Arbeta vidare med Junior 2010

Känguruproblemen är kanske inte av samma karaktär som de problem eleverna möter i läroboken. De är inga rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Även om man inte har haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Låt gärna eleverna i grupp resonera sig fram till en lösning. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
– Vilken information i problemet är nödvändig och vad kan ändras utan att problemet förändras?
– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
– Vilka nya frågor kan problemet väcka?
– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar:

– Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar?
– Är de tydliga?
– Är resonemanget korrekt?
– Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Då kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I samband med problemlösning finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. Använd också snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar.

I årets Juniortävling behandlar problemen främst tal och geometri och vi ger här några förslag till hur man kan arbeta vidare med dessa.

Tal

Många problem som förkommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. Det naturliga räknandet börjar med de positiva heltalen, som sedan utvidgas till negativa heltal. Egenskaper hos heltal, såsom faktor, multipel av, delbarhet, primtal, primtalsfaktorisering är därför viktiga att arbeta med. Dessa kunskaper ligger till grund för arbete med tal i bråkform.

Heltal
Uppgift 3, 5, 7, 23 och 24.

Betrakta summor av de positiva heltalen. De tal som vi får om vi beräknar summorna $1, 1+2$, $1+2+3, \ldots, 1+2+3+\ldots+n$ kallas *triangeltal*. Låt eleverna resonera om beteckningen, varför kallas de så?

Låt dem även försöka bevisa att $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, både geometriskt och algebraiskt.

Undersök även summor av de udda positiva heltalen: $1, 1+3, 1+3+5, \ldots, 1+3+\ldots+(2n+1)$. Gör även motsvarande undersökning av summor av de jämna positiva heltalen. Låt eleverna resonera, ställa upp påståenden och bevisa dem.

Definiera vad som menas med en talföljd. I Junior 23 beskrivs en talföljd. I problemet ges initialvärden och rekursiv formel till en talföljd. För att beräkna värdet av en term med mycket stort ordningsnummer behöver man bestämma en explicit formel för följden. Följden visar sig i det här fallet bestå av två aritmetiska följder $f_n = n$ för udda n och $f_n = 3 - n$ för jämna. Ett gemensamt uttryck för alla termer är $f_n = 2 - (n-2)\cdot(-1)^n$.

Man arbetar på olika sätt med talföljder. Det grundläggande är:

A Givet är en explicit formel f och index n. Beräkna termen f_n.

Enkelt men ganska stimulerande är:
B Givet är initialvärden och en rekursiv formel. Bestäm påföljande termer.

Vanligt i nöjesmatematik är:
C Givet är ett antal termer. Gissa nästa term. Detta brukar man klara genom att gissa den bakomliggande explicita eller rekursiva formeln (regeln). Den sortens problem kan elever gärna konstruera för varandra.

Problem som kräver ett mer strikt matematiskt resonemang är:
D Givet är en explicit formel. Bestäm en rekursiv formel som med lämpliga initialvärden ger samma talföljd.

I allmänhet är den omvända frågan svårare, som här i problem 23:
E Givet är en rekursiv formel och initialtermer. Bestäm talföljdens explicita formel.

F Undersök talföljdernas egenskaper. Beroende på om man utgår från explicita eller rekursiva former måste problemet angripas på olika sätt. Vad innebär + och – tecken? Undersök jämna och udda heltal samt delbarhet med primtal.

Här följer ett axplock av explicita och rekursiva formler av olika svårighetsgrad. Man kan arbeta med var och en av dem på något av de sätt som beskrivs ovan. Ett ytterligare sätt är:

G För varje rekursiv formel R_1-R_8 hitta bland de explicita formlerna en eller flera sådana som definierar en talföljd som uppfyller den rekursiva formeln.

R_1: $f_n = f_{n-1}$

R_2: $f_n = 2 \cdot f_{n-1} - f_{n-2}$

R_3: $f_n = 2 \cdot f_{n-2} - \sqrt{3} f_{n-3}$

R_4: $f_n = 3 \cdot f_{n-1} - 3 \cdot f_{n-2} + f_{n-3}$

R_5: $f_n = f_{n-1} + 2 \cdot f_{n-2}$

R_6: $f_n = f_{n-2}$

R_7: $f_n = 2 \cdot f_{n-1} + 4 \cdot f_{n-2}$

R_8: $f_n = (\sqrt{3} \cdot f_{n-1} - f_{n-4})/2$

Explicita formler:

E_1: $f_n = 5$

E_2: $f_n = 2 \cdot n + 5$

E_3: $f_n = 0$

E_4: $f_n = (n+1)^2$

E_5: $f_n = 2^n$

E_6: $f_n = \sin(n \cdot 90°)$

E_7: $f_n = (1+\sqrt{5})^n$

E_8: $f_n = \sin(n \cdot 30°)$

Uppmärksamma eleverna på att flera olika talföljder kan uppfylla en och samma rekursiva formel och omvänt, samma följd kan uppfylla flera olika rekursiva formler.

Behandla olika positionssystem och visa att ett tresiffrigt tal kan skrivas som summan $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \cdot 1$.

Faktorisering, delbarhet, multipel, potens

Uppgift 1, 10, 12 och 20.

Delbar och multipel är två begrepp som många elever har svårt med. Vad menas med delbarhet? Vilka delare har talet 2010? Behandla delbarhetsregler.

Vad är siffersumman av ett tal? Visa hur siffersumman kan användas för att avgöra delbarhet. Delar 9 talet 25473654? Vad kan man säga om alla tal som har siffersumman 2010?

Vad är sifferprodukten av ett tal? Hur många heltal finns det som har siffersumman 2010 och sifferprodukten 3?

Visa att en primtalsuppdelning bara kan göras på ett sätt och hur detta kan användas vid problemlösning.

Vad menas med kvadrattal, kubiktal?

Diskutera regler för potensräkning. Varför är $a^0 = 1$ för alla värden på utom 0? Varför kan man inte definiera ett värde på 0^0?

"Regula de tri"
Regula de tri är troligen den äldsta problemlösningsstrategi som man känner till. Den upptecknades i Kina strax efter det att kejsaren Chi-Huang Ti, år 213 f K lät bränna alla böcker i riket och begrava alla lärda män levande. Troligen har metoden varit känd mycket tidigare. Benämningen "trestegsregeln" kommer troligen från hinduerna där den nämns på 600-talet. Metoden har visat sig underlätta elevers problemlösningsförmåga men har inte använts i svensk skola på 25 år. Se t ex:
http://epubl.ltu.se/1402-1595/1997/080/LTU-LDR-EX-97080-SE.pdf.

Visa att man kan lösa uppgift 2 även med hjälp av "Regula de tri".

Geometri

Flera av problemen i Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur motiverar man att två vinklar är lika stora? Det räcker inte att hänvisa till att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel ser rät ut.

4
Vilken volym har rätblocket?

Vilken begränsningsyta får rätblocket om de fyra kuberna placeras i en rad?

Diskutera längd-, area- och volymskala. Diskutera varför frågan "Vilket är störst 1 m^2 eller 1 m?" saknar mening.
6
Diskutera geometriska månghörningar. Finns det andra geometriska figurer som kan ha alla sina hörn bland de givna punkterna? Rita in figurerna och bestäm deras omkrets respektive area. Jämför de olika figurernas storlek. Resonera även om vinklarnas storlek. Jämför även med GyCadet 4.

9
Hur vet vi att $\angle DCF$ är rät? Undersök trianglarna *DEF, AEF, CEF* och *ABF* när det gäller vinklar och sidlängder.

11
Diskutera vinkelsumma i månghörningar.

13
Vad menas med kongruenta områden? Diskutera begreppen omkrets och area. Vilken area har ett område?

15
Låt eleverna arbeta konkret med triangeln i problemet. Vad kallas den figur som erhålls efter vikningen?

17
Resonera om olika metoder att lösa uppgiften. Vilken sida och vilken höjd har den stora liksidiga triangeln? En liten liksidig triangel? För att underlätta beräkningar kan det ibland vara tidsbesparande att införa en extra variabel. I detta fall t ex s för sidan i en "liten" triangel eller h för dess höjd. Man får

$$\frac{5s \cdot 3h + 4s \cdot 1h + 2s \cdot 3h}{2} = \frac{25sh}{2} = 25\text{cm}^2.$$

18
Vad kännetecknar en likbent parallelltrapets?

Hur kan randvinkelsatsen användas i lösningen av uppgiften?

19
Behandla likformighet och areaskala.

22
Låt eleverna arbeta i grupper om 2 till 4 elever.

Givet är en vinkel, som inte är rät, med vinkelspetsen *V*. Punkterna *A* och *B* ligger på vinkelns ena stråle, punkterna C och *D* på den andra. Vilket samband mellan avstånden *AV*, *BV*, *CV* och *DV* föreligger när sträckorna *AC* och *BD* skär varandra?

Ge varje grupp ett stort ark (A3). Rita en cirkel med radie r så stor som möjligt. Markera en punkt *A* på cirkeln. Beräkna $s = 2 \cdot r \cdot \sin 7°$. Markera på cirkeln punkt *B* på avstånd s från *A*, punkt C på avstånd *s* från *B*, punkt *D* på samma avstånd från C osv till punkt *Z*.

Rita månghörningen *ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZA*. Gör hål genom varje hörn och förbind hålen till en likadan månghörning på andra sidan av arket. (Om man mäter upp avstånden med hjälp av en passare har kanske hålen redan uppstått.) Klipp ut månghörningen med någon millimeters marginal. Dra försiktigt, gärna med passarens spets för att lättare få en viklinje, diagonaler från *A* till vartannat hörn C, *E*, G, *I* osv. Dra på andra sidan diagonaler från *A* till *D*, *F*, *H*, *J* osv. Vik månghörningen längs de dragna diagonalerna till en solfjäder.

Hur stora blir vinklarna *BAC*, C*AD*, *DAE* osv?

Vilken av diagonalerna är längst?

Jämför solfjädern med problemets figur. Man kan genom att undersöka solfjädern få svaret på problemet. Man kan också ha den till hjälp när man matematiskt förklarar lösningen.