Kängurutävlingen – Matematikens hopp 2025

Arbeta vidare med BENJAMIN

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det? Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru

Nedan har vi samlat några av problemen från BENJAMIN 2025. Vi ger förslag på hur eleverna kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.

Geometri

2 Hur ser det ut bakifrån?

Att kunna föreställa sig hur någonting ser ut från ett annat håll är en del av rumsuppfattningen och en förmåga elever behöver i vardagen. I problemlösningssituationer är det ofta en bra strategi att föreställa sig hur det som beskrivs kan se ut och rita upp en modell eller en skiss. Då är förmågan att föreställa sig rummet ur olika perspektiv användbar.

Fråga eleverna vilken strategi de använt för att lösa problemet. Ser de på siffrornas form, på hur 2 och 5 ser ut spegelvänt? Ser de på siffrornas placering, exempelvis var nollan är? Ser de väggen som ett helt mönster och identifierar att det ska vara två vita klossar ytterst i båda sidorna i andra raden uppifrån?

Låt eleverna parvis bygga en vägg av multilink liknande den i uppgiften. De ska använda två färger och göra ett mönster eller siffror eller bokstäver i muren likt dem på bilden. Låt eleverna sedan byta väggar med varandra. Nu ska de titta på den nya väggen från ena sidan och rita upp hur de tror att den ska se ut från den andra sidan. Be några redovisa och berätta hur de har resonerat.

Liknande problem finns i Benjamin 2024:1 och 2018:2

Pusselbitar

Problem med pusselbitar handlar om rumsuppfattning och att i tanken kunna vrida och vända på figurer. Pusselproblem är roliga och utvecklande att skapa själv.

12

Låt eleverna göra liknande problem som i nummer 12 genom att själva först skapa ett rutnät om 5×5 rutor och i det färglägga några rutor svarta. Därefter kan de identifiera figurer uppbyggda av sammanhängande vita rutor och rita dem som fristående figurer. Slutligen ritar de en figur som inte går att passa in i rutnätet.

När de är klara byter eleverna med varandra och löser dem.

19

Fråga efter elevernas strategier för att lösa det här problemet.
Hur kan en pusselbit som består av tre rutor se ut? Vilka möjligheter finns?
Hur kan man avgöra vilken form pusselbitarna måste ha?

22

Här kan det vara svårt att föreställa sig hur de olika bitarna kommer att se ut.

Fråga vilka mallar som INTE går och be eleverna försöka beskriva varför det inte går. Hamnar någon del omlott? Vilken del? Hur ser man det? Saknas något? Hur ser man det? Rita sedan av eller kopiera så att det går att klippa ut och konkret pussla ihop till ett hjärta. När det inte går: upprepa beskrivningen av varför det inte går.

Ett liknande problem finns i årets tävling Ecolier 2025:22

Area och omkrets

Det är vanligt att uppgifter om area och omkrets bakas in i samma problemställning? Syftet är att göra eleverna uppmärksamma på de olika begreppen och att det är olika storheter som beräknas på olika sätt.

17

Om eleverna haft svårt för den här uppgiften är det lämpligt att visa den konkret.
Rita figuren och klipp ut de olika delarna. Jämför med den ursprungliga kvadraten.
Hur stor area har en kvadrat? Hur stor är sidans längd? Hur stor är hela omkretsen?
Samtala om skillnaden mellan area och omkrets och markera omkretsen dels på den ursprungliga kvadraten, dels på korset. Fråga vad som ändras när ett kvadratiskt hörn klipps bort. Hur ändras arean? Hur ändras omkretsen?
Klipp bort andra delar av den ursprungliga kvadraten och ställ samma frågor.

18

Be eleverna komma med förslag på olika strategier. Det är inte helt självklart att det enklaste är att först räkna ut arean på en större del och sedan subtrahera en fjärdedel.

Andra problem som tar upp både area och omkrets:
Benjamin 2024:16, 2024,19, 2023:15, 2022:13, 2021:13, 2020:19 och Cadet 2020:13, 2021:18

Tal och tals användning

4 Vattenrör

Det här är ett klassiskt problem som går lätt att variera. Gå igenom problemets villkor stegvis. Vissa villkor kan diskuteras eftersom de uttrycker ett ”idealfall” som kanske inte alltid finns i verkligheten. Hjälp eleverna att bena upp vilka slutsatser de kan dra från varje villkor.
1. Det finns en behållare med 10 liter vatten.
2. Det finns fem hål som är lika stora så det rinner lika mycket vatten genom varje hål .
Slutsats – en femtedel av vattnet rinner genom varje hål. 1/5 av 10 liter är 2 liter.
3. Ett av rören mynnar direkt i behållare B. Slutsats – 2 liter rinner rakt ner i B.
4. Tre av rören mynnar i en mellanbehållare. Slutsats –3 · 2 liter = 6 liter rinner ner i mellanbehållaren.
5. Mellanbehållarens vatten rinner ut i två lika stora hål, varav ett i ett rör som mynnar i behållare B. Slutsats – hälften av vattnet från mellanbehållaren rinner ner i behållare B. Hälften av 6 liter är 3 liter.
6. Nu har vi kommit fram till att 2 liter + 3 liter = 5 liter rinner ner i behållare B.

Variera uppgiften genom att ändra på antalet rör, mängden vatten från början eller antalet mellanbehållare. Låt eleverna ska nya uppgifter av samma sort.

Symbolisera beräkningarna för att leda vidare mot bråkräkning.
Hur kan man skriva de uträkningar som görs?
I steg två har vi $\frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{10}{5} = 2$
I steg fem har vi $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ och sedan $\frac{3}{10} \cdot 10 = 3$
Vill vi skriva det som en enda uträkning kan vi skriva $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right) \cdot 10 = \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{10}\right) \cdot 10 = \frac{5}{10} \cdot 10 = 5$
En fördel med att skriva det så här är att det går att skriva ett generell uttryck som anger hur mycket vatten som hamnar i bägaren med olika utgångsvärde.
Antag att det finns *a* liter i bägaren. Då hamnar det $\frac{5}{10} \cdot a$ liter i bägaren B.

5 Papperssnurror

Matematiken i uppgiften med snurrorna handlar dels om att se hur mycket ett helt varv är och dels om att identifiera någonting i snurran som gör det lätt att jämföra två lägen. Den här snurran har 6 delar, vilket betyder att den efter 6 steg har hamnat i samma läge som från början. Det innebär att man bara behöver fundera över hur många steg den snurrar utöver multipar av 6.

Fråga eleverna hur de tänkte. Plocka upp och diskutera olika strategier. Räknar de 8 steg eller ser de att det räcker att räkna 2 steg? Vad fokuserar de på när de ska jämföra två lägen? Tittar de på en specifik triangel eller på ett större mönster?

Titta på var och en av svarsalternativen och be eleverna räkna ut hur många steg snurran roterat för att komma dit. Finns det fler möjligheter? Hur många möjligheter?

Ett liknande problem finns i årets tävling Ecolier 2025:2 och Cadet 2025:2

6 Tal i ordning

Det här är ett problem med tal som handlar om att kunna resonera om storleksordningen på tal utifrån en grundläggande förståelse för positionssystemet.

Diskutera igenom alla svarsalternativ med eleverna. Be dem formulera argument för varför eller varför inte ett alternativ är möjligt. Var noga med logiken i resonemangen. Exempelvis så här:
Om 4.10 ska stå på menyn så måste det vara *double* som kostar 4.10. Det skulle innebära att alla de övriga måste vara mindre än 4.10. *Cheezy* måste i så fall kosta 3.50, men redan där är det fel eftersom 3.50 < 3.70.

Rita en tallinje och placera ut 3.70 och 6.80. Placera svarsalternativen däremellan och jämför med menyn.

En liknande uppgift som enbart innehåller heltal finns i årets tävling Ecolier 2025:24.

9 Lyckohjulet

Problemet handlar om att identifiera vilken cirkel som har störst mörklagd yta eftersom den största mörka ytan ger störst vinstchans. Det innebär en storleksjämförelse av bråk.

Be eleverna beskriva hur stor del av varje cirkel som är mörk. Beskriv både med ord och med symboler, exempelvis är den första cirkeln uppdelad i åttondelar och två är mörka. Två åttondelar är lika mycket som en fjärdedel $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. När alla cirklarnas mörka delar är beskrivna kan bråken jämföras. Diskutera hur man kan se vilket bråk som är störst. Placera ut bråken på tallinjen och jämför med de färgade cirkelsektorerna.

Liknande problem finns Benjamin 2019:14 och Junior 2025:2.

13 Tidtagning

Problemet är språkligt utmanande så det kan vara bra att läsa uppgiften tillsammans, återberätta den med andra ord och diskutera olika begrepp som finns med. Ibland har problem en kontext som är obekant för vissa elever. Ordet lagkapp som är simningens variant av stafett kan behöva förklaras. Det är inte heller säkert att alla elever har klart för sig hur tidtagning med ett tidtagarur fungerar. I så fall är det bra att ta in ett tidtagarur i klassrummet och visa hur den fungerar och hur tränaren har avläst de olika tiderna. Matematiken har egentligen inte med simning eller tidtagarur att göra utan handlar om att jämföra tidsangivelser. Det är ett mycket bra matteproblem eftersom det kräver ganska mycket räkning om alla tidsskillnader räknas ut, samtidigt som det går att lösa med betydligt mindre räkning.

Fråga eleverna hur de har löst problemet. Be först någon berätta som har beräknat alla mellanskillnader. Diskutera hur mellanskillnaderna beräknas när det är digital tid. Använder de subtraktion? (4:07 – 2:08) I så fall kan de inte använda en traditionell uppställning eftersom tiderna inte anges i ett positionssystem med tiobas. Vilka strategier är framgångsrika? Kanske att skriva subtraktionen som en öppen addition (2:08 + __ = 4:07). Är det någon som kan komma på ett enklare sätt? Avsluta med iakttagelsen att alla intervaller är ungefär 2 minuter. På vilket sätt kan det vara en hjälp?

Ett mer utmanande problem med digital tid finns i Cadet 2025:13.

Algebra

21 Tung - lättare - lättast

Tidig algebra bygger på en god förståelse av likhet och olikhet. I det här problemet får eleverna resonera om likhet utifrån balans. Det är lika på båda sidor om det väger lika på balansvågen. En balansvåg är inte längre en vanligt förekommande hushållsredskap, och för en elev som inte förstår hur den fungerar är problemet olösligt. Om balansvågen är obekant för eleverna kan det vara lämpligt att ta in en sådan i klassrummet och laborera en stund med att väga och jämföra.

Diskutera olika lösningsstrategier. Går det att hålla alla delresonemang i huvudet eller har eleverna gjort någon form av noteringar? Hur ser dessa ut?

Hjälps åt att införa algebraiska symboler. Eftersom vi inte vet vad varje kloss väger kan vi inte sätta siffror. Be eleverna föreslå bokstäver som kan representera klossarnas vikt, exempelvis: x, p och s. Beskriv därefter vad bilden visar med hjälp av bokstäverna och likhetstecken. $2x = 2x$ $2p = x + s$ $2p + x + s = s + 4x$
Prata om vad det som står skrivet betyder. Vilken nytta kan vi ha av de olika påståendena? Att $2x$=$2x$ är nog självklart och ger inte så mycket information. Att $2p = x + s$ kan användas i den sista ekvationen genom att $2p$ byts ut mot $x + s$ så att vi får:
$x + s + x + s = s + 4x$ som efter lite omflyttning är samma sak som att $2s + 2x = s + 4x$
Ser vi det som en balansvåg går det då bra att plocka bort ett s och två x från varje sida och kvar finns likheten att $s = 2x$. Vi ser alltså att s måste väga mindre än x, närmare bestämt precis hälften så mycket. Den informationen kan nu matas in i den andra ekvationen där ett s byts mot $2x$ och vi ser att $2p = 3x$. Då ser vi att p måste väga mer än x, närmare bestämt en och en halv gång så mycket. Sammanlagt vet vi nu att $p > \mathrm{x} > s$.

Liknande problem finns i Benjamin 2020:20, 2019:20, 2002:18 och i årets Ecolier 2025:21

23 Summor av tal

Diskutera olika sätt att lösa problemet. I facit föreslogs ett sätt där talen i samtliga rutor fylls i. Har eleverna gjort så? Finns det några andra sätt?
Fundera tillsammans över vilken information som finns och vilken som efterfrågas. Egentligen behöver man inte veta vilket tal som står i varje enskild ruta, eftersom det är *summan* av talen i andra raden som efterfrågas. Går det att flytta fokus från enskilda rutor till summor av varje rad? Här är några frågor att fundera kring:

- Vad kommer den totala summan att vara om alla tal i rutorna adderas?
- Går det att beräkna summan av en enskild rad?
- Hur kan vi ta reda på summan av talen i översta raden?
- Hur kan vi ta reda på summan av talen i understa raden?
- Hur kan vi ta reda på summan av talen i den mellersta raden där rutorna är grå?

Observera att när talen som står på de lodräta strecken adderas får man fram summan av alla tal i två rader. $11+11+11=33$ är summan av talen i den översta och den mellersta raden och $8+12+10 = 30$ är summan av talen i den mellersta och den understa raden. Det innebär att $33+30 = 63$ är summan av den översta, den understa och två gånger den mellersta raden. Summan av alla tal är $1+2\ldots+9=45$.

24 Chokladdelning

Det här problemet handlar dels om att hålla ordning på de olika villkoren och dels om att inte blanda ihop andel (en fjärdedel av) med antal (sex fler) eller förhållande (tre gånger så många). Det är alltså en språkligt utmanande uppgift.

Arbeta med begreppen och bena ut ordentligt vad de olika villkoren innebär.

Skriv villkoren som matematiska uttryck:
Saras antal från början = 3 · Annas antal från början
Det talar om att Saras antal är delbart med 3.
Sara ger bort 1/4 innebär att hon har 3/4 kvar
Det talar om att Saras antal är delbart med 4.
Saras antal på slutet = 6 + Annas antal på slutet
Om vi inför bokstäver kan vi kalla Annas antal från början för A och Saras antal från början för S. Så får vi följande uttryck:
$s=3\cdot a$ vilket innebär att $\frac{1}{4}\cdot s=\frac{3}{4}\cdot a$
Efter att Sara givit bort sin fjärdedel har hon kvar $(3-\frac{3}{4})\cdot a=\frac{9}{4}\cdot a$
Anna i sin tur har nu $(1+\frac{3}{4})\cdot a=\frac{7}{4}\cdot a$
Skillnaden mellan dem är $(\frac{9}{4}-\frac{7}{4})\cdot a=\frac{2}{4}\cdot a$

Vi vet att de $\frac{2}{4}$ som är skillnaden på slutet motsvarar 6 bitar. Alltså är varje fjärdedel av Annas antal från början 3 bitar.
Anna hade från början $4\cdot 3=12$ bitar.
Sara hade från början 3 gånger så många, $3\cdot 12=36$ bitar.

Två enklare problem från Ecolier 2003:16

Max sa till sin kamrat: ”Om jag hade plockat dubbelt så många äpplen som jag faktiskt har gjort, skulle jag ha 24 äpplen fler än jag har nu”. Hur många äpplen hade Max plockat?

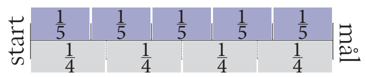
En tegelsten väger 2 kg plus hälften av sin vikt. Hur mycket väger den?

Förhållande

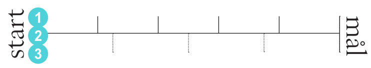
11 Sköldpaddsrace

Problemet med sköldpaddorna som tävlar löpning är ett mycket rikt problem eftersom det går att lösa på många olika sätt. Olika matematik kan komma i förgrunden vid olika ledningsstrategier. Använd gärna problemet för att införa nya matematiska representationer. Här är några förslag.

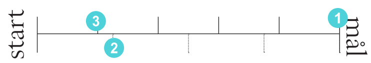
Visualisera med hjälp av en sträcka. Rita upp en sträcka som motsvarar hela loppet och be eleverna sätta ut de olika sköldpaddorna där de befinner sig vid olika tillfällen.



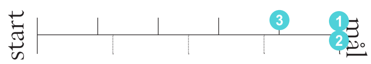
Så här kan hela loppet representeras i fjärdedelar och femtedelar.



Här är de tre sköldpaddorna placerade på startlinjen.



Så här är sköldpaddorna placerade när ettan går i mål. Man ser att för varje fjärdedel som tvåan rör sig framåt kommer trean att röra sig en femtedel.



När tvåan går i mål har sköldpaddan fortfarande en femtedel kvar.

Använd en tabell där förhållandet mellan de tävlande hålls konstant och förändras proportionellt (läs mer om T-tabeller som verktyg för proportionella resonemang i Nämnaren 2022:4, sid 37–42)

första	andra	tredje
1	1/4	1/5
	1	4/5

·4

första	andra	tredje
10 km	2,5 km	2 km
	10 km	8 km

·4

Med hjälp av en proportionalitetstabell är det enkelt att finna svar på andra frågor:
- Hur långt har den tredje sköldpaddan kommit när den andra har kommit 5 km?
- Hur långt har den andra sköldpaddan kommit när den tredje har kommit 5 km?

Ställ fler liknande frågor och variera mellan att arbeta med andelar av hela sträckan och att arbeta med bestämda sträckor.

Variera med andra avstånd på loppet, andra förhållanden mellan deltagarna och andra frågor.

första	andra	tredje
10 km	2,5 km	2 km
	10 km	8 km
	5 km	4 km
	6,25	5 km

·4
/2
·2,5