Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2025, facit och kommentarer

Här följer ett facit som du kan använda för att rätta årets Kängurutävling. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru. Det finns också bifogat i det mail du fått om tävlingen. När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 30 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Många efterfrågar en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med

Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 1000 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. På ncm.gu.se/kanguru finns ett nomineringsformulär. Nomineringen ska innehålla *elevens namn*, *skola*, *årskurs*, *tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond. Nomineringsformuläret måste fyllas i senast *30 april*.

Facit och kommentarer – Junior 2025

1 D 14 — Om du viker in den vänstra fliken, döljs den vänstra kolumnen och den tredje raden. Om du sedan viker in den högra fliken, döljs den högra kolumnen, vilket lämnar endast 9 och 5 synliga. Deras summa är $9+5=14$.

2 E  — Om en tredjedel av hexagonen är svart betyder det att 2 trianglar är svarta, och om hälften av hexagonen är vit betyder det att 3 trianglar är vita. Bild E är den enda som uppfyller båda dessa två villkor.

3 B 1:1 — Låt b vara basen på den ursprungliga triangeln och låt h vara dess höjd. Då är den ursprungliga arean lika med $\frac{b\cdot h}{2}$. Basen på den nya triangeln är $\frac{3}{2}\cdot b$ och dess höjd är $\frac{2}{3}\cdot h$.
Den nya arean är lika med: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot b\cdot\frac{2}{3}\cdot h=\frac{b\cdot h}{2}$ och förhållandet är 1:1.

4 B 15/3 — Den tidigast möjliga dagen för den tredje torsdagen i mars bestäms av när den tidigast möjliga dagen för den första torsdagen är i mars, vilket är den 1:a mars. När den 1:a mars är den första torsdagen, är den 15:e mars den tredje torsdagen.

5 C 8 — Hon kan bilda talen 2052, 2205, 2250, 2502, 2520, 5022, 5202, 5220.

6 B 112,5° — Efter första vikningen: $\angle CAB=\angle ACB=45°$.
Efter sista vikningen $\angle ACX=½\angle ACB=22{,}5°$.
I $\triangle AXC$ gäller då: $\angle AXC=180°-\angle CAX-\angle ACX=$
$180°-45°-22{,}5°=112{,}5°$

7 D 24 — Eftersom 8000 är delbart med 8 måste de två sista siffrorna bilda ett tal som i sig är delbart med 8. Eftersom talet också måste vara delbart med 9, måste summan av alla siffror i talet vara delbar med 9. Detta gäller endast för 64. Så det enda fyrsiffriga talet som är delbart med både 8 och 9 och börjar med 80 är 8064. Därför är produkten av de två sista siffrorna 24.

8 A 10 — Låt K vara antal kaniner, C vara antalet katter och H vara antalet hundar.
$K+C=8, \qquad H+C=5, \qquad H+K=7$
$2(K+C+H)=20$
$K+C+H=10$

9 B: 25 cm^2 — Vi drar sträckan OQ. Vi vet att $OQ=10$ cm eftersom det är en radie. Då har triangeln PQR en bas på 10cm och en höjd på 5 cm (diagonalerna skär varandra mitt itu). Arean är: $\frac{10\cdot 5}{2}=25$.

10 C 9 — Eftersom det finns en guldmedalj i 1, 2, 3 och en guldmedalj i 4, 5, 6 drar vi slutsatsen att 7 är en silvermedalj. På liknande sätt drar vi slutsatsen att 1 är en silvermedalj. Eftersom det finns en guldmedalj i 2, 3, 4 och en guldmedalj i 6, 7, 1 drar vi slutsatsen att 5 är en silvermedalj. Då är 6 en guldmedalj, 4 är en silvermedalj, 3 är en guldmedalj och 2 är en silvermedalj. Summan på guldmedaljerna blir $3+6=9$.

11 E $\frac{81}{256}$ — Bredden på fotot i den vänstra bilden är lika lång som skärmens längsta sida. Bredden på fotot i den högra bilden är lika lång som den korta sidan av skärmen. Därför är måtten på fotot i den högra bilden $\frac{9}{16}$ av måttet på fotot i den vänstra bilden.
Följaktligen upptar fotot på den högra bilden $\left(\frac{9}{16}\right)^2=\frac{81}{256}$ av hela skärmen.

12 C 38

Låt Kates och Toms åldrar vara x respektive y. Då gäller att $17 \cdot x = 19 \cdot y$, vilket innebär att $x = 19 \cdot k$ och $y = 17 \cdot k$ för något heltal k. Med hjälp av problemets villkor får vi:
$40 < 17 \cdot k + 19 \cdot k < 100$, det vill säga $40 < 36 \cdot k < 100$.
Det följer direkt att $k = 2$ är det enda heltal som uppfyller dessa olikheter, vilket innebär att Kate är 38 år gammal.

13 C 6

Låt a vara antalet skott mot det övre vänstra hålet och b antalet skott mot det nedre högra hålet. Då har vi att $a + b = 27$ och $\frac{50}{100}a + \frac{80}{100}b = (27 - 9)$.

Detta leder till att $\frac{1}{2}a + \frac{4}{5}(27 - a) = 18$. Lösningen ger att $a = 12$.

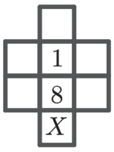
Det betyder att han träffar 50 % av 12 skott på övre vänstra hålet, vilket är 6 gånger.

14 D 14

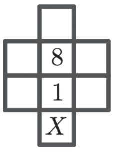
Det finns 7 primtal som är mindre än 18, nämligen 2, 3, 5, 7, 11, 13 och 17. För att garantera att Sara tar bort minst tre primtal räknar vi på att hon först tar alla bollar märkta med icke-primtal, det vill säga $18 - 7 = 11$ bollar, och sedan tagit tre av de återstående primtalsnumrerade bollarna. Detta innebär att hon måste ta $11 + 3 = 14$ bollar för att vara säker.

15 B 2 eller 7

De siffror som ska placeras i de mittersta rutorna måste vara de med minst antal grannar bland de åtta siffrorna, det vill säga 1 och 8.



eller



Detta innebär att varken 2 eller 7 kan vara i någon av rutorna i raderna med tre rutor, och därför måste den ena placeras i den övre rutan och den andra i den nedre rutan.

16 A 21

Vi vet att $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
Eftersom N är det största 6-siffriga talet och 9 delar 180, är den första siffran i N en 9:a. Produkten av de sista 5 siffrorna i N är $180 / 9 = 20$.
Den största delaren till 20 är 5, så den andra siffran i N är 5. Produkten av de sista 4 siffrorna i N är $20 / 5 = 4$.
Den största delaren av 4 är 4, så de sista 4 siffrorna i N är 4, 1, 1 och 1.
Summan av alla siffror i N är alltså $9 + 5 + 4 + 1 + 1 + 1 = 21$.

17 D 12

Den nedre vänstra grå triangeln är kongruent med den vita triangeln i mitten av bilden (enligt v-s-v).
Därför är den totala arean ovanför rektangelns diagonal som vi letar efter, lika med den grå rektangeln + halva den mörka rektangeln $(4 + 2 = 6)$.
Det betyder att den efterfrågade arean är 12.

18 E 26

Låt p, q och r vara primtal. Då kan en ekvation skrivas:
$p \cdot q \cdot r = 11(p + q + r)$

Detta innebär att ett av primtalen måste vara 11. Om r ersätts av 11 kan ekvationen skrivas:
$p \cdot q = 11 + p + q$

Om både p och q är större än 5, blir vänsterledet större än högerledet, vilket inte är möjligt. Alltså måste ett av de andra primtalen vara 2 eller 3. De möjliga primtalstripplarna som uppfyller villkoret är (2, 11, 13) och (3, 7, 11).
Därför är det maximala värdet på den eftersökta summan $2 + 11 + 13 = 26$.

19 D 1/6

För att ta bort tegelsten nr 4 måste vi först ta bort den första raden av tegelstenar (nr 1 och nr 2). Det behövs 3 drag.

Fall 1: Vi tar bort tegelsten nr 1 med sannolikhet $P = 1/2$.
Då måste även nr 2 tas bort med sannolikhet $P = 1/2$.
För att nr 4 ska tas bort finns en chans på 3, $P = 1/3$.
Sannolikheten blir: $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/3 = 1/12$.

Fall 2: På grund av symmetri gäller samma sak om vi tar bort tegelstenen nr 2 först.
Eftersom händelserna i båda fallen är oberoende adderar vi sannolikheterna: $1/12 + 1/12 = 1/6$.

20 D 90 cm

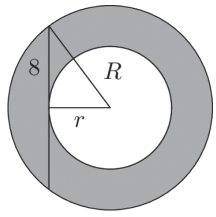
Även om figuren är ritad i en spiral, bildas vid ett visst steg en kvadrat, så vi letar efter ett kvadrattal som är mindre än eller lika med 2025. Eftersom $45^2 = 2025$, slutar Daniel när hans figur är en kvadrat med sidlängden $45 \cdot 0{,}5$ cm och omkretsen $45 \cdot 0{,}5 \cdot 4 = 90$ cm.

21 B 4

Den femte siffran måste vara 5, och den andra, fjärde och sjätte siffran måste vara 2, 4 eller 6. Om de första tre siffrorna innehåller 1, 3 och ett jämnt tal för att talet ska vara en multipel av 3, måste den andra siffran vara 2. Den tredje och fjärde siffran, C och *D*, måste bilda ett tal som är en multipel av 4. Eftersom C =1 eller 3, måste *D* vara 6. Slutligen måste *F* vara 4.

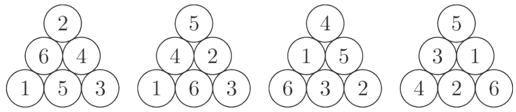
22 C 64π

Låt radien för den yttre cirkeln vara R och radien för den inre cirkeln vara r, då har det skuggade området arean $\pi(R^2 – r^2)$. Utan att ändra arean kan vi flytta den inre cirkeln till centrum av den yttre cirkeln, vilket resulterar i bilden till höger. Enligt Pythagoras sats gäller att $R^2 – r^2 = 8^2$. Alltså har det skuggade området arean 64π.



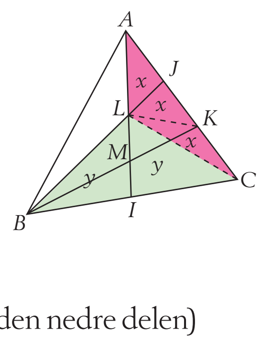
23 D 4

Summan av de sex inskrivna talen är $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Summan av talen vid triangelns hörn är minst $1 + 2 + 3 = 6$ men högst $4 + 5 + 6 = 15$.
Talen vid hörnen ingår två gånger i summorna av talen på triangelns sidor. Därför är summan av dessa tre summor minst $21 + 6 = 27$ och högst $21 + 15 = 36$, och är delbar med 3, eftersom den är summan av tre identiska tal. De enda värden vi behöver överväga för summorna är därför 6, 9, 12 och 15. Följande exempel visar att alla fyra av dessa värden är möjliga.



24 B 5

Börja med att identifiera lika områden: Trianglarna *AJL*, *JLK* och *KLC* har lika stora areor, betecknade med x. Även trianglarna *LIB* och *LCI* har lika stora areor, betecknade med y.
Formulera sedan ekvationer baserat på area: Eftersom *AI* är en median, delar den upp de större trianglarna i segment vars areor summeras till kända värden. Den totala arean av triangeln *AIC* är 30, vilket kan delas upp som: $3x + y = 30$.



Den totala arean av triangeln *ABC* är 60, och triangeln *BJC* (den nedre delen) har en area på40. Denna del kan delas in som: $2x + 2y = 40$.
Det blir ett ekvationssystem att lösa (där frågeställningen är vad x har för värde):

$$\begin{cases} 3x + y = 30 \\ 2x + 2y = 40 \end{cases}$$

Lösningen är $x = 5$, $y = 15$.