data och söker medelvärde, median och typvärde. Den här uppgiften utgår från givna värden och elevernas uppgift är att hitta data som skulle kunna ha givit dessa värden. När eleverna arbetar ”baklänges” tvingas de att använda sina kunskaper på ett nytt sätt, vilket förutsätter att de förstår det aktuella innehållet. Övningen görs med fördel i små grupper eller par. För att hjälpa de elever som behöver ett konkret stöd, kan man använda småkuber eller liknande. Anpassa de ingående värdena så att de passar din klass.

1 Nio personer har ett antal karameller. Det mesta någon har är 9 st. Minst en person har inga karameller. Medelvärde och median är 4. Typvärdet är 2.
Hur kan karamellfördelningen se ut? Det finns olika lösningar.

Gå gemensamt igenom de olika förslagen. Försök hitta olika sätt att angripa problemet. Be eleverna förklara varför eventuellt felaktiga lösningar är fel. Om eleverna inte har några fel kan man presentera några egna exempel som eleverna får skärskåda.

Exempel:

- 0, 0, 2, 2, 4, 5, 6, 8, 9. (0 är också typvärde)
- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 9. (typvärdet är inte 2)
- 0, 1, 2, 2, 4, 5, 6, 8, 9. (medelvärdet är inte 4)

2 Låt eleverna konstruera liknande problem med bestämt medelvärde, median och typvärde. Låt dem försöka hitta problem som inte har några lösningar och problem som bara har en möjlig lösning.

Vilken mjölk dricker vi?

Avsikten med den här aktiviteten är att eleverna ska få göra en statistisk undersökning och få en tidig kontakt med cirkeldiagram. Den går bra att anknyta till arbeten i hemkunskap eller arbeten kring bondgården och dess djur.

Engagera barnen i en diskussion kring vilken mjölk de helst dricker.

Vilken sort tycks de flesta föredra?

Finns det någon sort som ingen tycker bäst om?

Hur stor del av klassen föredrar lättmjölk?

Vilket är populärast, mellanmjölk eller standardmjölk?

Kan man visa detta på något sätt?

Diskussionen kan leda fram till ett förslag på att göra någon typ av bild eller diagram. Eleverna kommer med förslag som man kan prova gemensamt. Undersökningens resultat kan användas för att konstruera ett enkelt cirkeldiagram. Man behöver flirtkulor, gärna lite större, tråd och nål samt ett stort papper.

Bestäm vilken färg på kulorna som ska representera en viss mjölksort. Låt eleverna visa vilken mjölk de föredrar genom att ta en kula i motsvarande färg. Trä därefter upp alla kulor, varje färg för sig. När nu alla kulor finns uppträdda kan man lätt se vilken mjölk som är mest omtyckt i klassen. Knyt sen ihop ändarna på snöret till en ring. Klistra gärna upp kulringen på en kartong eller träplatta och sätt upp den.

Samtala om vad cirkeln berättar.

Vilken sorts mjölk är mest omtyckt?

Minst omtyckt?

Jämför de olika mängderna och använd begreppen hälften så många och dubbelt så många etc.

När man behandlat och förstått idén med den konkreta ringen kan man gå över till att rita av kulringen som en cirkel på papper. Markera hur långt de olika kulorna sträcker sig och färglägg cirkelns rand i samma färger som kulorna.

Utifrån elevernas mognad kan man sedan utveckla arbetet med cirkeln, först genom att visa hur man vanligen delar in ett cirkeldiagram i sektorer. Man kan visa att cirkelns storlek inte spelar någon roll, man kan klippa av de yttersta fem centimetrarna på cirkeln utan att det påverkar relationerna. Detta är ett viktigt steg, eftersom problemet för eleverna oftast handlar om att förstå att cirkeldiagrammet inte visar absoluta värden utan relativa. Om man har fler klasser som gjort cirkeldiagram över samma sak kan man jämföra de olika. Man kan komma överens om hur stor cirkelns radie ska vara och det blir då tydligare att det handlar om relationer, förutsatt att klasserna inte är lika stora.

För elever som kommit in på procentbegreppet, kan samma typ av övning användas som utgångspunkt. När den ursprungliga cirkeln ritats upp på papper och man markerat sektorerna, kan man använda ett måttband som är indelat i 100 delar, t ex cm. Med hjälp av detta markerar man i, eller eventuellt utanför, cirkeln men med samma mittpunkt, en ny cirkel med omkretsen 100 enheter. Därefter mäter man varje sektors båge – och direkt kan man utläsa den procentuella andelen.

Låt eleverna upptäcka detta. Är de vana att arbeta med egna undersökningar räcker det kanske att de får uppgiften:

Hur ska vi kunna göra om cirkeln så att den visar procent på ett lätt sätt?

Andra elever kan man ge 100-måttbandet och uppmana dem att använda det.

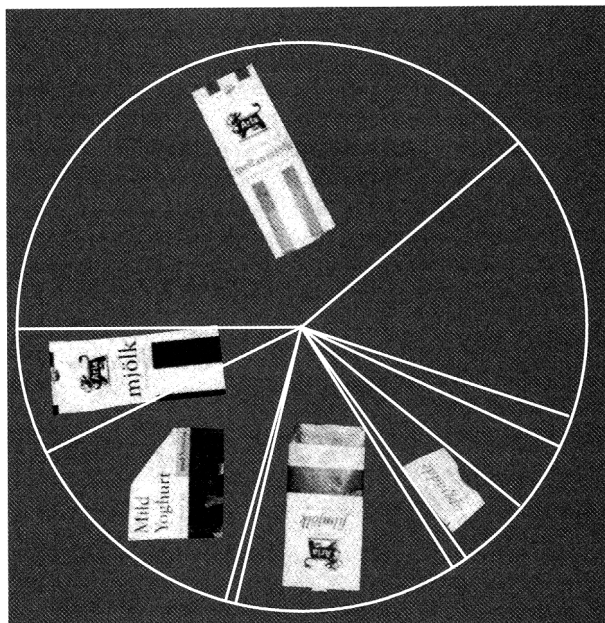
Med utgångspunkt från övningen om mjölken kan man göra en statistisk undersökning i klassen.

Hur mycket mjölkprodukter köper vi under en vecka?

Diskutera vilka mjölkprodukter klassens familjer köper under en vecka. Låt eleverna ställa hypoteser och göra en del antaganden. Anteckna dessa så att ni efter undersökningen kan jämföra med hur är i verkligheten.

Låt eleverna som hemuppgift ta reda på vilka mjölkprodukter och hur mycket av dem familjen köper.

I skolan sammanställs resultatet i tabellform. Det kan därefter presenteras i form av olika sorters diagram, exempelvis stapeldiagram och cirkeldiagram. Ett stapeldiagram kan ritas på papper men också med indianpärlor på tråd. Varje mjölkprodukt motsvaras av en färg på pärlorna och varje pärla av en bestämd mängd, t ex 1 pärla = 1 liter.



Aktiviteten kan sedan utvidgas:

Knyt ihop alla trådar till en lång tråd som knyts samman till en ring. Denna läggs i cirkelform på ett papper och ritas av. Kanten färgläggs i samma färg som pärlorna. Pärlringen kan sedan sättas upp.

Vad kan man läsa ut av cirkeldiagrammet?

Eleverna uppmärksammas på att det inte längre direkt ur diagrammet går att utläsa något om de absoluta värdena. De kan göra många jämförelser mellan olika varor och användningen av ord och begrepp som mer än, mindre än, hälften, dubbelt, fjärdedel osv stimuleras. Man kan låta eleverna berätta om diagrammet både muntligt och skriftligt.

Aktiviteten kan sedan utvecklas på samma sätt som i "Vilken mjölk dricker vi?" Andra utvecklingsmöjligheter är att räkna ut vad allt kostat, hur mycket det väger, hur stor plats det skulle ta i rummet, hur mycket sopor det blivit.

- Vad har du gjort för övningar inom området statistik och diagram som du tycker har fungerat bra? Varför har det varit bra övningar?
- Vad har du för möjligheter att i matematikundervisningen använda statistik och diagram som klassen träffar på i andra sammanhang?
- Gå igenom några aktuella dagstidningar. Vilka diagram finner du, som skulle kunna vara användbara i din undervisning?
- Ta ett diagram ur en tidning och presentera det för eleverna, utan förklarande text. Låt dem tolka det. Vilka svårigheter stöter de på?
- Prova att göra ett stam-bladdiagram, se Andrejs Dunkels artikel på s 189. Vilken typ av data passar bra? Låt eleverna komma med förslag.
- Lisbeth Åberg-Bengtsson beskriver några svårigheter barn har vid tolkning av diagram. Hur stämmer det med dina erfarenheter?
- Ibland hör man att "Statistik ljuger" och "Med statistik kan man bevisa vad som helst". Hur vill du bemöta det? Vad får det för konsekvenser för din undervisning?
- Jämför Lgr 80 och Lpo 94 med avseende på statistikmomentet. Vilka är, enligt din uppfattning, de väsentligaste skillnaderna?

Litteratur

- Andersson, G. (1981). Matematiken på de tvååriga linjerna: Att ljuga med statistik. *Nämnan* 8(2), 64-65.
- Andersson, G. (1982a). Att luras med statistik – mycket mer än vilseledande diagram. *Nämnan*, 9(1), 49-54.
- Andersson, G. (1982b). Statistisk kommunikationsfärdighet – genomsåda och belysa. *Nämnan* 9(2), 73-77.
- Andersson, G. (1983a). Statistisk kommunikationsfärdighet. Problem med väljarbarometrar. *Nämnan* 9(3), 48-53.
- Andersson, G. (1983b). Statistisk allmänutbildning. Rapport från en konferensdag. *Nämnan* 9(4), 43-45.
- Andersson, G. (1983c). Statistisk kommunikationsfärdighet. Lite mer om den statistiska felmarginalen. *Nämnan* 9(4), 46-49.
- Andersson, G. (1983d). Statistisk kommunikationsfärdighet. Argumentation med index. *Nämnan* 10(1), 50-54.
- Andersson, G. (1984). Litet statistiskt lexikon. *Nämnan* 11(1), 48-51.
- Andersson, G. (1987). Statistisk klokskap. *Nämnan*, 13(4), 21-23.
- Andersson, G. (1991). Nämnan och statistiken. *Nämnan* 18(3/4), 140-141.
- Danielsson, T. (1987). Sagan om Frankensteins medeltal. *Nämnan* 13(4), 68-70.

- Dunkels, A. & Vännman, K. (1986). Statistik i användning: Att vara detektiv bland siffror och verkligheten. *Nämnanaren* 12(4), 69-72.
- Dunkels, A. (1982). Diagram för bättre hälsa. *Nämnanaren* 9(2), 63-64.
- Dunkels, A. (1991). Den första statistiken. *Nämnanaren* 18(3/4), 104-107.
- Dunkels, A. (1992). Avprickning. *Nämnanaren* 19(2), 26-30.
- Gustafsson, K. & Törefors, J. (1994). Statistik i praktiken. *Nämnanaren* 21(4), 28-32.
- Johansson, K. m fl (1983). Stam-bladdiagram i vinterskrud. *Nämnanaren*, 9(4), 42-43.
- Johansson, L-G. (1994). Hundra procent svensk. *Nämnanaren* 21(4), 8-12.
- Johansson, B. & Emanuelsson, G. (1992). Måltavlan. *Nämnanaren* 19(4), 4.
- Johansson, B. & Emanuelsson, G. (1994). Måltavlan. *Nämnanaren* 21(4), 2-3.
- Johansson, S. (1987). Statistikens roll i samhället. *Nämnanaren* 13(4), 6-7.
- Polfeldt, T. (1987). Miljöstatistik – bra tillämpningsområde. *Nämnanaren* 13(4), 39-40.
- Råde, L. (1987). Den passionerade statistikern, F. Nightingale. *Nämnanaren* 13(4), 4-6.
- Sundström, P. (1985). SCBs skolservice. *Nämnanaren* 12(2), 44-47.
- Sundström, P. (1987). Skolservice i statistik. *Nämnanaren* 13(4), 8-9.
- Svanberg, E. (1991). Nämnanarens stipendium. *Nämnanaren* 18(3-4), 12-13.
- Vännman, K. (1981). EDA - detektivarbete bland siffror med papper, penna och linjal. *Nämnanaren* 7(4), 42-52.
- Åberg-Bengtsson, L. (1992). Förstår barn diagram? *Nämnanaren* 19(4), 19-23.
- Andersson, G. (1989). *Lögn och sanning i statistik*. Stockholm: Liber.
- Andersson, G. (1992a). Statistik i vardagen. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 139-153.
- Andersson, G. (1992b). Litet statistiskt lexikon. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 199-212.
- Dunkels, A. (1992). Statistik i skolan. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 167-182.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommentarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bidrag till Sveriges matematiklärarförenings sommarkurs i Mullsjö 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T. (Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning*. Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red) (1992). *Geometri och Statistik*. Lund: Studentlitteratur.
- Ribe, M. (1992). Vad är en statistisk undersökning. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 127-138.
- SCB (1993). *Fickskolan*.
- SCB (1994a). *Miljösverige*.
- SCB (1994b). *Sverige i siffror*.
- Sjöström, O. (1993). *Statistik, praxis och bildning – perspektiv på utbildning*. Ett försök till helhetsperspektiv där grundutbildning i statistik relateras till statistisk tillämpning i yrkesliv och livet i övrigt. Uppsala universitet, Filosofiska institutionen.
- Stukát, S. (1992). *Grundkurs i statistik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- Vännman, K. & Dunkels, A. (1984). *Boken om kreativ statistik med EDA*. Göteborg: Förlagshuset Gothia.
- Vännman, K. (1992). Att tala med tabeller och diagram. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red), *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur, 155-165.
- Cockcroft, W. H. (Chairman) (1982). *Mathematics Counts*. London: H.M.S.O.
- NCTM (1991). *Data analysis and statistics across the curriculum*. Addenda Series for Grades 9 - 12. Reston, Va.: Author.
- NCTM (1991). *Dealing with data and chance*. Activity Books for Grades 5-8. Reston, Va.: Author.
- NCTM (1991). *Making sense of data*. Subject-Matter Books for Grades K-6. Reston, Va.: Author.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. Manchester: University of Nottingham.

Den första statistiken

Andrejs Dunkels

Här berättas om hur man kan använda stam-bladdiagram redan år 1 dels för att visa data på ett överskådligt sätt dels repetera tiotal och ental på ett intresseväckande och konkret sätt. Barnen kan börja med att arbeta med sina föräldrars åldrar och sedan ta pulsen på varandra med hjälp av yoghurtburkar.

Det är viktigt att utveckla barns mentala bilder av tal jämsides med att de lär sig grunderna inom aritmetiken. Inom skolmatematiken förknippas tal i första hand med uträkningar, men i vardagslivet används tal mest i situationer som inte har med uträkningar att göra, t ex i tabeller, uppskattningar, ankomst- och avgångstider, priser, datum, postnummer, storleksordningar, jämförelser och liknande "numeriska meddelanden". Man använder alltså mer beskrivande statistik än aritmetik, skulle man kunna säga. Jag menar nu inte alls att man ska införa "fina ord" som "beskrivande statistik" på lågstadiet utan bara att man borde ge mer plats för aktiviteter som går ut på att hantera tal utan att göra några uträkningar. Att införa stam-bladdiagram är ett steg i den riktningen.

Stam-bladdiagrammet

Eftersom idén bakom stam-bladdiagrammet bygger på positionssystemet kan dessa diagram utnyttjas vid repetition av tiotal och ental på vårterminen i åk 1. Låt mig inleda med att påminna om vad ett stam-bladdiagram är. Dessa siffror kommer från en klass i åk 1 där man räknat antalet hjärtslag under en halv minut:

44, 52, 52, 60, 39, 40, 54, 50, 56, 46, 49

Denna artikel har tidigare publicerats i
Nämnamnaren 100, 18(3-4), 104-107.

För att få detta mer överskådligt kan man först skriva upp de tiotalssiffror som förekommer och dra ett streck till höger, se figur 1.

Sedan går man igenom raden av värden ett efter ett. När de fyra första, 44, 52, 52, 60, är avklarade ser det ut som i figur 2. När man gått igenom alla värdena blir det som i figur 3. I figur 4 har värdena inom varje rad också ordnats efter storlek. Resultatet är ett stam-bladdiagram, detta förnämliga mellan-ting mellan diagram och tabell, som infördes av John W. Tukey i början av 70-talet och som idag används av forskare, lärare och konsulter världen över. Namnet kommer av att tiotalen påminner om en stam, på vilken det sitter en massa blad, entalssiffrorna.

tio- tal	en- tal	tio- tal	en- tal
3		3	
4		4	4
5		5	22
6		6	0

Figur 1

Figur 2

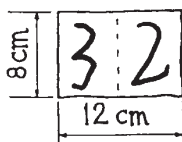
tio- tal	en- tal	tio- tal	en- tal
3	9	3	9
4	4069	4	0469
5	22406	5	02246
6	0	6	0

Figur 3

Figur 4

Den första lektionen i åk 1

Som förberedelse till denna lektion skulle varje elev i klassen ta reda på sin mammas och pappas ålder. Lektionen inleddes sedan med en omröstning om vems ålder vi skulle titta på först. Mammorna fick de flesta rösterna. Varje elev fick en orangefärgad rektangulär bit kartong, 8 cm bred och 12 cm lång. Den delades på hälften med ett veck parallellt med kortsidan, och sedan skrev var och en sin mammas ålder med stora siffror, tiotalssiffran till vänster och entalssiffran till höger om vecket. Se figur 5.



Figur 5

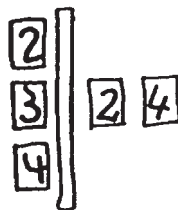
Så klippte var och en en bit sin kartongbit längs mittvecket. Utan uppmaning började barnen leka och experimentera med tiotalssiffran och entalssiffran. Några lät siffrorna byta plats och tolkade resultatet som att deras mamma var t ex 92 år, vilket var väldigt roligt och gjorde att den positiva atmosfären blev ännu mer positiv. Detta skapade ett utmärkt utgångsläge för att diskutera tiotal och ental och vikten av att veta vilket som är vilket. Jag flikade in frågor i stil med: "Johans mamma är 41 år, hur gammal blir hon om man kastar om siffrorna?" Nollans roll kom också upp: "Adams mamma är 4 år med siffrorna omkastade. Hur gammal är hon egentligen?"

Var och en fick så hålla upp sin tiotalssifra. Det fanns 2, 3 och 4. Jag tog en av varje slag och la ut dem på golvet med en pappersremsa till vänster, som i figur 6.



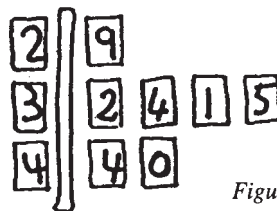
Figur 6

Vi samlades på golvet och varje barn hade med sig entalssiffran i mammas ålder. "Nu ska ni en efter en", sa jag, "lägga er entalssiffran på golvet vid tiotalssiffrorna så att vi så småningom kan läsa alla era mammors åldrar. Vem vill börja?" Några fler instruktioner gav jag inte, utan barnen skulle själva komma på detaljerna. Självklart uppstod tveksamhet då och då, någon placerade sin siffran på fel ställe, men barnen hjälpte varandra och på det hela taget var misstagen överraskande få. Hanna började. Hennes mamma var 32 år och hon la sin entalssiffran till höger om remsan på samma rad som 3:an, fullt korrekt. Johan hade entalssiffran 4 och la den till höger om Hannas 2:a efter viss tvekan. (figur 7.) Nu läste vi alla i korus de åldrar som dittills hade lagts ut: "Trettitvå, trettifyra", medan jag pekade på motsvarande siffror.



Figur 7

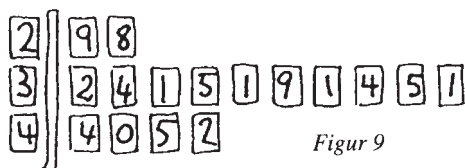
En av eleverna sa att mamman var trehundra-tjugofyra år, när vi hade nått det läge som visas i figur 7. Vi fick anledning att diskutera platsvärde och att det som vi hade till vänster om remsan var tiotal. För varje entalssifra som kom på plats läste vi igenom alla åldrar i korus. T ex när sju barn var klara och situationen var som i figur 8 läste vi: "Tjugonio, trettitvå, trettifyra, trettiätt, trettifem, förtifyra, förti." Någon råkade läsa 40 som "förti-noll", och alla skrattade.



Figur 8

Jag tyckte att "förti-noll" var mycket fyndigt och vi uppehöll oss vid detta en stund. Om man tänker efter, så är det egentligen mer logiskt att säga "förti-noll" än bara "förti". Jag är övertygad om att det sättet att läsa kan vara något för barn som blandar ihop 405 och 45. Vid vårt fortsatta läsande använde jag avsiktligt "förtinoll" då och då.

När alla barn hade lagt ned sina entals-siffror såg vårt diagram ut som i figur 9. Efter att ha läst igenom allt en sista gång tillsammans fick alla gå och sätta sig på sina platser igen.



Figur 9

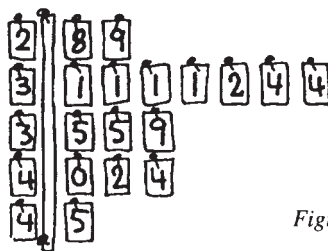
Så frågade jag om alla var nöjda med det som vi åstadkommit på golvet. Annika svarade att det hade varit bättre om 40-raden hade börjat med 0 och inte med 4. Vi kom överens om att det var en bra idé att ordna alla entalen inom varje rad. Alla var också överens om att 30-raden var så lång att den borde delas upp på två. Jag samlade in nya tiotalssiffror, en 2:a, två 3:or och en 4:a, och satte upp dem med häftstift på anslagstavlan. Se figur 10.



Figur 10

Till höger om siffrorna satte jag också upp en pappersremsa. Vi började med 20-raden. Eleverna fick gå fram en och en, plocka upp den entals-siffra som var i tur att sättas upp och sätta fast den på anslagstavlan så att entalen blev ordnade. Den första av de två 30-raderna skulle ha de fem första entals-siffrorna, 0, 1, 2, 3, 4, och den andra de övriga

fem, 5, 6, 7, 8, 9, det var alla överens om. Samma sak skulle självfallet gälla alla andra rader. Hade vi delat på en så måste vi dela på de andra också. I vårt fall måste alltså 40-raden också delas upp på två, och jag fick skaffa ytterligare en 4:a att sätta upp som tiotal. Slutresultatet visas i figur 11. Innan vi gick vidare läste vi i korus alla åldrarna i vårt ordnade diagram.



Figur 11

Nu när vi hade ett ordnat diagram kunde vi svara på alla möjliga frågor: "Hur gammal är den yngsta mamman?" – "Den äldsta?" – "Vilken ålder är mest populär?" (Vad betyder "populär"?) – "Finns det några åldrar mellan den lägsta och den högsta som inte finns med?"

Jag ville framhäva vad det var som vi studerade, så jag frågade: "Hur många mammor har vi på anslagstavlan?" Det viktiga i frågan var egentligen inte antalet, utan jag ville bara klargöra att det ju inte var själva mammorna som vi hade satt upp utan deras åldrar. Svaret från barnen visade att de faktiskt förstod detta mycket bättre än jag anat: "Femton", sa Nils, och jag utropade, med äkta förvåning: "Femton?!" Jag tittade på de sexton korten med entals-siffror i vårt stam-bladdiagram på anslagstavlan i figur 11. Jag skulle just till att börja räkna korten för att förklara, då Nils visade att han förstått det här bättre än jag själv: "Javisst, eftersom två 31 är Andreas och Daniels mamma." Andreas och Daniel är klassens tvillingar. Den här detaljen visar hur data som tillhör elevernas vardag, data som är levande och kan aktivera elevernas fantasi och känslor, hjälper till att klargöra begrepp på ett bra sätt.

Som avslutning på den första stam-bladslektionen fick eleverna skriva av det diagram som vi hade på anslagstavlan i sina räknehäften. Pappornas åldrar fick vänta till nästa gång, men när de väl kommit upp, på grön kartong, hade klassen god överblick över en del av sin verklighet på anslagstavlan.

Svårigheter med verkligheten

Jag har prövat stam-bladdiagram i flera klasser under de senaste åren och i åk 1 börjat just med föräldrarnas åldrar. Några gånger har det hänt att föräldrar har vägrat att lämna ut sina åldrar. Vid ett tillfälle sa en mamma: ”Skolan har ingenting med våra åldrar att göra. I matematiken kan man väl hitta på vilka siffror som helst så som man alltid har gjort.” Det sista håller jag inte alls med om. Med påhittade siffror kan barnens känslomässiga och intellektuella engagemang aldrig nå samma höjder som om man använder data från elevens egen omvärld och erfarenhet. Jag minns en flicka som stannade kvar vid anslagstavlan när lektionen var slut. Hon tittade på stam-bladdiagrammet, vände sig till mig och sa: ”Kan jag få tillbaka min mamma nu?”

Pulsen

Som fortsättning kan man med fördel låta barnen mäta pulsen. På lågstadiet kan detta göras med hjälp av yoghurtburkar av plast (den stora typen för 500 g). Man gör ett hål i botten på burken, placerar burköppningen över kamratens hjärta och sätter örät till hålet. Materialet i figur 1 – 4 kommer från en sådan mätning, och barnen fick i uppgift att göra om stam-bladdiagrammet för en halv minut till ett för en hel minut utan att få några närmare instruktioner om hur det skulle gå till. Observera att detta alltså var på våren i åk 1, då man inte hade gått igenom några tiotalsovergångar. I det här fallet

behövde bara en av eleverna väsentlig hjälp, för resten räckte det med normal klassrumsuppmuntran. Nu uppstod alla möjliga frågor, och vi fick nya idéer till vad man kunde fråga sig i samband med stam-bladdiagrammen över föräldrarnas åldrar: ”Hur kommer stam-bladdiagrammet över mammornas åldrar att se ut om fem år?” – ”Om 100 år?” – ”Hur såg stam-bladdiagrammet över pappornas åldrar ut det år som du föddes?” – ”Hur kommer det att se ut år 1990?” – ”Hur gammal kommer den yngsta mamman att vara när den äldsta är 50?”

Man kan också räkna hjärtslag under 20 sekunder eller 15 sekunder och utifrån det framställa ett diagram för en minut. Det finns många sätt att variera detta, och gradvis uppmuntras eleverna att hitta på egna frågor, vilket också kan ses som ett viktigt inslag i problemlösning.

Referenser

- Dunkels, A. (1990). Exploratory data analysis in primary classroom – graphing and concept formation combined. In *Studies in mathematics education*, volym 7. *The teaching of statistics*. Edited by Robert Morris. UNESCO, Paris, pp 19-26.
- Dunkels, A. (1988). Examples from the in-service classroom (age group 7-12). In *Training Teachers to Teach Statistics. Proceedings of the International Statistical Institute Round Table Conference, Budapest, Hungary, 23-27 July 1988*, pp 102-109.
- Pereira-Mendoza, Lionel & Dunkels, A. (1989). Stem-and-Leaf Plots in Primary Grades. *Teaching Statistics*, **11**(2), pp 34-37.
- Rangecroft, M. (1991). Graphwork – Developing a progression. Part 1 – The early years, Part 2 – A diversity of graphs. *Teaching Statistics* **13**(2), pp 44-46, **13**(3), pp 90-92.
- Vännman, K. och Dunkels, A. (1981). EDA – detektivarbete bland siffror med papper, penna och linjal. *Nämnnaren* **7**(4), 42-52.
- Vännman, K. och Dunkels, A. (1984). *Boken om kreativ statistik med EDA*. Förlagshuset Gothia, Göteborg.
- Vännman, K och Dunkels, A. (1986). Att vara detektiv bland siffror och tal från verkligheten. *Nämnnaren* **12**(4), 69.

Elevers förståelse av diagram

– några erfarenheter från ett forskningsprojekt

Lisbeth Åberg-Bengtsson

Diagram i olika former är ofta lättare att förstå för yngre elever än vad man kanske tror. Men många diagram tolkas ofta på olika sätt vilket ibland leder till problem. I denna artikel lyfter författaren fram några av de vanligaste svårigheterna som elever uppvisar i olika åldrar.

I avsnittet som beskriver matematikämnet karaktär i den nya kursplanen i matematik för grundskolan (s 205) framhålls vikten av att eleverna ges möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla situationer. Det väsentliga i att anknyta till undervisning i andra ämnen betonas. På andra delmoment i matematik erbjuder så rika tillfällen till att på ett naturligt sätt tillämpa dessa riktlinjer som statistikområdet. I skolans läromedel, i uppslagsverk, fackpress och nyhetsmedia används tabeller, kartor och diagram som informationskällor, ofta som ett komplement till det skrivna eller talade ordet. I takt med att lätthanterliga datorprogram blivit tillgängliga för utgivare av böcker, tidningar och tidskrifter och för producenter av rörliga bilder har vi i vår dagliga tillvaro fått allt bättre tillgång till statistisk information. Samtidigt blir vi utsatta för en växande mängd mer eller mindre lyckade grafiska representationer av kvantitativa data, dvs numerisk information i form av kartor och diagram.

I kursplanens målbeskrivning lyfts statistiken fram som ett av fyra kunskapsområden

Denna artikel består av delvis omarbetat material ur två artiklar publicerade i Nämnaren (Åberg-Bengtsson, 1992, 1994) med nyskrivna tillägg utifrån erfarenheter av senare forskning.

inom vilket eleverna nödvändigtvis måste utveckla goda kunskaper för att de stipulerade målen skall kunna förverkligas. Att inte bli manipulerad och förd bakom ljuset av smarta konstruktioner utan att rätt kunna uppfatta och tolka bland annat diagram är en ytterst viktig medborgarkunskap i dagens och morgondagens samhälle. Elevers nyttjande av elektroniska hjälpmedel såsom datorer och miniräknare kan vara till hjälp för att utforma grafiska bilder och utföra numeriska beräkningar. Det krävs emellertid en god grundläggande förståelse av diagram för att använda programmen och framför allt för adekvata tolkningar av de framställda bilderna. Jag hävdar att det är synnerligen viktigt att vi, innan vi sätter dessa hjälpmedel i händerna på eleverna, känner till något om deras sätt att uppfatta och förstå lärostoffet, hur deras förförståelse kan tänkas se ut, vilka typer av kognitiva problem som är vanliga etc. Tyvärr är området inte särskilt väl utforskat även om det under senare tid har tilldragit sig ett allt större intresse i forskningskretsar.

Jag har i min egen forskning i första hand kommit att intressera mig för den grafiska representationen av statistiska data och kommer att relatera mitt arbete till några internationella studier samt redogöra för resultat från egna empiriska undersökningar av hur elever uppfattar framför allt diagram men

även i viss mån kartor som visar numerisk information. Sådana kartor, som också benämns kartogram¹, kan vi finna i en vanlig skolas atlas då till exempel befolkningstäthet, råvarutillgångar eller handelsutbyte illustreras.

Att förstå grafisk representation

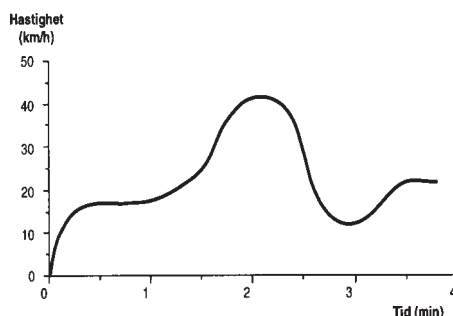
Diagram och kartor är symbolsystem som används inom en mängd vitt skilda områden för att analysera, lagra eller förmedla information (Bertin, 1967/1983). För de diagramtyper som våra grundskoleelever kommer i kontakt med i skolan och i vardagslivet torde dock den kommunikativa aspekten vara den viktigaste. När man övergår från att förmedla data i tabellform till grafisk form vinner man i åskådlighet men förlorar oftast i numerisk precision (Macdonald-Ross, 1977). Det är således sällan som det huvudsakliga syftet med den grafiska framställningen är att visa exakta värden.

Forskningen om hur elever förstår diagram är delvis motsägelsefull. Som exempel kan å ena sidan nämnas Wainer (1980), som utifrån en undersökning bland amerikanska elever hävdar att de flesta barn redan i nio-årsåldern uppnått en för vuxna acceptabel nivå när det gäller att förstå några enkla och vanliga typer av diagram. Å andra sidan finns ett flertal studier som tyder på att det inte är oproblematiskt för elever, väsentligt äldre än de som Wainer studerat, att tolka informationen i ett diagram. Så vittnar till exempel Preece (1983) om att 14- och 15-åringar kan ha stora svårigheter att rätt uppfatta diagram med flera kurvor. Enligt mitt förmenande förklaras de divergerande resultaten av det enkla faktum att det är olika saker man undersökt. Även i mitt eget arbete

har jag noterat att de flesta elever tämligen snabbt kan lära sig göra avläsningar (Åberg-Bengtsson, 1991), inte enbart enkla sådana utan också på vad Bertin (1967/1983) kallar ”övergripande nivå”. Steget till verklig förståelse av diagrammens innebörd är däremot ofta betydligt svårare att ta. I Wainers studie handlade det om att avläsa värden och göra jämförelser på mer eller mindre komplicerad nivå, medan eleverna Preece beskriver förväntades förstå ett skeende för en serie händelser.

Även om mycket i diagrambilden således kan vara svårtolkat på ett djupare plan förefaller dock tämligen unga elever ha goda förutsättningar att förstå de mest grundläggande aspekterna hos traditionella diagram. Det ligger givetvis något naturligt, som barn intuitivt uppfattar, i att en högre stapel, en bredare sektor eller en stigande kurva representerar en större kvantitet av något. Elever (och även vuxna) kan dock ibland i sin intuition ledas fel, när det gäller diagram som behandlar abstrakta företeelser. Bilden ges felaktigt ett alltför konkret innehåll (se tex Kerslake, 1981; Preece, 1983). Ett linjediagram där hastigheten visas som en funktion av tiden kan lätt tolkas som en resa upp och ner för en backe (figur 1).

Ett liknande exempel där intuitionen kan leda fel utgör sammanblandning av höjd och lutning hos kurvor. Om två kurvor som visar vägen som en funktion av tiden finns i samma diagram, händer det att elever uppfat-



Figur 1. Exempel på diagram som missuppfattas.

1 Ibland skiljer man mellan tematiska kartor och kartogram. Jag har inte i denna artikel gjort den distinktionen.

tar att den kurva som ligger högst i bilden också visar den högsta hastigheten även om så inte är fallet (Bell & Janvier, refererade i Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990).

Genom kursplanens mål, att eleverna vid slutet av femte skolåret skall ”kunna avläsa och tolka data givna i tabeller och diagram” (s 205)² är vi ålagda att inte enbart träna elevernas förmåga till avläsningar av och jämförelser mellan siffror utan att även arbeta med den djupare och mera fundamentalt kvalitativa aspekten ”att tolka”. Att avläsa och tolka bör, som jag tyder det, ses som en helhet. Avläsning av siffervärden är inte ett mål i sig utan snarare en del av den totala förståelsen. Kanske har vi i skolans undervisning av diagram alltför ofta fokuserat enbart avläsningsaspekten på bekostnad av tolkningsaspekten. Kursplanen ger emellertid klara direktiv om att det är en djupare och mera kvalitativ kunskap eleverna skall uppnå, inriktad på en praktisk användbarhet.

Det empiriska materialet

Redovisningen nedan härrör främst från en delanalys (Åberg-Bengtsson, 1994) av det så kallade GRAK-projektets³ huvudstudie och från en separat inledande studie inom nämnda projekt redovisad under titeln Barns förståelse av diagram (Åberg-Bengtsson, 1991; se även Åberg-Bengtsson, 1992). Projektet bygger på att elever i en intervju-situation fått tolka ett antal diagram. Den inledande studien omfattade 30 elever ur årskurserna två, fyra och sex samt sexåringar från förskolan. Intervjuunderlaget bestod av

15 olika diagram av fyra vanliga typer. Ett något olika urval av dessa bilder användes beroende på elevernas ålder.

I huvudstudien deltog 60 elever jämnt fördelade på årskurserna två, fem och åtta i grundskolan samt andra årskursen i gymnasiet (linjerna E, N och S). Med var och en av dessa elever genomfördes halvstrukturerade intervjuer, som varade mellan 30 och 60 minuter. Intervjuerna dokumenterades i båda studierna på ljudband för att sedan inför analysarbetet ordagrant skrivas ut.

Intervjuunderlaget utgjordes i huvudstudien av samma material för samtliga elever. En mapp med sju inplastade och löstagbara grafiska illustrationer, som beskrev socio-ekonomiska aspekter i en fiktiv värld, vilken i enlighet med projektets titel benämndes GRAK, presenterades för eleverna. Statistiska data för de fem namngivna länderna var valda så att två kom att utgöra typiska industriländer, två framstå som utvecklingsländer samt ett illustrera ett så kallat NIC-land, det vill säga ett nyligen industrialiserat land. De sju bilderna visade:

Befolkningstäthet (s.k. kloropletkarta)

Åldersfördelning (liggande stapeldiagram)

Födelse-och dödstal (kartogram)

BNP per person (linjediagram)

Produktionens fördelning (stapeldiagram)

Exportens uppdelning (cirkeldiagram)

Utrikeshandel (kartogram)

Eleverna ombads att noggrant studera bilderna och sedan berätta hur det skulle vara att bo i landet Bovenesia (NIC-landet). Intervjustrukturen var därefter tämligen öppen, men den följde dock vissa riktlinjer. Intervjuaren strävade exempelvis mot att samtliga bilder skulle behandlas och att länderna på olika sätt skulle jämföras.

2 Detta är sidnumret i förordningen och inte i det särtryck som finns mera allmänt spritt.

3 GRAK står för ”Grafiskt representerad kvantitativ information i kognitivt och didaktiskt perspektiv”. Projektet genomfördes 1990-94 vid Institutionen för pedagogik under ledning av docent Torgny Ottosson.

En invändning, som skulle kunna framföras, är att materialet är alltför komplicerat för de yngre åldersgrupperna. Bilderna i sig kan visserligen inte anses vara särskilt invecklade, eventuellt med undantag av diagrammet "åldersfördelning" (figur 2). Däremot måste innehållet betraktas som begreppsmässigt tämligen svårt. Då avsikten med undersökningen emellertid inte är att beskriva elevernas kunskap i ett kvantitativt perspektiv, utan att försöka blottlägga tankemönster och sätt att resonera, har elevernas svårigheter ur forskningssynpunkt blivit en tillgång. Däremot bör denna typ av "svåra" material användas sparsamt och med stor försiktighet i undervisningssituationer eller vid utvärderande prov.

Jag vill fästa uppmärksamheten på att även om mina exempel och citat till största delen är hämtade från yngre elevers utsagor, fanns samtliga feltyper representerade även bland de äldre, dock med den skillnaden att felen då oftast var mindre uppenbara och iögonenfallande.

En kategorisering av problem

Att uppfatta diagram som konstruktören avsett innebär att eleven måste besitta en mängd kunskaper och färdigheter, till exempel att kunna tolka symboler, känna till konventioner samt förstå proportionalitet och andra matematiska begrepp. Eleven tänker logiskt utifrån sina förutsättningar men ibland uppstår ändå problem på grund av att någon "länk i kedjan" är för svag. Det gäller då för läraren att kunna lokalisera var i resonemanget bristerna finns. Kanske kan nedanstående erfarenheter vara läraren till hjälp i detta sökande.

Efter noggranna genomgångar av intervjuutskriften har jag kunnat urskilja olika typer av problem, som eleverna uppvisade vid tolkning av bilderna. Svårigheterna har förts samman i fem kategorier som beskrivs under var sin rubrik. Varje avsnitt innehåller en kort karaktäristik av kategorin

ifråga samt något eller några exempel från datamaterialet. Analysen är gjord utifrån projektets huvudstudie och exemplen hämtade därifrån.

Missförstånd av ord och begrepp

Eleven kan på grund av bristande förståelse eller felaktiga associationer av ord och begrepp i bildtexten och/eller i den vuxnes förklaringar misstolka den grafiska framställningen.

En pojke i årskurs två försöker avläsa en karta där varje land är färgat i flera olika nyanser av rött; ju mörkare färg desto mera tätbefolkat är området. Rubriken lyder: "Befolkningstäthet – hur tätt folk bor i olika områden". Då eleven inte förstår får han hjälp att läsa texten och viss förklaring. Efter detta tycks han en lång stund resonera riktigt om var människorna bor "mest tätt", "minst tätt" osv. Vid slutet av intervjun uttrycker han dock med hänvisning till denna bild, att han inte vill bo i ett av länderna med flera ljusa områden på grund av att det är kallt där och att det "läcker in mycket luft". Han talar även om varma och "mittemellanvarma" områden. Vid närmare skärskådan av vad som egentligen sagts visar det sig att eleven tolkat uttrycket "att bo tätt" som att ha täta bostäder. Intervjuarens förklaring har enbart ytterligare bekräftat pojkens slutsatser, samtidigt som hon i sin tur under samtalets gång tolkat hans uttalanden om "tätt" och "inte så tätt" såsom det var avsett i bildtexten. Noteras kan dock att eleven i princip förstått kartogrammet som sådant, mörkare färg anger här högre frekvens av något, fast det i hans tolkning blir högre temperatur, och utifrån dessa tankegångar är hans resonemang helt logiskt.

Ett vanligt missförstånd, som tillhör denna kategori är när elever i ett diagram som visar produktionens fördelning uppdelad på tre olika områden, nämligen service, jordbruk samt industri och gruvarbete, associerar service enbart med turistnäring. Även bland

äldre elever förekommer det att denna starkt avgränsade betydelse tilldelas begreppet eller att förståelsen av vad det egentligen innebär är ganska diffus.

Ikonisk tolkning av diagram

Här beskrivs ett fenomen som jag i någon mån redan berört i samband med diskussionen om att barns intuition ibland leder dem fel. Inom forskningen uttrycks detta som att eleven gör en ”ikonisk” tolkning. Det innebär att symbolerna tolkas utifrån något de i verkligheten liknar.

Följande exempel härrör även det från resonemang runt befolkningstätheten. En av de yngre eleverna tror att de tätast befolkade områdena, som är mörkt rödbruna, istället är de som är glesast befolkade ”för att det är jord där” och att det då ”bor många där ... [i] dom här ljusa”.

En pojke (åk 2) i pilotstudien, låt oss kalla honom Erik, ser först en kartbild av ett land, då han betraktar ett diagram över åldersfördelningen (figur 2). Efter förklaring förstår han och kan berätta vilka befolkningsgrupper som är störst, minst osv. Emellertid avslöjar han så småningom, att han inte lämnat sin tidigare uppfattning utan integrerat den med det han nyss lärt sig. Följande replikskifte utspinner sig mellan Erik och intervjuaren.

Erik: Det finns jättemånga som är noll till nio, å det är det som är dumt för då finns det ju inga vuxna som kan ta hand om dom, för dom får la inte gå över dit.

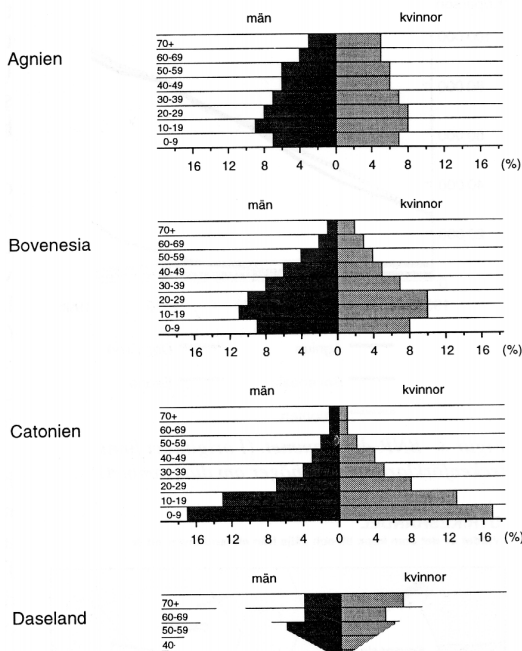
Intervjuaren: Vad menar du nu?

Erik: Men kolla! Här är ett streck mellan, å där står noll till nio, å det finns vuxna, som är tjugo till...nitton med, så dom kan ju inte bara komma å gå rakt över så!

I detta läge pekar han på linjen mellan två staplar, en linje som han tydligt uppfattar som ett verkligt staket eller åtminstone som en definitiv gräns.

Åldersfördelning

Befolkningen upp delad på olika åldersgrupper



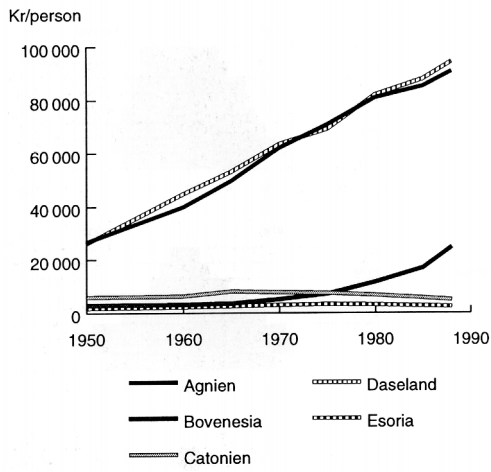
Figur 2. Del av diagrammet ”åldersfördelning”.

En flicka i samma årskurs tycker att kurvorna i BNP-diagrammet (se figur 3) liknar snören. På frågan om vad hon tror att snörena betyder blir svaret: ”Hur hög marken är kanske”. I landet Esoria är det ”rak mark kanske” medan Agnien har ”våldiga backar”.

Misstolkad symbolik

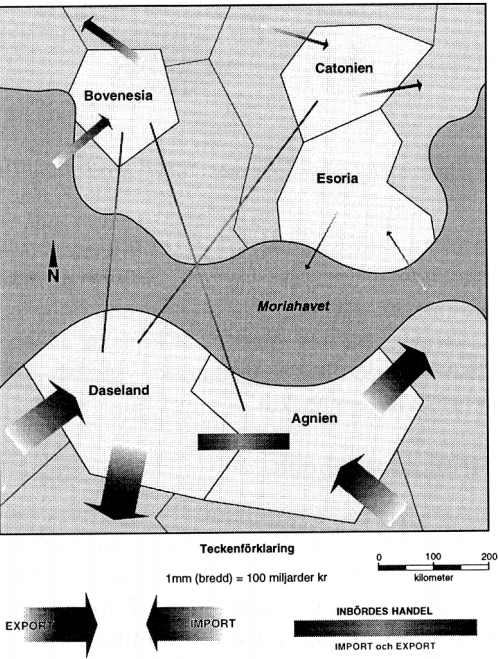
I motsats till vad som gällde för den nyss beskrivna kategorin tolkas här symbolerna på en adekvat abstraktionsnivå. Det är emellertid en i sammanhanget fel symbolik, ofta hämtad från någon annan situation, som tillämpas.

En av de yngsta flickorna tycker att ”det är dubbelt så mycket” för Agnien på grund



Figur 3. BNP-diagrammet.

UTRIKESHANDEL
Värdet av det som köps till och säljs från ett land under ett år



Figur 4. Kartogrammet över utrikeshandeln.

av att två linjer pekar mot Agniens plats i teckenförklaringen på BNP-diagrammet (figur 3). Över huvud taget kan teckenförklaringen i sig ibland utgöra stora problem. Jag har vid flera tillfällen sett hur elever tolkar teckenförklaringen som själva diagrammet, till exempel när det land som råkar stå högst i teckenförklaringen anses "bäst" i något speciellt avseende, det vill säga tilldelas den högsta frekvensen.

När det gäller BNP-diagram kunde jag också iaktta hur en lite äldre pojke (åk 5), när han skulle avläsa ett siffervärdet för "hur det är" i de två rikaste länderna, följde kurvorna med fingret ner mot y-axeln och avläste det värde som utgjorde ingångsvärdet (här värdet för 1950) utan att i det skedet vara medveten om att detta gällde en annan tidpunkt. Samma förfaringssätt har jag noterat även hos yngre elever.

Vid tolkning av den tidigare beskrivna befolkningstäthetskartan med dess olika nyanser i rött, är det vanligt att elever anser att bilden visar varma och kalla länder, ju flera mörkröda områden landet innehåller desto varmare förmodas det vara. Länder i olika rosa nyanser, det vill säga med låg befolkningstäthet, antas vara kalla. Ett fel av liknande slag är när pilar, som bland annat på väderkartor och i barnens datorspel betecknar vindar, även i kartogrammet över utrikeshandeln (figur 4) tilldelas denna betydelse.

Jag har även noterat att eleverna ibland tillämpar en icke avsedd symboltolkning på grund av att den varit riktig på en tidigare bild. Färgintensitet kan då komma att tolkas som frekvens även i ett cirkeldiagram, där det istället är sektorernas storlek som har denna funktion (figur 5).

Problem med matematikbegrepp

Att de yngre eleverna inte skulle behärska en mängd matematiska begrepp i intervjuunderlaget var väntat. Det visade sig emellertid att elever i alla åldrar hade uppenbara problem med några bilder.

En av de största svårigheterna vållade skillnaden mellan relativa och absoluta tal. Flertalet elever tog ingen notis om denna distinktion vid avläsning av till exempel cirkeldiagram. En bild visade exportens uppdelning för de fem länderna vid två tillfällen (figur 5). Endast ett mindre antal gymnasieelever insåg att en procentuell ökning av en sektor inte nödvändigtvis måste ha skett på bekostnad av något annat eller att en stor sektor för en varugrupp inte behöver innebära att landet ifråga exporterade en stor mängd av dessa varor i absoluta tal. Ett problem av liknande slag var funderingar över huruvida uttrycket ”kronor per person” gav jämförbara värden länderna emellan.

Elever på lågstadiet hade givetvis problem med fraser som ”per tusen”. Även mellanstadiebarn uppvisade svårigheter. Inte ovanligt var att uttrycket tolkades som tusental, det vill säga ”6-10 per tusen” blev ”6 000-10 000”.

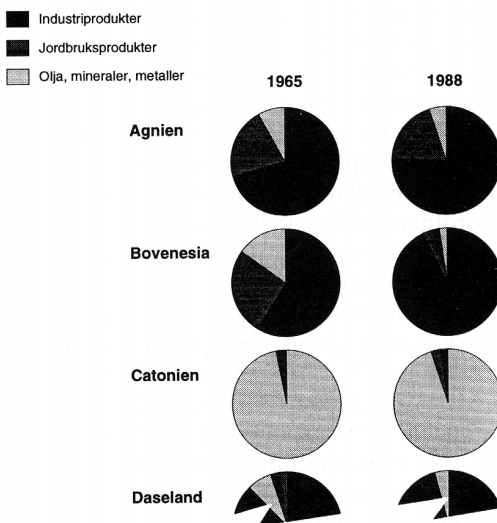
Felaktiga slutsatser

I taxonomier över grafisk representation framhålls ibland vikten av att begreppsligt separera innehåll och form (se t ex Bertin, 1967/1983). Såvitt jag kan förstå är detta en uppdelning, som både i praktiken och i teorin endast delvis låter sig göras. I detta sammanhang kan det dock vara meningsfullt att tala om en sådan skillnad. Elever kan på ett tämligen riktigt sätt förstå diagrammet som sådant (dvs dess form) men ändå dra felaktiga slutsatser av eller ge oriktiga förklaringar till de fenomen som beskrivs, exempelvis beroende på förkunskaper och utvecklingsnivå. De har problem med innehållet.

Länderna Catonien och Esoria uppvisar en för ett u-land typisk åldersfördelning (figur 2) med hög dödlighet bland barn. En pojke i årskurs åtta menade att ”inte så många passerar över 70 år ... en eller två stycken ... de flesta dör där vid 70 nånting”. Att Esoria måste vara ett välmående land, så rikt att man inte behöver handla med utlan-

Export uppdelad på olika slag av varor

Det som säljs till andra länder kallas för export



Figur 5. Del av diagrammet exportens fördelning.

det (figur 4) är ett exempel på resonemang som ibland förekom bland låg- och mellanstadiebarn. Jag kunde också märka att många elever hade endera av följande två fasta preferenser, nämligen ”lagom är bäst” eller ”störst är bäst”.

Något om olika diagramtyper

Jag har i det följande gjort en uppdelning mellan två olika principer för grafisk representation, nämligen mellan diagram som bygger på rätvinkliga koordinatsystem och sådana som inte gör det. De båda grupperna representeras här av stapel- och linjediagram respektive cirkel- och figurdigram. Jag inleder dock med att diskutera förståelse av koordinatsystemet som sådant. Kategoriseringarna av elevuppfattningar som jag ibland relaterar till härrör från den inledande, mindre studien omfattande barn mellan sex och tretton år (Åberg-Bengtsson, 1991).

Förstår barn koordinater?

En given frågeställning i detta sammanhang är vilka förutsättningar barn i olika åldrar har att förstå den begreppsligt och perceptuellt inte helt enkla konstruktion som koordinatsystemet utgör. Piaget har hävdats, att barn under åtta år inte skulle ha tankemässiga redskap, det vill säga inte ha en tillräckligt utvecklad spatial förmåga att förstå koordinater (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960). Detta har ifrågasatts av andra forskare. Bland annat har den abstrakta karaktären i Piagets undersökningar kritiserats, och experiment gjorda under andra omständigheter har tolkats så att barn långt tidigare kan förstå enkla koordinatsystem (Blades & Spencer, 1989; Somerville & Bryant, 1985).

I min första studie fanns ett moment där jag försökte undersöka förståelsen av principen för koordinater. "Koordinatsystemet" bestod i sin enklaste variant av ett rutnät med tjugofem rutor. Fem färger var markerade längs den vågräta axeln och fem föremål längs den lodräta. Intervjuerna inleddes med att eleverna ombads att markera en viss ruta, till exempel: "Vilken ruta betyder grön flagga?". För de äldre eleverna var rutsystemet större och försett med bokstäver och siffror.

Tre olika kategorier av uppfattningar kunde urskiljas utifrån vad eleverna spontant gjorde innan de fått någon form av ledtråd. Den första kategorin innefattar den riktiga uppfattningen och mötespunkten för de två nämnda "koordinaterna" angavs som svar. Elever som uttrycker denna uppfattning ser alltså rutsystemets båda dimensioner. I den andra kategorin uppfattar eleverna också att två dimensioner måste beaktas men pekar på två skilda rutor, nämligen rutan direkt ovanför grön på den vågräta axeln och rutan omedelbart till höger om flaggan på den lodräta i vårt exempel. De har således inte insett att en punkt kan preciseras genom angivande av de båda koordinaterna. Uppfattningen i den tredje kategorin är att

en ruta närmast någon av axlarna ger svaret på frågan. Eleverna pekar antingen på rutan ovanför grön eller rutan närmast flaggan. De fokuserar således bara en dimension.

Eleverna i årskurserna sex och fyra hade inga problem med uppgiften. Då de yngre barnens första spontana svar noterades återfanns tvåorna i samtliga tre kategorier och förskolebarnen endast i de två senare. Anmärkningsvärt är dock att samtliga elever, med undantag av en flicka i förskolegruppen, under intervjuens gång förflyttade sig till den första kategorin, oftast med mycket lite hjälp, ibland bara ett enda exempel. Detta resultat stämmer väl överens med de undersökningar av Blades och Spencer (1989), som jag nämnt ovan. Dessa forskare har visat att många fyraåringar och de flesta sexåringar lyckas bra med uppgifter som kräver förmåga att peka ut koordinater. Jag vill dock utifrån mina pågående analyser hävda att utpekande av koordinater är en sak och att, åtminstone i någon mån, förstå principen för hur de används vid tolkning och konstruktion av diagram något helt annat och betydligt mer problematiskt (se Åberg-Bengtsson & Ottosson, 1995).

Stapel- och linjediagram

Stapeldiagram torde vara den typ av diagram som våra skolelever tidigast möter i undervisningssammanhang. De är lätta att konkretisera och att bygga upp laborativt. Begreppsligt är de enklare än linjediagram där bland annat principen för avläsning blir besvärligare med avseende på såväl x - som y -koordinaten. Beroende på hur stapeldiagrammen är konstruerade går de ibland att avläsa och tolka utan att man nödvändigtvis behöver använda sig av koordinater.

Vid analysen av hur eleverna tolkat stapeldiagram kunde jag urskilja tre kategorier av uppfattningar. Den första bestod av elever som uppfattade diagrammet som en helhet och som förutom att de förstod meningen

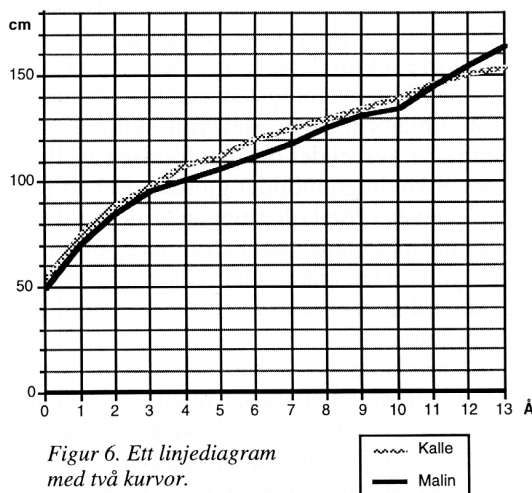
med varje stapels höjd också kunde se tendenser och dra övergripande slutsatser. Den andra kategorin såg enbart staplarnas betydelse var för sig utan att tolka bilden som helhet, en riktig men inte fullt utvecklad förståelse. Elever i den tredje kategorin, tre stycken sexåringar, drog slutsatser om frekvens av annat än staplarnas höjd. Alla tre uppvisade emellertid en viss förståelse. Åtminstone två av dem tillskrev staplarna en mer eller mindre riktig innebörd, men insåg inte fullt ut betydelsen av deras höjd.

Beträffande *linjediagram* uppfattade eleverna i den första kategorin såväl att bilden av kurvan i sig har ett budskap som att varje punkt på kurvan ger en upplysning om de båda koordinaterna, till exempel att "när Malin var 4 år så var hon 100 cm lång".

Början till förståelse kan man se hos de elever som uttryckte uppfattningar i den andra kategorin, nämligen att en stigande kurva är en bild av tillväxt. I den första kategorin placerar sig samtliga skolelever och ett av förskolebarnen, i den andra två förskolebarn. Den tredje kategorin omfattar uppfattningar hos två förskolebarn som inte insåg kurvans betydelse i sammanhanget utan uttryckte att en baby som beskrevs i diagrammet blev större på grund av att siffrorna på någon av axlarna ökade. Då varken eleverna i årskurs fyra, två eller förskolan fått någon undervisning om linjediagram och de flesta eleverna placerade sig i kategori ett och två förefaller det som barnen intuitivt uppfattade bilden av kurvan på ett adekvat sätt.

Jag vill här påpeka att kategoriseringen av de båda diagramtyperna inte är analoga. Det kan noteras att mittenkategorierna i tämligen hög grad liknar varandra, det vill säga barnen tycks mer eller mindre intuitivt uppfatta betydelsen av kurvor respektive staplar. Lägg märke till att elever å ena sidan väl kan förstå innebörden av staplarnas höjd eller kurvornas lutning och läge och å andra sidan principen för koordinater utan att för den skull kunna integrera dessa båda

Längd för Kalle och hans kusin Malin mellan 0 och 13 år



Figur 6. Ett linjediagram med två kurvor.

färdigheter för att göra avläsningar och djupare tolkningar.

Fenomenet att i ordning läsa siffrorna längs någon av axlarna istället för att läsa av koordinaterna i diagrammet har jag kunnat iaktta i båda de här refererade studierna. Om diagrammet då innehåller en eller flera jämnt stigande frekvenser, kan misstaget att barnen inte tilldelar kurvorna eller staplarna i sig någon mening, ibland vara svårt att upptäcka.

Representationer utan koordinatsystem

Den typ av *cirkeldiagram* som ingått i mina studier har i huvudsak varit av typen "tårtbitsdiagram". Sådana har varit populära ända sedan diagram i modern form började uppträda i slutet av 1700-talet. Många experter anser dock att stapeldiagram är överlägsna, då man menar att det är en lättare uppgift perceptuellt sett att bedöma längder

än vinklar, sektorer eller cirkelbågar (se t ex Lewandowsky & Spence, 1989).

I den inledande studien med de tillrättalagda diagrammen visade eleverna god förståelse av de i undersökningen ingående cirkeldiagrammen med avseende på grundidén, ju större sektor desto högre frekvens av något. Två beskrivningskategorier, som innefattar majoriteten av eleverna, skiljer sig åt endast i avseendet hur jämförelsen mellan två olika diagrambilder gjordes. Enbart för två elever i förskolegruppen är det osäkert om de uppfattade vad sektorerna egentligen betydde. Den ene av dem klarade dock att rangordna och jämföra sektorer i två olika cirkeldiagram.

Cirkeldiagram är speciella, i så måtto att de vanligen endast visar relationer mellan värden och inte absoluta sådana. Mina resultat framför allt från huvudstudien tyder på att detta är den största svårigheten när det gäller cirkeldiagram bland både yngre och äldre elever. Yngre elever gör dessutom ibland fel med avseende på vad som anger frekvensen, som jag redogjort för i problemavsnittet ovan. Exempelvis tolkas en mörk sektor istället för en stor som ”mycket”.

I *bilddiagram* används oftast tämligen konkreta symboler, som avbildar enheter i de kategorier som beskrivs. Bilddiagram förekommer i ett antal olika utföranden. I en typ arbetar man med ystörleken hos figurer. I andra fall låter man ett varierat antal lika stora figurer visa frekvenser. Diagrammen

Antal kvinnor och män i kommunstyrelserna i Falkenberg och Halmstad (varje figur motsvarar 10 personer)



Falkenberg



Halmstad

Figur 7. Ett av bilddiagrammen i undersökningen.

i min undersökning var av den senare typen (figur 7).

Att flera figurer i rad visar en större mängd än färre figurer var som väntat oproblematiskt även för de yngsta eleverna. Barnen hade inte heller några speciella svårigheter att på olika sätt göra jämförelser mellan grupper och undergrupper i det avbildade. Däremot förstod inget av förskolebarnen och inte heller en av eleverna i årskurs två att en figur kunde representera ett annat antal än ett, exempelvis tio eller tusen. Detta trots att de flesta av dem kunde ramsräkna på tiotalen. Följaktligen fick de då stora svårigheter med att tyda de figurer som inte var hela.

Kort om kartogram

Benämningen kartogram används ibland om kartor som visar numerisk information. I ett koordinatsystem utnyttjas planets två dimensioner som underlag för avläsning av till exempel kurvor och staplar. När det gäller kartogram är dessa två dimensioner så att säga upptagna av själva kartbilden och den numeriska informationen representeras av tecken som exempelvis bygger på storlek, färg, form, riktning eller mönster (Bertin, 1967/1983). Kartogram ingick enbart i huvudstudien. Förståelsen av kartor i sig är naturligtvis en viktig aspekt i sammanhanget som jag dock inte här har möjlighet att gå in på. Konstateras kan dock att eleverna mycket väl kan förstå såväl principerna för kartan som för den numeriska informationen var för sig utan att kunna integrera dessa båda delar till en förståelse av informationen i bilden. Detta kan jämföras med vad som sagts ovan om koordinater.

Sammanfattande reflektioner

Grafisk representation av numeriska data utnyttjar bildmediets många fördelar. Bland annat erbjuds möjligheten att på ett snabbt, effektivt och åskådligt sätt förmedla en stor mängd information samt att förenkla och konkretisera kanske annars svåröverskådliga data. Samtidigt som mycket i framställningssättet bygger på principer som intuitivt är lätta att förstå, innehåller det också en mängd konventioner och abstrakt symbolhantering, som kan vara besvärligare för den oinvigde att använda och uttolka än man först anar.

Wainer (1980) har hävdat att förmågan att tyda diagram är skild från vanlig läskunnighet. Jag skulle vilja påstå att den grafiska framställningen av numeriska data är ett eget ”språk” som utgör en förening av bildmässig (ikonisk) och symbolisk representation. Det är enligt mitt förmenande viktigt att eleverna tidigt bereds tillfälle att bygga upp en grundläggande färdighet i att läsa och förstå även detta språk i likhet med hur vi behandlar skriftspråk eller matematiskt symbolspråk. För att våra barn och ungdomar skall uppnå en förtrogenhet med och en skicklighet i detta språk och dess notationsformer krävs att vi behandlar det utifrån dess speciella karaktär. Medan läsinläring och matematikutveckling har varit föremål för en hel del forskning har hittills inte lika stor uppmärksamhet ägnats åt hur eleverna utvecklar förståelse av diagram och kartogram. Det bearbetade schema över uttrycksformer och översättningar som finns på s 15 efter Lesh (1981) mellan representationer är emellertid såvitt jag kan förstå högst tillämpligt även här. Eleverna bör få tillfällen att framställa diagram och kartogram (laborativt och på papper, manuellt och med teknologins hjälp), tolka och ”tala diagram” gruppvis och i helklass. Anknypningspunkter till vardagssituationer såväl inom som utanför skolans väggar torde inte vara svåra att finna.

Referenser

- Bertin, J. (1983). *Semiology of graphics* (W. J. Berg, övers.). Madison: The University of Wisconsin Press. (Original publicerat 1967)
- Blades, M., & Spencer, C. (1989). Young children's ability to use coordinate references. *Journal of Genetic Psychology*, 150(1), 5-18.
- Kerslake, D. (1981). Graphs. I K. Hart (Red.), *Children's Understanding of Mathematics*, 11-16, 120-136. London: John Murray.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1-64.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics* 12, 235-264.
- Lewandowsky, S., & Spence, I. (1989). The perception of statistical graphs. *Sociological Methods and Research*, 18, 200-242.
- Macdonald-Ross, M. (1977). How numbers are shown: A review of research on the presentation of quantitative data in texts. *AV Communication Review*, 25, 359-409.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Preece, J. (1983). Graphs are not straightforward. I T. R. G. Green, S. J. Payne, & G. C. van der Veer (Red.), *The psychology of computer use* (s 41-56). London: Academic Press.
- Somerville, S. C., & Bryant, P. E. (1985). Young children's use of spatial coordinates. *Child Development*, 56, 604-613.
- Wainer, H. (1980). A test of graphicacy in children. *Applied Psychological Measurement*, 4, 331-340.
- Åberg-Bengtsson, L. (1991). *Barns förståelse av diagram*. Examensarbete inom Påbyggnadsutbildning i pedagogik med didaktisk inriktning. (Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik, Box 1010, Mölndal)
- Åberg-Bengtsson, L. (1992). Förstår barn diagram? *Nämaren*, 19(4), 19-23.
- Åberg-Bengtsson, L. (1994). Elevers svårigheter att tolka data i diagram och kartogram. *Nämaren*, 21(3), 32-37.
- Åberg-Bengtsson, L. & Ottosson, T. (1995, aug.). *Primary school children's understanding of bar charts and line graphs: A preliminary analysis*. Paper presenterat vid The 6th EARLI Conference, Nijmegen, Nederländerna.

Ämnets syfte och roll i utbildningen

Grundskolan har till uppgift att hos eleven utveckla sådana kunskaper i matematik som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att kunna tolka och använda det ökande flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället. Utbildningen skall ge en god grund för studier i andra ämnen, fortsatt utbildning och ett livslångt lärande.

Matematiken är en viktig del av vår kultur och utbildningen skall ge eleven insikt i ämnets historiska utveckling, betydelse och roll i vårt samhälle. Utbildningen syftar till att utveckla elevens intresse för matematik och möjligheter att kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer. Den skall också ge eleven möjlighet att upptäcka estetiska värden i matematiska mönster, former och samband samt att uppleva den tillfredsställelse och glädje som ligger i att kunna förstå och lösa problem.

Utbildningen i matematik skall ge eleven möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på olika problem.

Mål att sträva mot

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleven

- inser värdet av och använder matematikens uttrycksformer,
 - utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande,
 - utvecklar sin förmåga att formulera, gestalta och lösa problem med hjälp av matematik, samt tolka, jämföra och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen,
 - utvecklar sin förmåga att använda enkla matematiska modeller samt kritiskt granska modellernas förutsättningar, begränsningar och användning,
 - utvecklar sin förmåga att utnyttja miniräknarens och datorns möjligheter.
- Strävan skall också vara att eleven utvecklar sin tal- och rumsuppfattning samt sin förmåga att förstå och använda
- grundläggande talbegrepp och räkning med reella tal, närmevärden, proportionalitet och procent,
 - olika metoder, måttssystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma storleken av viktiga storheter,
 - grundläggande geometriska begrepp, egenskaper, relationer och satser,
 - grundläggande statistiska begrepp och metoder för att samla in och hantera data och för att beskriva och jämföra viktiga egenskaper hos statistisk information,
 - grundläggande algebraiska begrepp, uttryck, formler, ekvationer och olikheter,
 - egenskaper hos några olika funktioner och motsvarande grafer,
 - sannolikhetstänkande i konkreta slump-situationer.

Karaktär och uppbyggnad

Matematik är en levande mänsklig konstruktion som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition. Matematik är också en av våra allra äldsta vetenskaper och har i stor utsträckning inspirerats av naturvetenskaperna. Matematikämnet utgår från begreppen tal och rum och studerar begrepp med väldefinierade egenskaper. All matematik innehåller någon form av abstraktion. Likheter mellan olika företeelser observeras och dessa beskrivs med matematiska objekt. Redan ett naturligt tal är en sådan abstraktion.

Tillämpningar av matematik i vardagsliv, samhällsliv och vetenskaplig verksamhet ger formuleringar av problem i matematiska modeller. Dessa studeras med matematiska metoder. Resultatets värde beror på hur väl modellen beskriver problemet. Kraftfulla datorer har gjort det möjligt att tillämpa allt mer precisa modeller och metoder inom områden där de tidigare inte varit praktiskt användbara. Detta har också lett till utveckling av nya kunskapsområden i matematik som i sin tur lett till nya tillämpningar.

Problemlösning har alltid haft en central plats i matematikämnet. Många problem kan lösas i direkt anslutning till konkreta situationer utan att man behöver använda matematikens uttrycksformer. Andra problem behöver lyftas ut från sitt sammanhang, ges en matematisk tolkning och lösas med hjälp av matematiska begrepp och metoder. Resultaten skall sedan tolkas och värderas i förhållande till det ursprungliga sammanhanget. Problem kan också vara relaterade till matematik som saknar direkt samband med den konkreta verkligheten. För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer. Detta gäller alla elever, såväl de som är i behov av särskilt stöd som elever i behov av särskilda utmaningar.

Matematik har nära samband med andra skolämnen. Eleverna hämtar erfarenheter från omvärlden och får därmed underlag för att vidga sitt matematiska kunnande.

Mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det femte skolåret

Eleven skall ha förvärvat sådana grundläggande kunskaper i matematik som behövs för att kunna beskriva och hantera situationer och lösa konkreta problem i elevens närmiljö.

Inom denna ram skall eleven

- ha en grundläggande taluppfattning som omfattar naturliga tal och enkla tal i bråk- och decimalform,
- förstå och kunna använda addition, subtraktion, multiplikation och division samt kunna upptäcka talmönster och bestämma obekanta tal i enkla formler,
- kunna räkna med naturliga tal - i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare,
- ha en grundläggande rumsuppfattning och kunna känna igen och beskriva några viktiga egenskaper hos geometriska figurer och mönster,
- kunna jämföra, uppskatta och mäta längder, areor, volymer, vinklar, massor och tider samt kunna använda ritningar och kartor,
- kunna avläsa och tolka data givna i tabeller och diagram samt kunna använda elementära lägesmått.

Mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det nionde skolåret

Eleven skall ha förvärvat sådana kunskaper i matematik som behövs för att kunna beskriva och hantera situationer samt lösa problem som vanligen förekommer i hem och samhälle och som behövs som grund för fortsatt utbildning.

Inom denna ram skall eleven

- ha utvecklat sin taluppfattning till att omfatta hela tal och rationella tal i bråk- och decimalform,
- ha goda färdigheter i och kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med tekniska hjälpmedel,
- kunna använda metoder, måttssystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma längder, areor, volymer, vinklar, massor, tidpunkter och tidsskillnader,
- kunna avbilda och beskriva viktiga egenskaper hos vanliga geometriska objekt samt kunna tolka och använda ritningar och kartor,
- kunna tolka, sammanställa, analysera och värdera data i tabeller och diagram,
- kunna använda begreppet sannolikhet i enkla slumpsituationer,
- kunna tolka och använda enkla formler, lösa enkla ekvationer, samt kunna tolka och använda grafer till funktioner som beskriver verkliga förhållanden och händelser.

Från Kursinfo 2002/03

www.skolverket.se/

Alla barn mellan sju och sexton år i Sverige är skolpliktiga. Om föräldrarna önskar det kan barnen få börja skolan redan när de är sex år. Kommunerna är skyldiga att anordna plats för alla sexåringar i förskoleklassen. Till den obligatoriska skolan räknas grundskolan, sameskolan, specialskolan och särskolan. Undervisningen är obligatorisk och avgiftsfri. Vanligen har föräldrarna inte heller kostnader för exempelvis läromedel, skolmåltider, hälsovård och skolskjuts.

Läroplan, kursplaner och timplan

Från hösten 1994 har den obligatoriska skolan en ny, nationellt fastställd läroplan, Lpo 94. Den är gemensam för grundskolan, sameskolan, obligatoriska särskolan, specialskolan och anpassades 1998 till att omfatta även förskoleklassen och fritidshemmet. Läroplanen anger skolans värdegrund och grundläggande mål och riktlinjer. Förutom detta finns för varje enskilt ämne en nationellt fastställd kursplan. Varje kommun skall faställa en skolplan som visar hur kommunens skolor skall organiseras och utvecklas. Läroplanen, skolplanen och kursplanerna ger sedan utrymme för den enskilda skolans rektor, lärare och elever att anpassa innehåll, organisation och arbetssätt till lokala förhållanden. Planeringen av detta fastställs i skolans arbetsplan.

Det finns en timplan för grundskolan som helhet. Timplanen anger den minsta garanterade tid som eleverna har rätt att få lärarledd undervisning i olika ämnen.

Timplan

Utbildningens omfattning i grundskolan i timmar om 60 minuter för ämnen och ämnesgrupper samt totalt

Ämnen

Bild.....	230
Hem- och konsumentkunskap.....	118
Idrott och hälsa.....	500
Musik	230
Slöjd (Textilslöjd och Trä- och metallslöjd)	330
Svenska	1490
Engelska.....	480
Matematik	900
Geografi, Historia, Religions- och Samhällskunskap (sammanlagt)	885
Biologi, Fysik, Kemi, Teknik (sammanlagt).....	800
Språkval	320
Elevens val.....	382
Total garanterade undervisningstid	6 665

Därav skolans val 600

Vid skolans val får antalet timmar i timplanen för ett ämne eller en ämnesgrupp minskas med högst 20 procent.

Profilering och val av skola

De timmar i timplanen som är avsatta för elevens val innebär att den enskilda eleven kan fördjupa studierna i ett eller flera ämnen. Dessutom kan en skola, inom givna ramar, använda timmar till att ge vissa ämnen mer tid än den som är angiven i timplanen. På det sättet får skolans undervisning en särskild profil, eller inriktning.

De allra flesta skolor i Sverige är kommunala. Det vanligaste är att barnen går i en kommunal skola nära hemmet. Eleverna och deras föräldrar har dock rätt att välja en annan kommunal skola, eller en från kommunen fristående skola.

De fristående skolorna är öppna för alla och måste vara godkända av Skolverket. En fristående skola får bidrag från elevens hemkommun och beloppet bestäms med hänsyn till skolans åtagande och elevens behov. Om skolan inte följer gällande bestämmelser kan Skolverket återkalla godkännandet. Det är vanligt att fristående skolor har en annan inriktning än den kommunala grundskolan, t ex speciell pedagogik (montessori eller waldorfpedagogik), språkligt/etnisk inriktning eller är skolor med en viss religiös prägel.

Mål- och kunskapsrelaterade betyg

Samtidigt som läroplanen och kursplanerna infördes började ett nytt betygssystem att gälla. I det nya systemet ges betyg i en tregradig skala från årskurs 8. Betygsstegen är Godkänd (G), Väl Godkänd (VG) och Mycket Väl Godkänd (MVG). En elev som inte når upp till målen i kursplanen för det nionde året får inget betyg i ämnet, men har rätt att få ett skriftligt omdöme.

Betygen ges från grundskolans åttonde år och relateras utifrån elevernas kunskaper till de nationella mål som finns angivna i ämnets kursplan. Under hela tiden i grundskolan ska elever och föräldrar regelbundet informeras om hur det går för eleven i skolan bl a genom utvecklingssamtal.

Elevmedverkan

Enligt läroplanen ska eleverna tillsammans med läraren få vara med och planera det dagliga arbetet. Hur denna medverkan konkret ska se ut beslutar rektor efter samråd med elever och lärare. Rektor har skyldighet att informera och samråda med elever och föräldrar i frågor som är av stor betydelse för eleverna.

Studie- och yrkesorientering

Studie- och yrkesorientering, syo-verksamhet, pågår under hela grundskoletiden. På många skolor finns särskild syopersonal. Skolans personal ska informera, undervisa och ge personlig vägledning till eleverna om olika studievägar och yrkesinriktningar efter den obligatoriska skolan.

Specialskolan

De flesta hörselskadade och nästan alla synskadade och rörelsehindrade barn får sin undervisning i grundskolan. Döva och gravt hörselskadade liksom gravt tal- och språkstörda barn går däremot i specialskolan. Specialskolan omfattar tio årskurser och ska så långt som möjligt motsvara den utbildning som ges i grundskolan.

Specialskolor finns också för synskadade och hörselskadade/döva barn med olika tilläggshandikapp.

Särskolan

Den obligatoriska särskolan består av nio årskurser i antingen grundsärskolan eller tränings-skolan. I grundsärskolan går barn som kan lära sig att läsa och skriva. Tränings skolans undervisning är inriktad på social träning och praktiska färdigheter. Eleverna i särskolan har rätt till ett tionde skolår.

Sameskolan

Samers barn kan få utbildning med samisk inriktning i sameskolan. Utbildningen motsvarar grundskolans första sex år.

Bedömning i ämnet matematik

Bedömningens inriktning

Bedömningen av elevens kunskande i ämnet matematik gäller följande kvaliteter:

Förmågan att använda, utveckla och uttrycka kunskaper i matematik

Bedömningen avser elevens förmåga att använda och utveckla sitt matematiska kunskande för att tolka och hantera olika slag av uppgifter och situationer som förekommer i skola och samhälle, till exempel förmågan att upptäcka mönster och samband, föreslå lösningar, göra överslag, reflektera över och tolka sina resultat samt bedöma deras rimlighet. Själständighet och kreativitet är viktiga bedömningsgrunder liksom klarhet, noggrannhet och färdighet.

En viktig aspekt av kunskandet är elevens förmåga att uttrycka sina tankar muntligt och skriftligt med hjälp av det matematiska symbolspråket och med stöd av konkret material och bilder.

Förmågan att följa, förstå och pröva matematiska resonemang

Bedömningen avser elevens förmåga att ta del av och använda information i såväl muntlig som skriftlig form, till exempel förmågan att lyssna till, följa och pröva andras förklaringar och argument. Vidare uppmärksammas elevens förmåga att självständigt och kritiskt ta ställning till matematiskt grundade beskrivningar och lösningar på problem som förekommer i olika sammanhang i skola och samhälle.

Förmågan att reflektera över matematikens betydelse för kultur- och samhällsliv

Bedömningen avser elevens insikter i och känsla för matematikens värde och begränsningar som verktyg och hjälpmedel i andra skolämnen, i vardagsliv och samhällsliv och vid kommunikation mellan människor. Den avser också elevens kunskaper om matematikens betydelse i ett historiskt perspektiv.

Kriterier för betyget Väl godkänd

Eleven använder matematiska begrepp och metoder för att formulera och lösa problem.

Eleven följer och förstår matematiska resonemang.

Eleven gör matematiska tolkningar av vardagliga händelser eller situationer samt genomför och redovisar med logiska resonemang sitt arbete såväl muntligt som skriftligt.

Eleven använder ord, bilder och matematiska konventioner på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.

Eleven visar säkerhet i sitt problemlösningsarbete och använder olika metoder och tillvägagångssätt.

Eleven kan skilja gissningar och antaganden från det vi vet eller har möjlighet att kontrollera.

Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

Eleven formulerar och löser olika typer av problem samt jämför och värderar olika metoders för- och nackdelar.

Eleven visar säkerhet i sina beräkningar och sitt problemlösningsarbete samt väljer och anpassar räknemetoder och hjälpmedel till den aktuella problemsituationen.

Eleven utvecklar problemställningar och använder generella strategier vid uppgifternas planering och genomförande samt analyserar och redovisar strukturerat med korrekt matematiskt språk.

Eleven tar del av andras argument och framför utifrån dessa egna matematiskt grundade idéer.

Eleven reflekterar över matematikens betydelse för kultur- och samhällsliv.

Lpo 94

2.7 Bedömning och betyg

Betyget uttrycker i vad mån den enskilda eleven har uppnått de mål som uttrycks i kursplanen för respektive ämne eller ämnesblock.

Som stöd för betygssättningen finns ämnesspecifika kriterier för olika kvalitetssteg.

Dessa betygskriterier anges i anslutning till respektive kursplan.

Mål

Mål att sträva mot

Skolan skall sträva efter att varje elev

- utvecklar ett allt större ansvar för sina studier och
- utvecklar förmågan att själv bedöma sina resultat och ställa egen och andras bedömning i relation till de egna arbetsprestationerna och förutsättningarna.

Riktlinjer

Läraren skall

- genom utvecklingssamtal främja elevernas kunskapsmässiga och sociala utveckling,
- utifrån kursplanernas krav allsidigt utvärdera varje elevs kunskapsutveckling, muntligt och skriftligt redovisa detta för eleven och hemmen samt informera rektorn,
- med utgångspunkt i föräldrarnas önskemål fortlöpande informera elever och hem om studieresultat och utvecklingsbehov och
- vid betygssättningen utnyttja all tillgänglig information om elevens kunskaper i förhållande till kraven i kursplanen och göra en allsidig bedömning av dessa kunskaper.

**Aktuell information om gällande styrdokument hittar du
på**

NCM:s webbplats

ncm.gu.se

Följ utvecklingen i Nämnaren!