



Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Student 2025, facit och kommentarer

Här följer ett facit som du kan använda för att rätta årets Kängurutävling. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru. Det finns också bifogat i det mail du fått om tävlingen. När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad **senast 30 april**. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Många efterfrågar en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med

Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, tex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 1000 kr.

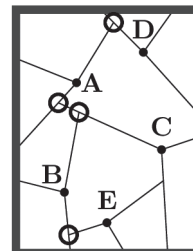
För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. På ncm.gu.se/kanguru finns ett nomineringsformulär. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplommet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan tex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpssam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond. Nomineringsformuläret måste fyllas i senast **30 april**.



Facit och kommentarer – Student 2025

1 B 91 2025 är kvadraten på 45, så nästa kvadrattal blir $(45 + 1)^2 = 45^2 + 2 \cdot 45 + 1^2 = 2025 + 91$, det vill säga 91 är senare.

2 A *DACBE* En spricka från E stannar vid en spricka från B , så B träffades före E . En spricka från B stannar vid en spricka från C , så C träffades före B . En spricka från C stannar vid en spricka från A , så A träffades före C . Slutligen stannar en spricka från A vid en spricka från D , så D träffades före A . Således blev ordningen *DACBE*.

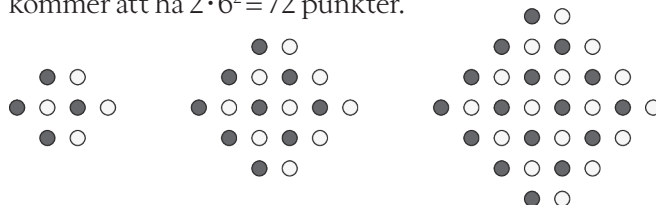


3 D 4 Det finns $20 - 17 = 3$ gröna bollar, $20 - 15 = 5$ svarta bollar och $20 - 12 = 8$ gula bollar. Då måste det finnas $20 - 3 - 5 - 8 = 4$ bollar som är blå.

4 D Mellan 8 888 och 88 888
Värdet är större än $80 \cdot 800 = 64000$, vilket är större än 8888. Värdet är mindre än $100 \cdot 888 = 88800$, vilket är mindre än 88888, så värdet ligger mellan 8888 och 88888.

5 C 4^{16} Kvadratroten ur 16^{16} betyder $(16^{16})^{1/2} = 16^{16 \cdot 1/2} = 16^8 = (4^2)^8 = 4^{2 \cdot 8} = 4^{16}$.

6 A 72 Ett sätt att se på mönstret är att varje figur består av två kvadrater med prickar (se nedan, i varje figur finns en kvadrat som består av mörka prickar och en av ljusa prickar), och sidorna på kvadraterna ökar med 1 vid varje figur. Den n :te siffran kommer att ha $2(n+1)^2$ punkter, så den femte figuren kommer att ha $2 \cdot 6^2 = 72$ punkter.



7 B Mellan 1 och 2

Talet $\sqrt{11}$ ligger mellan 3 och 4, eftersom $3^2 = 9 < 11 < 16 = 4^2$. Därför gäller att $x = \frac{\sqrt{11}}{3}$ ligger mellan $\frac{3}{3} = 1$ och $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, så x ligger mellan 1 och 2 på tallinjen.

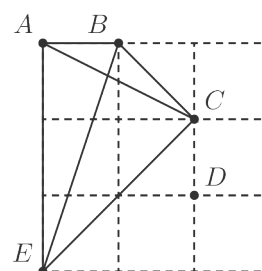
8 C 25% Låt priset på ett paket vara a . Tidigare hade en chokladkaka priset $a/5$, men nu är priset istället $a/4$, vilket ger förändringsfaktorn

$$\frac{\frac{a}{4}}{\frac{a}{5}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Ökningen är då 25%.

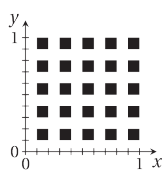
9 D *D* Om D tas bort så kommer avståndet mellan A, B, C och E alla vara olika, nämligen $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, 3$ och $\sqrt{10}$.

Detta är det enda alternativet för vi kan inte ta bort B , eftersom $AC = ED$. Vi kan heller inte ta bort E , eftersom $AB = CD$. Då E och B måste vara kvar och $ED = DB$ så måste punkten D tas bort.

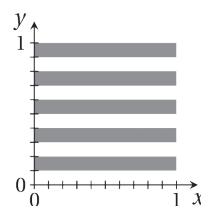
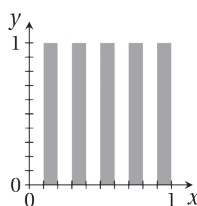




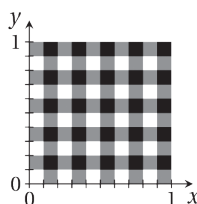
10 E



För reella tal mellan 0 och 1 är den första decimalen udda i intervallet $[0,1; 0,2)$, $[0,3; 0,4)$... $[0,9; 1,0)$. Detta gäller för x -koordinater i de färgade områdena i följande figur till vänster och för y -koordinater till höger.

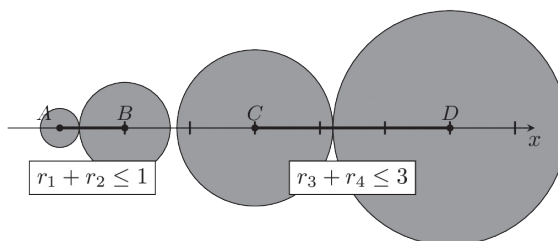


Båda villkoren gäller i de svarta områdena i följande figur, så alternativ E är korrekt.



11 B 4

Om vi sätter ut mittpunkterna och betecknar dem A, B, C, D från vänster till höger, är $r_1 + r_2$ som högst 1 (sträckan $AB=1$) och $r_3 + r_4$ som högst 3 (sträckan $CD=3$). Den maximala summan är alltså $1+3=4$, och den uppnås när både cirkarna 1 och 2 och cirkarna 3 och 4 rör varandra. Det finns flera sätt för detta att hända; cirkarna 2 och 3 behöver inte röra varandra.



12 E annat värde

Eftersom sju av talen är delbara med 7 och fem av talen är delbara med 5, är minst två av talen delbara med både 5 och 7. De två minsta sådana positiva heltal är 35 och 70, så M kan inte vara mindre än 70. Mängden $\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 45, 50, 55, 70\}$ uppfyller villkoret. Alltså är 70 det minsta värdet.

13 A $\frac{\pi r}{2}$

Eftersom vi får veta att de två skuggade områdena har samma area, är arean av triangeln lika med arean av kvartscirkeln.

Därför gäller att $\frac{1}{2}r \cdot |OR| = \frac{1}{4}\pi r^2$ och härav är $|OR| = \frac{\pi r}{2}$.

14 E $2^4 \cdot 3^6$

Om $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{N}}} = M$ så är $2\sqrt{3\sqrt{N}} = M^2$ och genom att kvadrera igen fås $2^2 \cdot 3\sqrt{N} = M^4$ och slutligen $2^4 \cdot 3^2 \cdot N = M^8$.

M^8 är delbart med 2 och 3, alltså är även M delbart med 2 och 3. Då måste M^8 vara delbart med 2^8 och 3^8 . Då måste N vara delbart med 2^4 och 3^6 .



- 15 C uttrycket är alltid positiv

Linjen $y = ax + b$ har positiv lutning och skärningspunkten med y -axeln är positiv, så $a > 0$ och $b > 0$.

Linje $y = cx + d$ har negativ lutning och skärningspunkten med y -axeln är negativ, så $c < 0$ och $d < 0$.

Därför har vi att $ab > 0$, $cd > 0$, $ac < 0$ och $bd < 0$. Genom att kombinera alla termer ser vi att det givna uttrycket har alla termer positiva och därför alltid är positiv.

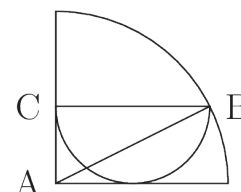
- 16 D 30 cm^2

Låt r vara längden på halvcirkelns radie och R längden på kvartscirkelns radie. Då är även $|AB| = R$, $|AC| = r$ och $|BC| = 2r$. Pythagoras sats för den rätvinkliga triangeln ABC ger:

$$r^2 + (2r)^2 = R^2, \text{ så } 5r^2 = R^2.$$

Halvcirkelns area är $12 \text{ cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2$ och därav är $\pi r^2 = 24 \text{ cm}^2$.

Området för kvartscirkel är $\frac{1}{4} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi (5r^2) = \frac{5}{4} \cdot 24 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$.



- 17 E 10

När diametern på garnnystanet är halverad så är endast $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ av volymen kvar. Eftersom $\frac{7}{8}$ av nystanet används till 70 sockor så kommer den sista åttondelen räcka till 10 sockor.

- 18 D $3 \cdot 2^{25}$ och $5 \cdot 2^{25}$

För varje två på varandra följande steg är $(A, B) \rightarrow (A + B, A - B)$ och sedan $\rightarrow ((A + B) + (A - B), (A + B) - (A - B)) = (2A, 2B)$.

Det vill säga i vartannat steg fördubblas siffrorna. Detta leder till svar D.

19. B B

Om de runda talar sanning så måste A ha nyckeln. Men det stämmer inte eftersom då måste även de fyrkantiga D och E tala sanning.

Om de fyrkantiga talar sanning så måste B ha nyckeln och då stämmer det att alla runda ljuger.

- 20 C 8

När Julia vänder om har hon åkt 6 km. Den totala sträckan som Paula färdas är lika med $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ av det som Julia åkt. Om Paula har åkt x km tills hon träffar Julia på hennes väg tillbaka så är $x = \frac{2}{3}(6 + 6 - x)$. Lösningen är $x = \frac{24}{5}$.

Så totalt åker Paula $\frac{48}{5}$ km fram och tillbaka, och det tar henne 48 minuter. Eftersom Julia åker på 40 minuter så kommer Paula 8 minuter senare.

- 21 B 54

Arealen av $\triangle PEF$ är lika med arean av $\triangle CEF$ (samma bas och höjd) och är därför $\frac{1}{3}$ av arean av hela hexagonen. Därför är hexagonens area $3 \cdot 64 = 192$. Arealen för $\triangle ADP$ är lika med arean av $\triangle ADC$ som också är $\frac{1}{3}$ av hexagonen. Därför är arean av femhörningen $AFEDP$ $(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6})$ fem sjättedelar av hexagonens area, det vill säga 160.

Därför är arean för $\triangle APF$ $160 - 64 - 42 = 54$.

- 22 C 2

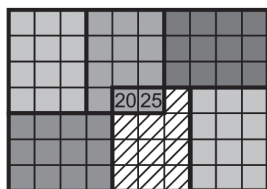
Låda 2 innehåller antingen 1 vit och 2 svarta bollar eller 3 vita bollar. Det räcker att ta två bollar ur låda 2. Om båda är vita, måste denna låda vara den med 3 vita bollar och innehållet i de andra två lådorna bestäms sedan. Om någon av (eller båda) bollarna är svarta, så följer det att låda 2 måste vara den med 1 vit och 2 svarta bollar. Innehållet i de andra två lådor är då fastställda.



23 D -45

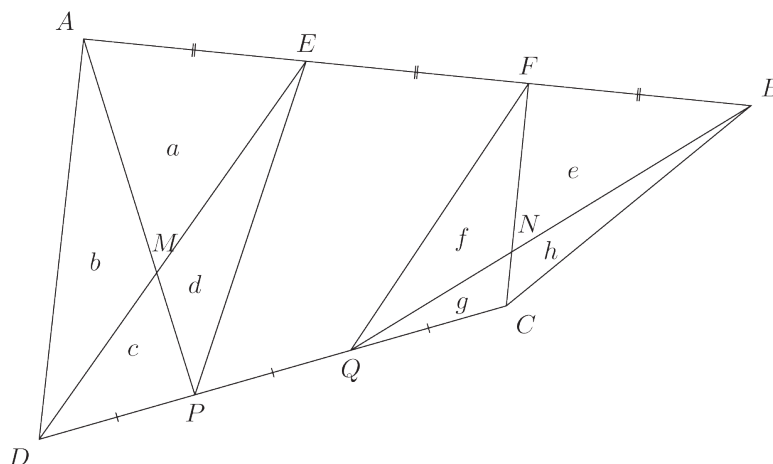
Rutnätet kan delas in i fem gra rektanglar, var och en med summan 0 samt en randig yta. Summan av talen i en 3×4 -rektangel måste vara 0, summan av talen 20 och 25 tillsammans med summan av talen i det randiga området är också 0. Därför är summan av talen i det randiga området -45. Summan av talen i rutnätet är $5 \cdot 0 + (-45) = -45$.

Att en sådan konstruktion är möjlig visas i exemplet till höger med hjälp av ett diagonalt mönster:



25	-20	-25	20	25	-20	-25	20	25	-20
-20	-25	20	25	-20	-25	20	25	-20	-25
-25	20	25	-20	-25	20	25	-20	-25	20
20	25	-20	-25	20	25	-20	-25	20	25
25	-20	-25	20	25	-20	-25	20	25	-20
-20	-25	20	25	-20	-25	20	25	-20	-25
-25	20	25	-20	-25	20	25	-20	-25	20

24 A 57



För beteckningar hänvisas till bilden ovan:

$$a + b = [ADE] = \frac{[ADB]}{3} \text{ och } g + h = [BCQ] = \frac{[BCD]}{3}$$

$$\text{Om vi kombinerar dessa uttryck: } a + b + g + h = \frac{[ABCD]}{3}$$

Vi har också:

$$a + d = [AEP] = \frac{[AFP]}{2} \text{ och } f + g = [CFQ] = \frac{[CFP]}{2}$$

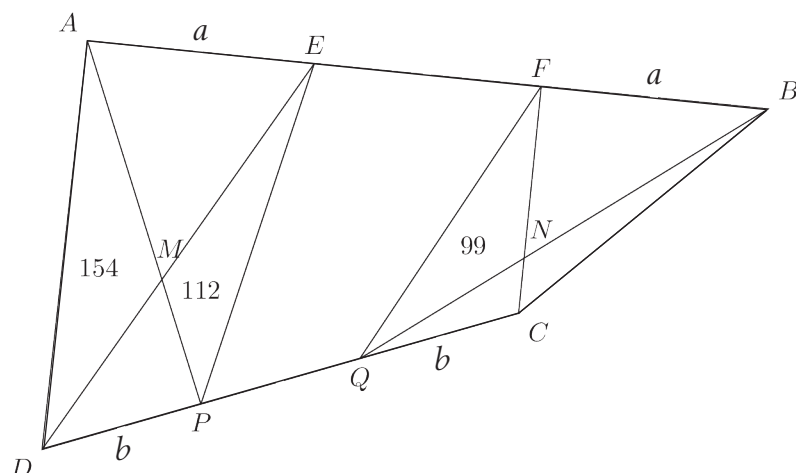
$$\text{Om vi återigen kombinerar uttrycken: } a + d + f + g = \frac{[AFCP]}{2} =$$

$$\frac{[FAC] + [CPA]}{2} = \frac{\frac{2}{3}([BAC] + [CDA])}{2} = \frac{[ABCD]}{3}.$$

Så, $a + b + g + h = a + d + f + g$ och därför är $b + h = d + f$. Med isättning av värden blir det: $h = d + f - b = 112 + 99 - 154 = 57$. $[NCB] = 57$.



Alternativ lösning:



Jämför fyrkanterna $AEPD$ och $FBCQ$.

$AE = FB = a$ och $DP = QC = b$

Eftersom sträckorna AE och FB har samma längd och samma lutning, så är differenser mellan deras ändpunkters avstånd till linjen genom D och C också lika: $\text{dist}(A) - \text{dist}(E) = \text{dist}(F) - \text{dist}(B)$.

Men dessa fyra avstånd är höjder av fyra trianglar med basen b : APD , EPD , FCQ och BCQ .

Detta gör att även differenser mellan triangelarnas areor är lika:

$\text{area}(APD) - \text{area}(EPD) = \text{area}(FCQ) - \text{area}(BCQ)$.

Alltså även $\text{area}(AMD) - \text{area}(EPM) = \text{area}(FNQ) - \text{area}(BCN)$

det vill säga $154 - 112 = 99 - x$ vilket ger $x = 57$.