

Svar: Nej.

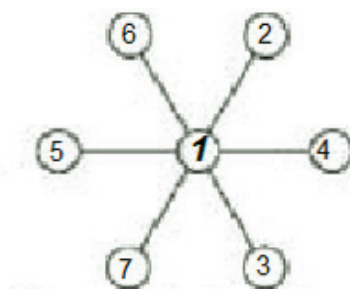
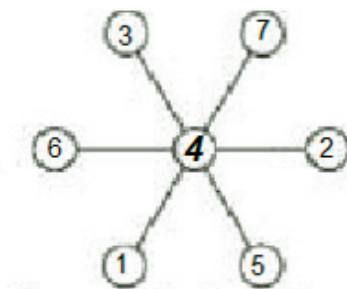
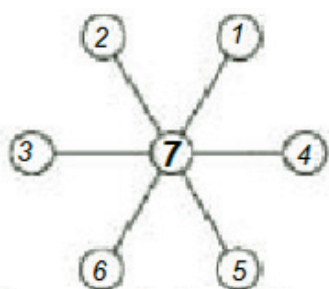
Vera: Emma har inte använt varje sort lika många gånger, hon använde den randiga biten 1 gång mer än de andra. Det är lätt att se eftersom den börjar och slutar med den.

Marcus: Det finns fyra olika sorter och Emma har använt 17 stycken rutor i sin ritade rad. Hon kan då omöjligt ha använt varje sort lika många gånger. 17 är inte jämnt delbart med 4.

Problem 2

Svar: 1, 4 eller 7 ska skrivas i mitten.

Veras bilder:

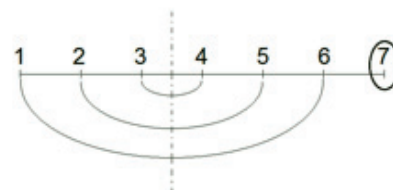
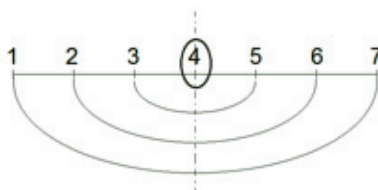


Markus: Det finns två olika, möjliga sätt att placera siffrorna:

- med siffran 1 i mitten, sedan den lägsta respektive högsta siffran mitt emot varandra (2-7, 3-6 och 4-5). Det ger en summa på 10 längs varje rad.
- med siffran 7 i mitten, sedan lika som ovan, d.v.s. den lägsta respektive högsta siffran mitt emot varandra (1-6, 2-5 och 3-4). Detta ger en summa på 14 längs varje rad.

Leo: ett tredje sätt med 4 i mitten, då blir siffersumma 12 i varje rad.

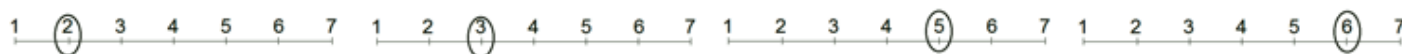
Låt oss se dessa tre lösningar på tallinjer:



Den inringade siffran är den som ska stå i mitten, siffror kopplade med en båge ska stå mittemot varandra. Observera att när man tar bort den inringade siffran, så bildar de övriga en symmetrisk punktmängd, i den första lösningen motsvarar dess symmetricentrum talet 4,5. Talet 4,5 är medelvärde för talen kopplade med bågar, $4,5 = (2+7)/2 = (3+6)/2 = (4+5)/2$.

I de två andra lösningarna är symmetricentra (medelvärden) 4 respektive 3,5.

Ringar man in en annan siffra, så har inte de tal som blir kvar ett sådant symmetricentrum.



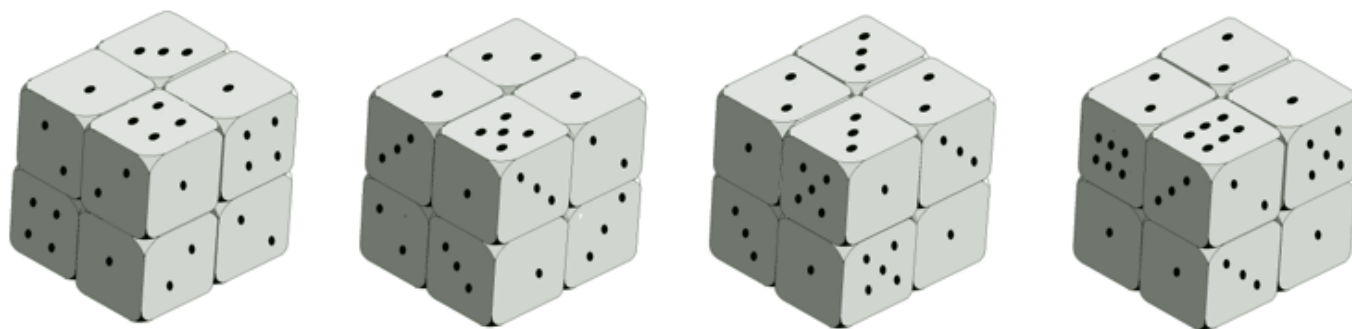
Problem 3

Svar: Det kan man göra med godtyckligt antal från 8 till 20 men inte utanför detta intervall.

Laborativa undersökningar:

Tärningar som är bra för spel är benägna att glida, studsas och rotera. Sådana är också bra för övningar i sannolikhetslära. För kombinatoriska undersökningar som den här rekommenderas mera kantiga tärningar med strävare yta och gjorda av stötdämpande material, t.ex. trä. Ett litet bekymmer med sådana serietillverkade tärningar är att deras markeringar inte brukar hålla sig till en gemensam standard, de kan vara spegelvända och markeringar av 2, 3 och 6 kan vara vända 90° . I bilderna nedan gäller massproducerade speltärningars standardmarkeringar.

Här har vi några exempel:

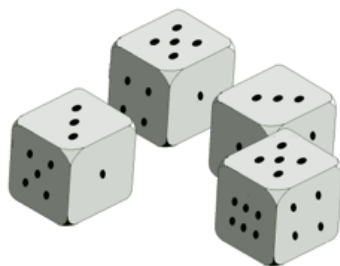


Det finns cirka 50 000 olika sådana konstruktioner (eller drygt 900 000 beroende på vad man menar med olika). Det betyder inte att det är så lätt att hitta ett.

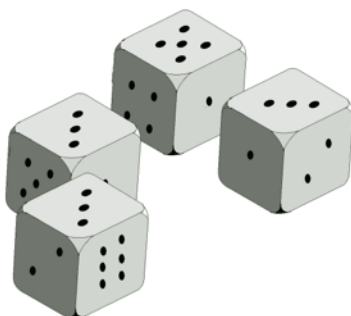
Bygger man en kub av åtta tärningar och först efteråt tittar vad det blev, så är chansen knappt ett på 122 000 att det blir rätt men om man chansar lite från början och sedan tittar hur det utvecklar sig och modifierar undan för undan, så har man ändå en god chans att lyckas.

Nu ska var och en som har 8 tärningar kunna bygga en egen kub med 14 ögon på varje sida, vi tar det i 5 steg.

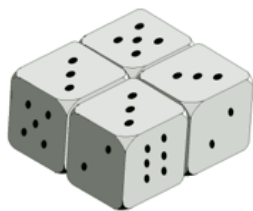
Steg 1. Kasta 4 tärningar på bordet.



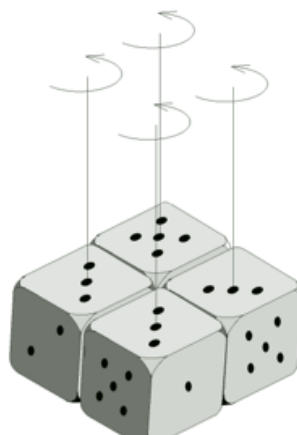
Steg 2. Blev det annat än 14 ögon överst så vänder man på en eller två tärningar.



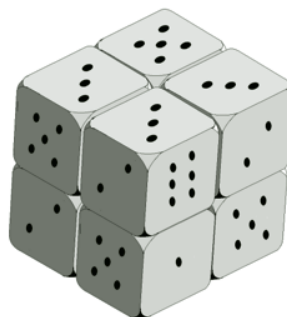
Steg 3. Samla tärningarna i en kvadrat (egentligen ett rätblock eller som Marcus skriver -segment) och lägg bredvid ett identiskt rätblock av återstående 4 tärningar.



Steg 4. Vrid varje tärning i ett av rätblocken 180° kring vertikalaxel.



Steg 5. Lägg rätblocken ovanpå varandra.

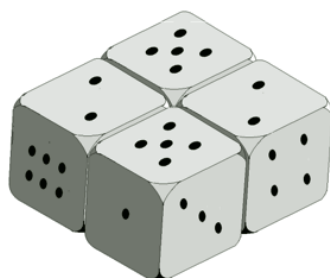


Klart!

Även Marcus beskriver ett intressant sätt att bygga en kub med 14 prickar på varje sida.

Marcus: Den stora tärningen, bestående av åtta mindre hoppusslade tärningar, kan delas in i två segment: ett bottensegment, med de fyra tärningarna i botten, samt ett toppsegment, av de fyra övre tärningarna. Antalet prickar på de två tärningarna hos vartdera segmentets sida, ska adderas samman och då få en summa på sju ($1+6=7$, $2+5=7$ och $3+4=7$). De motstående tärningarna, från vänster och höger, mitt emot såsom ovan och under, ska också ha en summa på sju. När allt detta är uppfyllt, är summan på varje sida av den stora, ihopsatta tärningen 14.

Leo: Här ser vi ett exempel på ett sådant segment.



I steg 4 vred vi 4 tärningar 180° kring vertikalaxeln, men samma vridning kan beskrivas på ett annat sätt. "Låt trean och fyran vara kvar där de är, och vrid tärningen så att ettan och sexan byter plats samt tvåan och femman byter plats." Den beskrivningen stämmer på tre av tärningarna, i den fjärde tärningen stannar femman och tvåan i ursprungsläget medan ettan och sexan samt trean och femman byter plats. Har de fyra tärningarna vridits på samma sätt? Det beror på, enligt yttre referenser (vertikalaxel) – ja, enligt tärningarnas egna referenser – nej.

Det är likadant med jordens rotation: en yttre observatör ser jorden snurra kring en axel som går genom Polstjärnan medan vi jordbor snarare märker att jordens yta rör sig mot öst.

Det märkliga är att om vi tar ett segment som uppfyller Marcus villkor och vrider alla tärningar på samma sätt enligt tärningens egna referenser så får vi ett nytt segment som fortfarande uppfyller dessa villkor. Sedan kan vi lägga ihop godtyckliga två sådana segment till en kub som uppfyller problemets villkor.

I Veras konstruktioner är det alltid tre sorters tärningssidor synliga och tre osynliga, t.ex. i kuber med 8 ögon per kubsida är alla ettor, tvåor och treor synliga medan fyror, femmor och sexor osynliga. Det finns tre sätt att vrida tärningar så att om alla 8 tärningar i Veras kub vrids på samma sätt (enligt egna referenser), så får man en annan bland Veras kuber med ett annat antal ögon per sida.

Vera:

Ja, det kan man. 8, 12, 16 eller 20.

Det minsta antalet ögon som man kan bygga på den stora tärningens utsida är 48.

$$1 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 48 \quad 48/6 = 8 \quad \text{Det blir 8 prickar per sida.}$$

Man använder alla 1:or, 2:or och alla 3:or (Man kan göra olika kombinationer av dem)

1223 1133 1133 1133 1223 2222 (2222 2222 1133 1133 1133 1133)

Det största antalet ögon som man kan bygga på den stora tärningens utsida är 120.

$$4 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 120 \quad 120/6 = 20 \quad \text{Det blir 20 prickar per sida.}$$

Man använder alla 4:or, 5:or och 6:or

5555 6644 6644 6644 5564 5564

Om antalet ögon är 72 finns det 12 prickar per sida och då använder jag alla 1:or, 3:or och 5:or.

$$8 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 72 \quad 72/6 = 12$$

3333 3333 1155 1155 1155 1155

Om antalet ögon är 96 finns det 16 prickar per sida och då använder jag alla 2:or, 4:or och 6:or.

$$8 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 6 = 96 \quad 96/6 = 16$$

4444 4444 2266 2266 2266 2266

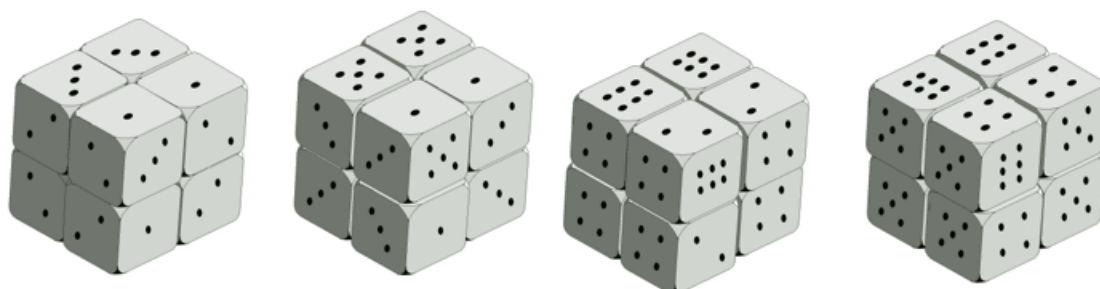
Jag tror att summan på alla prickar på utsidan måste vara delbart med 6 och 8 och ≥ 48 och ≤ 120 .

Jag testade lösningarna med tärningar och det gick bra.

Man kan också göra andra kombinationer på papper men när man försöker göra det med tärningar går det inte bra, tex. om det ska vara 9 prickar per sida. Då blir det $9 \cdot 6 = 54$ prickar sammanlagt.

$$8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 8 + 16 + 6 + 24 = 54$$

1143 4221 4221 4221 4221 4311



Här ser vi en av Veras kuber med 8 ögon per sida som efter en vridning av alla tärningarna på samma sätt blir en kub med 12 ögon per sida som efter nästa vridning får 16 ögon per sida och slutligen 20 ögon per sida.