Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2024, facit och kommentarer

Här följer ett facit som du kan använda för att rätta årets Kängurutävling. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru. Det finns också bifogat i det mail du fått om tävlingen. När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 30 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Många efterfrågar en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med

Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Nominera till Mikael Passares stipendium

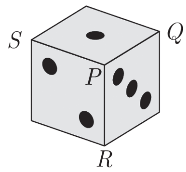
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 1000 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Nomineringen ska innehålla *elevens namn*, *skola*, *årskurs*, *tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond. Nomineringsformuläret måste fyllas i senast *30 april*.

Facit och kommentarer – Junior 2024

1 A 0,01 — $(2 \cdot 0{,}24) / (20 \cdot 2{,}4) = 0{,}48 / 48 = 0{,}01$

2 D 11 — Summan vid hörnet Q är $1 + 3 + 5 = 9$, summan vid R är $2 + 3 + 6 = 11$ och vid S är den $1 + 2 + 4 = 7$.
Högsta summan är alltså 11.



3 C 36 — Mayas vänsterfot rör vid marken i tre av fyra steg. Därför blir totala antalet gånger $\frac{3}{4} \cdot 48 = 36$ gånger.

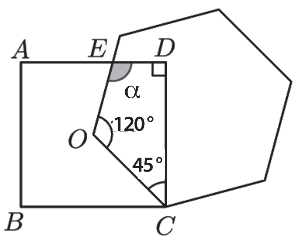
4 B 15 cm — Den kortaste sträckan är
3 cm + 2 · (1 cm + 2 cm + 1 cm + 1 cm) + 2 cm = 15cm.

5 B 1 : 3 — Figuren består av fyra vita cirklar, var och en inskriven i en fjärdedel av den stora kvadraten. I varje sådan fjärdedel är en del svart och tre lika stora delar grå. Alltså blir förhållandet 1 : 3.

6 D 13 — John behöver 1 kub på toppen och 4 kuber för att dölja den översta kuben. I nästa lager behöver han 8 kuber för att dölja detta lager. Totalt blir det 13 kuber.

7 E 24 — Största möjliga siffersumman är $9 + 9 + 9 = 27$. Om siffersumman ska vara en multipel av 6 så måste talet vara ett jämnt tal, samt ha en siffersumma som är en multipel av 3. Största jämna siffran är 8, då måste talet också börja med en åtta, och mittentalet kan som störst då vara 8 så att även siffersumman är delbar med 3.
Talet med alla egenskaper som finns i problemet blir alltså 888.

8 A 105° — Vinkeln vid D är 90°, vid O är den 120° (hörn i en regelbunden hexagon) samt vid C är den 45° (vinkel vid en diagonal i en kvadrat). Då måste $\alpha = 360° - (45° + 90° + 120°) = 105°$.



9 E 91 m^2 — Omkretsen är 40 = 2 · (längd + bredd), dvs längd + bredd = 20. Både längd och bredd ska ha längder som är primtal.
Primtal under 20 är 2, 3, 5, 7, 11,13,17,19. Två av dessa ska tillsammans bli 20 och det finns två alternativ, (3, 17) och (7, 13).
Den största arean fås av $7 \cdot 13 = 91$.

10 B $\sqrt{3}$ cm — Höjden i triangeln är $2 \cdot \sqrt{3}$ då basen är 4 i en liksidig triangel.
Arean av triangeln (som är en tredjedel av hela rektangeln) är $4 \cdot (2 \cdot \sqrt{3}) / 2 = 4 \cdot \sqrt{3}$. Hela rektangelns area är då $12 \cdot \sqrt{3}$. Den långa sidan i rektangeln kan vi räkna ut nu eftersom vi har hela arean och kortsidan är 4. Den blir $3 \cdot \sqrt{3}$.
Längden med ett frågetecken blir då $3 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

11 A 24

Bokstäverna A, B, C och D kan ordnas fritt i de fyra rutorna i den övre raden. Det finns fyra alternativ för den första bokstaven, sedan tre alternativ för den andra rutan och två för den tredje rutan. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, vilket ger 24 alternativ. Efter att ha fyllt den övre raden tittar vi på den andra rutan i den undre raden. Här kan inte bokstaven i den första eller tredje positionen i den övre raden placeras. Det måste alltså vara samma bokstav som i fjärde positionen. Därför är den undre raden unikt definierad av den övre raden.
Det finns alltså 24 alternativ.

12 D 7 : 6

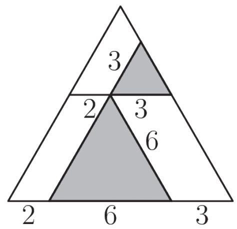
Vi kallar de synliga områdenas area i fig 1 för S (svart), V (vit) [samt G (grå) men det använder vi inte].
Det synligt svarta området i fig 1 är $S = 7 \cdot V$ enligt problemtexten. I figur 2 är det svarta områdets area $S = 7 \cdot V - V = 6 \cdot V$.
Förhållandet är $7V / 6V$, alltså 7 : 6.

13 B 44

Barnbarnet fyller två år om två år. Låt Mary ha en ålder av $2m$ och hennes dotters ålder vara $2d$. Åldrarnas produkt måste vara $2 \cdot 2d \cdot 2m$. Vi jämför detta med primtalsfaktoriseringen för $2024 = 2 \times (2 \cdot 11) \times (2 \cdot 23)$.
Så Mary kommer att vara 46 om två år, vilket gör att hon nu blir 44.

14 C 33 m

Förläng sträckorna genom P enligt bilden. Vi får då två liksidiga trianglar och tre parallellogrammer. Basen i den liksidiga originaltriangeln är 2 m + 3 m + 6 m = 11 m. Omkretsen är $3 \cdot 11$ m = 33 m.



15 C 4

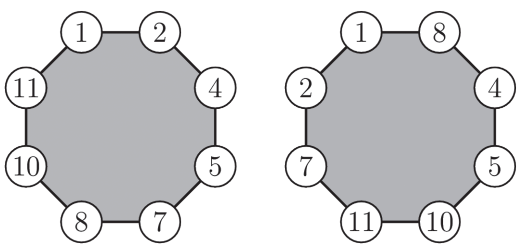
Det kan inte finnas 4 eller fler godisbitar i någon av skålarna. Det skulle direkt leda till en motsägelse eftersom denna skål samtidigt måste innehålla ett annat antal godis. Det finns alltså bara skålar med 0, 1, 2 eller 3 godisar i. De fyra påståendena ger tillsammans att det sammanlagt i de fyra skålarna finns lika många godisbitar som det finns skålar med 0 upp till 3 godisar i. Det totala antalet godisar är alltså lika med antalet skålar.
Det finns två möjliga distributioner i fyra skålar: 2, 1, 0, 1 eller 0, 2, 0, 2 .

16 D 8

Det finns $(n-2)^2$ små kuber med en enda synlig målad yta på var och en av ytorna på den stora kuben; så det totala antalet är $6(n-2)^2$.
Det finns $(n-2)^3$ kuber utan någon yttre yta på den stora kuben. Vi har alltså $6(n-2)^2 = (n-2)^3$ och $n > 2$, vilket leder till att $n = 8$.

17 E 3, 6, 9, 12

Ett tal som är delbart med tre måste ha grannar som också är delbara med tre, men det finns bara fyra sådana kort.
Det finns 4 tal som ger resten 1 vid division med 3 (korten 1, 4, 7, 10) och 4 som ger resten 2 vid division med 3 (2, 5, 8, 11). Man placerar godtyckligt den ena sorten i varannan ring och den andra sorten i övriga ringar.
Kvar är korten med talen 3, 6, 9, 12 på. Vi visar två exempel.

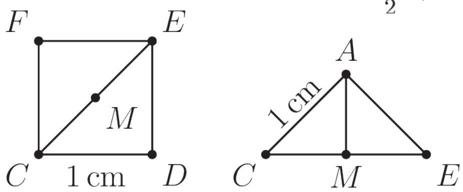


18 A $1+\sqrt{2}$ cm

De fyra hörnen som är förenade i A bildar en kvadrat $CDEF$ med sidan 1 cm. Pythagoras sats ger då att dess diagonal CE är $\sqrt{2}$ cm lång. Låt M vara mittpunkten på diagonalen CE. Då är AMC en rätvinklig triangel med hypotenusa AC som är 1 cm och benet CM som är $\sqrt{2}/2$ cm. Återigen, med hjälp av Pythagoras sats, får vi

$|AM|^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ så att $|AM| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Avståndet mellan A *och* B blir $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$



19 C 3

Formen på primtal 47 visar att $47 \leq n < 53$ (annars skulle vi se ett till primtal, 53). Eftersom 13^4 är en del av faktoriseringen ingår 4 multiplar av 13 i n! Dessa är 13, 26, 39 och 52, så $n = 52$. Det finns tre multiplar av 17 före 52 (dessa är 17, 34 och 51).
Därför är exponenten för 17 i denna faktorisering 3.

20 E 2024 är delbart med 11

Uttalandet (B) kan endast göras av en person som ljuger den dagen. Om man tittar på påståendena (C) och (D), kan båda inte vara sanna. Därför har vi minst två påståenden som är osanningar. Det betyder att Carl ljuger idag, så han kunde inte göra uttalande (E).

21 B 12

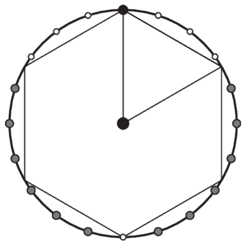
Summan av siffrorna i ett tal minskar endast om talet har 9 som sista siffra, så att nästa tal slutar på 0, och 1 läggs till dess näst sista siffra. I så fall minskar summan av siffrorna i talet $N + 1$ med 8, jämfört med summan av talet N. Samtidigt är den tre gånger mindre än summan av siffrorna i N. Betecknar vi summan av siffrorna i N med x, har vi $x = 3(x - 8) \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12$.
Observera att om talet har fler än en 9:a, kommer dess siffersumma att vara minst 19, vilket redan är större än 12. Talet 39 har egenskapen som beskrivs ovan, $3 + 9 = 12$.

22 D 90

Eftersom Ann har kastat varje nummer minst en gång så vi kan med säkerhet säga att 6 av kasten har summan $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Då koncentrerar vi oss på de återstående 18 kasten.
Det kom upp fler 1:or än alla andra siffror. Antalet rullade 6:or bör då vara en mindre än antalet 1:or, då summan blev den allra största.
Om vi har 9 1:or, då fick Ann 8st 6:or. Lägger vi till en 5:a får vi $9 + 48 + 5 = 62$.
Om vi har 8 1:or och 7 6:or, lägger till 3 5:or får vi $8 + 42 + 15 = 65$.
Om vi har 7 1:or och 6 6:or, lägger till 5 5:or får vi $7 + 36 + 25 = 68$.
Om vi har 6 1:or och 5 6:or, 5 5:or och adderar 2st 4:or får vi $6 + 30 + 25 + 8 = 69$.
Ytterligare minskning av 1:or ökar inte den högsta möjliga summan.
Detta leder till en maxsumma på 90.

23 C 120

Var och en av de 20 punkterna är anslutna till de 19 andra punkterna på omkretsen och bildar 19 kordor. Ett av dessa 19 kordor är exakt lika med diametern, vilket ger 18 kordor att ta hänsyn till.



För att en korda ska vara större än radien måste dess centrala vinkel vara större än 60 °.
Eftersom de 20 punkterna bildar en regelbunden 20-hörning, är den centrala vinkeln på kordan som förbinder två intilliggande punkter 360/20 = 18 °. Därför behöver vi minst 4 centrala vinklar ($3 \cdot 18° = 54° < 60°$).
Det vill säga, 3 par kordor från en punkt till dess tre närmaste punkter längs omkretsen (på vardera sidan) kommer att vara kortare än radien. Detta lämnar oss med 6 par kordor, eller 12 kordor per punkt. Eftersom varje korda räknas två gånger (en gång per slutpunkt) är det totala antalet kordor som uppfyller villkoret $(20 \cdot 12) / 2 = 120$.

24 B 6

$A_{\Delta OPQ} = n^2 - mn - 1/2(n-m)^2 = 1/2(n^2 - m^2) = 2024$.
Det ger att $(n + m)(n - m) = 4048$.
Eftersom m och n båda är heltal ger det att $n + m$ och $n - m$ båda kommer vara antingen jämna eller udda.
Det finns 6 sätt som $4048 = 2^4 \cdot 11 \cdot 23$ kan vara produkten av två jämna tal:
$2 \cdot 2024$,
$2^2 \cdot 1012$,
$2^3 \cdot 506$,
$(2 \cdot 11) \cdot (2^3 \cdot 23)$,
$(2^2 \cdot 11) \cdot (2^2 \cdot 23)$ och
$(2^3 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 23)$.
Det finns då även 6 möjliga par av tal (n, m):
(1013, 1011), (508, 504), (257, 249), (103, 81), (68, 24), (67, 21)