Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Student 2024, facit och kommentarer

Här följer ett facit som du kan använda för att rätta årets Kängurutävling. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru. Det finns också bifogat i det mail du fått om tävlingen. När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 30 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Många efterfrågar en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med

Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 1000 kr.

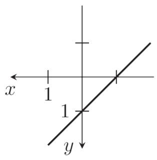
För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Nomineringen ska innehålla *elevens namn*, *skola*, *årskurs*, *tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond. Nomineringsformuläret måste fyllas i senast *30 april*.

Facit och kommentarer – Student 2024

1 C 38 $38 = 4 \cdot 10 - 2 = 6^2 + 2 = 2 \cdot 19$

2 E 12° Vinkeln av varje bit är $360°/6 = 60°$. Vinkeln av varje mellanrum är en femtedel av vinkeln av den uppätna biten: $60°/5 = 12°$.

3 D

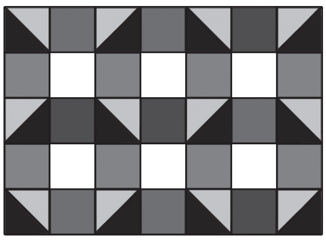


$y = x + 1$ skär axlarna i punkterna (0, 1) och (-1, 0).

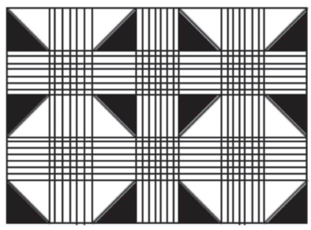
4 D 2/9 Summan av sannolikheter av samtliga utfall är 1.
$p(1) + p(6) = 1 - 4 \cdot 1/6 = 2/6 = 3/9$.
$p(6) = 2p(1)$ ger $p(1) = 1/9$ och $p(6) = 2/9$.

5 B 4^{31} $16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15} = 4 \cdot (4^2)^{15} = 4^{1+2\cdot 15} = 4^{31}$.

6 C 5 Vi måste ha minst 5 färger eftersom det finns punkter där 5 figurer (tre kvadrater och två trianglar) möts.
Och 5 färger räcker. Vi kan färga mosaiken t.ex. såhär:



eller så här



7 B 3 Vi skriver u för ett glas med öppningen uppåt och n för ett glas med öppningen nedåt.
Från början har vi sex glas med öppningar uppåt u u u u u u
i steg 1 vänder vi fyra av dem, t ex såhär: n n n n u u ,
i steg 2 vänder vi tre n och ett u, t ex såhär: u u u n n u
i steg 3 vänder vi alla u och får: n n n n n n
Snabbare än så kan det inte gå, vi måste gå genom minst 4 olika lägen: startläge med 6 u, ett läge med 2 u efter första steget, slutläge utan u och i nästsista läget måste det alltid vara exakt 4 u. Alltså vi behöver minst 3 steg.

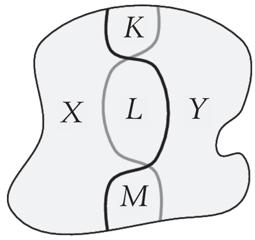
Anmärkning: Från ett läge med 2 u kan vi alltid i ett steg gå över till något läge med 4 u, men om vi har två bestämda lägen ett med 2 u och ett med 4 u, så kan det hända att vi behöver 3 steg för att gå mellan dem. T ex mellan n n n n u u och u u u u n n .

8 B $2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$ Om man multiplicerar talet 1 m gånger med 6 och n gånger med 10, så får man talet $2^{m+n} \cdot 3^m \cdot 5^n$ oavsett i vilken ordning man multiplicerar.
$2^{90} \cdot 3^{20} \cdot 5^{80}$ är det enda svarsalternativet som inte är i denna form (eftersom $90 \neq 20 + 80$).

9 B $L = K + M$

Låt X och Y vara areor av områdena markerade i figuren.
Påståendet om bäcken ger: $X + K + M = Y + L$
Påståendet om stigen ger: $Y + K + M = X + L$
Ledvis summering ger: $X + Y + 2K + 2M = X + Y + 2L$

$$2K + 2M = 2L$$
$$K + M = L$$

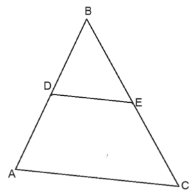


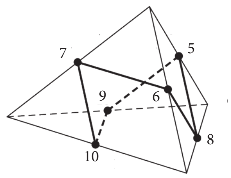
10 C n är ett udda tal

n kan t ex vara 25. Det är varken delbart med 3 eller med 6 eller lika med 2 eller ett primtal. Däremot kan inget av de övriga fyra påståenden ensamt vara sant, på grund av följande implikationer:
A ⇒ (B eller C)
B ⇒ A
D ⇒ E
E ⇒ (C eller D).

11 C 21

Om D och E är mittpunkter av AB och CB, så är trianglarna ABC och DBE likformiga och längden av DE är hälften av ACs längd.

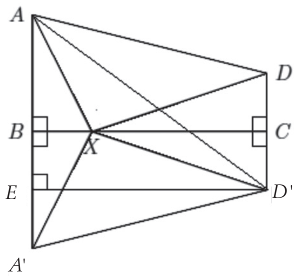




Tetraederns sidor är sådana trianglar och vi ser t ex att sträckan från punkt 6 till punkt 8 är $5/2$.
Omkretsen av hela sexhörningen 6–8–5–9–10–7 är
$5/2 + 6/2 + 7/2 + 8/2 + 6/2 + 10/2 = 42/2 = 21$

12 D 10

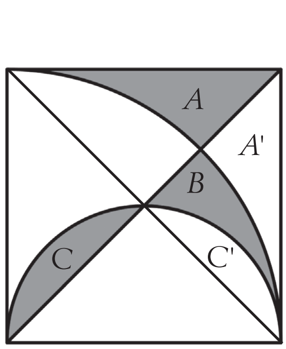
Rita en spegelbild $A'BCD'$ av $ABCD$.



Linjen AXD är lika lång som AXD', vars minsta möjliga längd är längden av sträckan AD', som är hypotenusan i den rätvinkliga triangeln $AD'E$ med kateter $ED' = 8$ och $AE = 4 + 2$. (Därför att $BE = CD' = CD = 2$)
$(AD')^2 = 8^2 + 6^2 = 10^2$

13 A 9

Dra kvadratens andra diagonal.
Område A' är kongruent med A och C' är kongruent med C. Alltså är den sammanlagda arean av de skuggade områdena $A + B + C$ lika med arean av $A' + B + C'$ som bildar en rätvinklig triangel som är en fjärdedel av kvadraten.
$A + B + C = 6 \cdot 6/4 = 9$



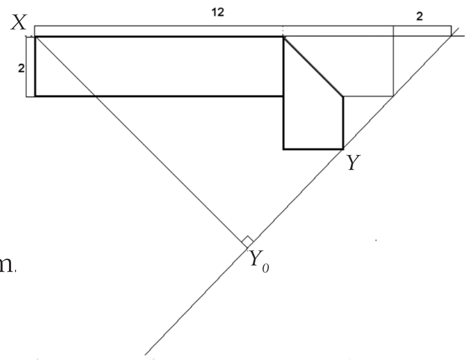
14	A	$\frac{p+3q}{4}$	*Metod* 1: Vart och ett av de fem svarsalternativen uttrycker ett medelvärde av 2, 3 eller 4 tal som är p eller q. Eftersom $q > p$ och andelen q är störst i A (3 av 4), så är också värdet i A (medelvärde av p, q, q och q) störst. *Metod* 2: Låt $d = q - p$, $d > 0$ eftersom $q > p$. De fem svarsalternativen kan skrivas: $p + d \cdot 3/4$ $p + d \cdot 2/3$ $p + d \cdot 1/2$ $p + d \cdot 1/3$ $p + d \cdot 1/4$ $p + d \cdot 3/4$ är störst av dem eftersom 3/4 är störst av de fem talen i bråkform: 3/4, 2/3, 1/2, 1/3 och 1/4.
15	E	606	Det finns 900 tresiffriga tal: alla från 100 till 999. Vi räknar hur många av dem som *inte* innehåller någon av siffrorna 1, 2 eller 3. Ett sådant tal kan ha sex möjliga hundratalssiffror: 4 till 9, sju möjliga tiotalssiffror: 0 och 4 till 9 och sju möjliga tiotalssiffror: 0 och 4 till 9 Det finns $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ sådana tal. Övriga tresiffriga tal innehåller minst en av siffrorna 1, 2 eller 3. De är $900 - 294 = 606$ stycken.
16	B	18	Eftersom pq och rs är heltal så är decimaldelen av deras medelvärde ,00 eller ,50. Om $rs = 00$ så är $(pq + 0)/2 = pq{,}00$, alltså $pq = 2 \cdot pq$ alltså $pq = 0$ och $\overline{pq, rs} = 00{,}00$ vilket motsäger villkoret att det skulle vara ett positivt tal. rs måste vara 50. $(pq + 50)/2 = pq{,}50$ $pq + 50 = 2 \cdot pq + 1$ $pq = 49$ $p + q + r + s = 4 + 9 + 5 + 0 = 18.$
17	D	-26	Vi betecknar talen på kortet i ruta nr i: det minsta med m_i och det största med s_i där i är 1 till 6. Oavsett i vilken ordning André lägger sina kort för att få så litet resultat som möjligt måste han vända korten såhär: I de tre rutorna till vänster ($i = 1, 2$ eller 3) lägger han korten med m_i uppåt. I de tre till höger ($i = 4, 5$ eller 6) med s_i uppåt. När han gör på det sätt blir resultatet $m_1 + m_2 + m_3 - s_4 - s_5 - s_6$ vilket är samma som $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 - (m_4 + s_4) - (m_5 + s_5) - (m_6 + s_6)$ Den första delen: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$ är oberoende av ordningen i vilken han lägger korten. Den andra delen: $-(m_4 + s_4) - (m_5 + s_5) - (m_6 + s_6)$ blir minst om han lägger korten med största summor $r + s$ i rutorna 4, 5 och 6. Talparen: (5, 12), (3, 11), (0, 16), (7, 8), (4, 14) och (9, 10) har summorna: 17, 14, 16, 15, 18 och 19 respektive. Så André kan ändra ordningen på korten till t ex den här: (3,11), (0, 16), (7, 8), (5,12), (4, 14), (9, 10) och när han vänder korten på bästa sätt får han uttrycket 3 + 0 + 7 – 12 – 14 –10= -26

18 E $a+b+c=0$

Om både $ax^2 + bx + c = 0$ och $bx^2 + ax + c = 0$ för ett värde av x, så måste också differensen av polynomen till vänster om "=" vara 0
$(ax^2 + bx + c) - (bx^2 + ax + c) = 0 - 0$
$ax^2 - bx^2 + bx - ax + c - c = 0$
$(a - b)(x^2 - x) = 0$
$(a - b)(x - 1)\,x = 0$
alltså $a - b = 0$ eller $x - 1 = 0$ eller $x = 0$
men $a - b \neq 0$ eftersom a och b är olika tal
x kan inte vara 0 eftersom $a \cdot 02 + b \cdot 0 + c = c \neq 0$
Återstår $x - 1 = 0$ alltså $x = 1$ är den gemensamma roten.
$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \Leftrightarrow b \cdot 1^2 + a \cdot 1 + c = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$
Villkoret i E: måste gälla och är tillräckligt.
De övriga kan ibland gälla men är inte nödvändiga.
Anmärkning: För ett godtycklig polynom $p(x)$ är $p(1)$ lika med summan av dess koefficienter. Se även problem nr 21.

19 B $7\sqrt{2}$

Y ligger någonstans på en linje som har 45° vinklar mot remsans kanter. Punkten närmast X på den linjen är Y_0 som ligger på linjen genom X som är vinkelrät mot den förra. XY_0 är en katet i en likbent rätvinklig triangel med basen 14 cm. Katetens längd är $14\text{ cm}/\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ cm.



20 D 11

För en dodekaedertärning är sannolikheten 1/12 att den visar tolv och 11/12 att den inte gör det.
Om Rasika rullar n tärningar så är sannolikheten att ingen av dem visar tolv $(11/12)^n = 11^n/12^n$.
Sannolikheten att en bestämd tärning visar tolv men ingen av de övriga gör det är $1/12 \cdot (11/12)^{n-1} = 11^{n-1}/12^n$.
Sannolikheten att exakt en tärning visar tolv dvs att en av dessa n tärningar visar tolv men ingen av de övriga är $n \cdot 11^{n-1}/12n$.
Påståendet att det är lika sannolikt att precis en av dem ska visa tolv som att ingen ska göra det ger ekvationen
$n \cdot 11^{n-1}/12n = 11^n/12^n$ vilket i sin tur ger $n = 11$.

21 A -40

Summan av ett polynoms $p(x)$ koefficienter är alltid lika med $p(1)$.
$p(1) = p(0 + 1) = 0^2 - 0 + 2p(6) = 2p(6)$
För att beräkna $p(6)$ låter vi x vara 5.
$p(6) = p(5 + 1) = 5^2 - 5 + 2p(6)$
$0 = 20 + p(6)$
$p(6) = -20$
Summan av polynomets koefficienter är $p(1) = 2p(6) = 2 \cdot (-20) = -40$
Anmärkning: Egentligen har vi bara visat att: Om det finns ett polynom som uppfyller ekvationen så summan av dess koefficienter är -40. Det finns faktiskt exakt en $R \rightarrow R$ funktion som gör det och det är polynomfunktionen: $p(x) = x^2 - 3x - 38$.

22 A $z = \dfrac{y}{1+x}$

$2^x = 3$ ger $2^{1+x} = 2^1 \cdot 2^x = 2 \cdot 3 = 6$
$6^z = 7$ alltså $(2^{1+x})^z = 2^{(1+x) \cdot z} = 7 = 2^y$
alltså $(1+x) \cdot z = y$ och $z = y/(1+x)$

23 E 42

Om a är ett nollställe till f, $f(a) = 0$, låt $x = 20 - a$. Då är $a = 20 - x$ och $f(20 - x) = 0$.
Men $f(20 - x) = f(22 + x)$ alltså även $b = 22 + x = 22 + (20 - a) = 42 - a$ är ett nollställe till f.
Om $a \neq b$ så är a och b funktionens två nollställen och summan $a + b =$
$= a + (42 - a) = 42$.
Upprepar vi samma operation på b som vi nu har gjort på a så hittar vi inte ett tredje nollställe utan hamnar tillbaka på a.
Om $a = b$ så är $2 \cdot a = a + a = a + b = a + (42 - a) = 42$, alltså $a = 21$.
Mängden av alla nollställen till en funktion som uppfyller ekvationen består av ett antal (kanske inga, kanske oändligt många) par av tal där varje par har summan 42 och dessutom eventuellt talet 21.
Funktionen f har 2 nollställen, alltså måste det vara ett par med summan 42.

24 B 3

$0^0 = 1$, $1^1 = 1$, $2^2 = 4$, $3^3 = 27$, $4^4 = 256$, $5^5 = 3125$ och 6^6 är mer än 9999.
Alltså, talet $\overline{abcd}$ måste vara summan av 4 (inte nödvändigtvis olika) av talen 1, 4, 27, 256, 3125 och den får bestå av fyra siffror bland 0, 1, 2, 3, 4 och 5.
För att ge en fyrsiffrig summa måste minst en av dessa termer vara 3125.
Visserligen är $256 + 256 + 256 + 256$ fyrsiffrigt men summan blir inte 4444.
Fler än en term kan inte vara 3125 för då skulle summans första siffra bli större än 5 eller så skulle summan bli femsiffrig.
Alltså, talet $\overline{abcd}$ måste ligga emellan
$3125 + 1 + 1 + 1 = 3128$ och $3125 + 256 + 256 + 256 = 3893$.
Tusentalssiffran a måste vara 3.
Det finns faktiskt ett och bara ett sådant tal, nämligen 3435.