



Arbeta vidare med Ecolier

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar på frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det? Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru

Nedan ger vi förslag på hur man kan arbeta vidare med problem i Ecolier 2024, efter tävlingen. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.



1. 40 rutor

Se till att alla förstår termerna rad och kolumn.

- ... Variera antalet färglagda kolumner och låt eleverna upptäcka att bilden illustrerar multiplikation.
- ... Gör en koppling till distributiva lagen: $2 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = (2 + 6) \cdot 5$ och till den kommutativa lagen: $5 \cdot 8 = 8 \cdot 5$

2. Pilar i rutor

Låt eleverna beskriva med ord hur Joe ska hoppa, med hjälp av begreppen vänster och höger, uppåt och neråt.

- ... Flytta er sedan in i rutorna och tänk att det är ni som ska följa pilarna. Hur ska ni då beskriva vägen? De första tre pilarna åt höger blir då tre hopp framåt. Detta kan vara en utmaning för barnen så rita gärna upp en ruta på skolgården och genomför det konkret.
- ... Gör egna rutor och variera pilarna i rutorna, både riktning och antal.
- ... Kanske har någon låtit Joe starta utanför och tolkat bilden så att han ska hoppa över de tre första rutorna. Spelar det någon roll för lösningen?

Tidigare problem: Ecolier 2022:1, 2013:7, 2011:3, Milou 2022:11, 2014:5 ; Benjamin 2007:6

3. Leksakshyllan

Problemet handlar om hur talet 7 kan delas upp. Låt eleverna undersöka alla möjligheter att uttrycka 7 med addition.

- ... Vilka möjligheter finns om vi accepterar alla räknesätt?
- ... Gör likadant med andra tal.
- ... Hur förändras lösningen om Lina kan handla flera likadana föremål? Om hon kan köpa fler eller färre föremål?

Tidigare problem: Ecolier 2020: 17; 2019:15, 2017:21, 2015:5; 2014:16, Benjamin 2018:17

4. Delad kvadrat

Undersök alternativen konkret, klipp ur och lägg bitarna över varandra.

- Finns det andra sätt att dela kvadraten i två identiska bitar?
- Hur stor är hela kvadraten? Hur stor är då varje bit?
- ... Titta på alternativ B, vad är det som är speciellt med den?
 - Hur kan vi dela kvadraten i två lika stora bitar, om de inte behöver ha samma form?

Gå sen vidare till problem 6.

Liknande problem: Ecolier 2023:4, Benjamin 2023:2



6. Vilken bit är störst?

Diskutera begreppet area.

- Vilken enhet mäter vi med här?
- Vilka andra enheter känner ni till för area?

Tidigare problem: Benjamin 2023:12

7. Klossbygge

Bygg upp konstruktionen och kontrollera att lösningen stämmer.

- ... Låt eleverna beskriva konstruktionen med ord.
- ... Arbeta i par. Den ena gör ett bygge utan att visa den andre och beskriver sedan med ord så att kamraten med hjälp av instruktionerna får försöka bygga ett likadant.

Tidigare problem: Klossproblem av olika slag finns nästan alltid med i flera klasser, så det finns en stor mängd gamla problem av olika svårighet.

8. Fotboll i ring

Här handlar det om addition med 3, men med 11 som högsta tal, det vill säga vi arbetar i modulo 11.

- ... Visa eleverna och jämför med hur vi räknar med klockan (som är modulo 12 eller 24).
Två timmar efter klockan 11 är klockan 1, det vill säga $11 + 2 = 1$!
- ... Gör fler exempel med klockan, både med 12 och 24.

Tidigare problem: Ecolier E2023:16, 2015:4, Benjamin 2023:9

9. Bilden på väggen

Undersök bilden gemensamt.

- Hur många plattor har hela väggen? Hur kan vi enkelt beräkna det?
- Hur många rutor finns bakom bilden? Det finns olika sätt att komma fram till det, vilka?
- Hur ser det dolda området bakom bilden ut?
- ... Jämför olika sätt att resonera fram till problemets lösning. Diskutera vad som är lika. Vilka förutsättningar är avgörande för lösningen? Hur skulle lösningen ändras om bilden bara hade täckt 5 rader?
- ... Vilken area har väggen? Bilden?
- ... Bestäm olika mått på de kvadratiska plattorna och låt eleverna bestämma arean av bilden och väggen.

Tidigare problem: Ecolier 2022:13; 2012:3



10. Maja räknar

Problemet kan uppfattas som enkelt, men berör positionssystemet och talraden så det är viktigt att förstå.

- ... Gå igenom lösningen gemensamt. Gör eleverna uppmärksamma på att det endast är entalssiffran som ändras här.
- ... Gör fler liknande problem och variera vilka siffror som suddas bort. Ställ frågor av följande slag:
 - Hur ska vi välja tal om vi vill att tiotalssiffran ska ändras?
 - Hundratalssiffran?
 - Tusentalssiffran?

11. Talet i mittcirkeln

I facit finns en generell lösning på detta problem. Har någon elev tänkt så?

Ett annat resonemang:

Det tal som står i mittcirkeln måste vara sådant att de övriga fyra går att sätta samman i två par som vardera ger samma summa.

Det kan göras på två sätt: $4 + 2$ och $5 + 1$ är båda 6 (då blir sexan kvar) och $5 + 2$ och $6 + 1$ är båda 7 (då blir fyran kvar).

Sen ska denna summa adderas med det femte talet och ge 11. Då har vi bara en möjlighet, $7 + 4 = 11$, eftersom $6 + 6 = 12$

Tidigare problem: Ecolier 2018:23

12. Fruktskålen

Gå igenom lösningen gemensamt. Både den stegvisa och att Bill är den enda som tycker om äpple (och därför får det). Uppmärksamma eleverna på betydelsen av informationen att alla får en frukt de tycker om och att ingen får samma frukt som någon annan.

Ett motsvarande problem finns också på Cadet i år.

Tidigare problem: Ecolier 2022:11, Benjamin 2020:21

13. Saknade siffror

Låt eleverna hitta alla tal som kan stå på lapparna.

- ... Variera summan och låt eleverna finna de saknade siffrorna.

Tidigare problem: Benjamin 2019:12

14. Adas torn

Genomför lösningen konkret.

- ... Diskutera gemensamt hur den tredje brickan kan bli den andra. Jämför med hur man (förhoppningsvis) kommer längre fram i en kö.



Tidigare problem: Ecolier 2022:9

15. Sju kort i fyra ringar

Gå noga igenom hur bilden ska tolkas.

- ... Lös problemet tillsammans genom att resonera. Se på varje cirkel och kontrollera att summan är 10.
- ... Uppmärksamma eleverna på likheten med problem 11 och låt dem pröva att lösa detta med samma typ av generellt resonemang.
- ... Låt eleverna undersöka om det går att lägga korten på andra sätt och ändå ha kvar 10 som summa i alla cirklar.
- ... Låt eleverna undersöka vad som händer om vi har två överlappande cirklar och tre kort med olika tal och sedan argumentera för varför problemet då inte går att lösa.

Konstruera liknande cirkelkedjor, variera antalet cirklar och kort, och ändra tal på korten och summan.

16. Pingvinernas fiskar

Hur många fiskar har de fått tillsammans?

- ... Vilka andra möjliga fördelningar hade varit möjliga efter 6 dagar?
- ... Undersök även andra antal fångstdagar och också andra fördelningar mellan fiskarna. Låt eleverna upptäcka att hur vi än fördelar kommer summan att vara en multipel av 9.
- ... I facit finns också förslag på en annan lösningsmetod:
Vi kan också börja med att ta reda på hur många dagar det är.
Det måste vara fler än 5, eftersom $5 \cdot 5 = 25$ och färre än 7, eftersom $7 \cdot 4 = 28$.
Diskutera det sättet att resonera med eleverna. Hade någon tänkt så?

Liknande problem: På årets Cadet är problem nr 14 ett liknande problem.
Ecolier 2023:15, Benjamin 2019:13

17. Lukas larv

Gå igenom hur man systematiskt kan undersöka problemet. Uppmärksamma barnen på att bitarna har olika form och att därför passar inte alla i varandra:

- Vilka bitar kan sitta efter huvudet?
- Vilka bitar kan sitta närmast före bakkdelen?
- Hur kan de tre mittbitarna kombineras?

Diskutera er sedan fram till alla möjligheter med 1 mittbit, alla möjligheter med 2 mittbitar och alla möjligheter med 3 mittbitar.

- ... Anteckna allteftersom så att strukturen blir tydlig. Rita gärna upp ett träd-diagram.
- ... Hur hade lösningen ändrats om alla mittbitarna hade samma form som den tredje biten, biten med körsbären?

På Benjamin i år är problem 23 ett motsvarande men något svårare problem. Använd gärna det och låt eleverna använda den strategi ni arbetat med här.

Tidigare problem: Ecolier 2023:10, 2023:20, Benjamin 2021:5



18. Golvplattor

Problemet kan användas både för att undersöka olika relationer mellan tal och för att diskutera egenskaper hos geometriska former.

- Hur vet vi att alla sidor på kvadraten är lika långa?
- Vilka egenskaper har en rektangel?
- Vilka egenskaper har en kvadrat?
- Varför är en kvadrat också en rektangel?

Det står inte uttryckligen att den grå biten är en rektangel, men hur kan vi ändå sluta oss till det?

- ... Vad händer med kvadratens mått om vi gör den grå rektangeln 1 cm längre eller 1 cm bredare?
- ... Låt eleverna ändra måtten på den grå biten. Kan den ha vilka mått som helst?

19. Klossar på våg

Problemet kan lösas på flera sätt, två lösningar finns i facit. Ett tredje sätt att lösa problemet:

Om vi jämför den första och den andra vågen se vi att rektangeln väger 100 g mer än triangeln. Det betyder att triangeln väger 70 g och rektangeln väger 170 g. Då får vi fram vikten på cirkeln, 30 g.

- ... Låt eleverna lösa problemet och se hur många olika metoder som klassen kommer på. Komplettera eventuellt med egna. Jämför sedan metoderna och diskutera för- och nackdelar.
- ... Liknande problem har funnits i Kängurun många gånger, i olika svårighetsgrad. Arbeta med flera av dem och se vilken lösningsmetod som fungerar på dem. Finns det någon metod som verkar vara mer användbar?

Tidigare problem: Ecolier 2023:12, 2019:12, 2018:20, Benjamin 2020:20, 2019:20

20. Olikfärgade västar och ryggsäckar

Genomför lösningen konkret.

- Hur många barn har gul väst? Grön väst?
- Hur många har röd ryggsäck?
- ... Ytterligare ett sätt att resonera är att det sökta talet ska vara jämnt (varannat barn har gul väst) och delbart med tre (vart tredje barn har en orange ryggsäck). Det första talet i talraden som uppfyller dessa krav är 6. 6 gånger något ska bli 60, alltså $6n = 60$, det sökta talet är 10.



Gör ett exempel med två färger på ryggsäck men samma färg på västen, med tre färger på västen och samma färg på ryggsäck et cetera.

... Om vi ändrar problemet och säger att 30 barn har gul reflexväst och 30 barn har grön reflexväst och 20 av dem har röd ryggsäck, 20 har brun ryggsäck och 20 har brun ryggsäck, blir det säkert då också 10 barn som har gul väst och orange ryggsäck?

Diskutera betydelsen av hur fördelningen är spridd.

Tidigare problem: Ecolier 2018:16

21. Dolda siffror

Resonera gemensamt fram lösningen:

- Kvadraten måste vara 1. Hur vet vi det?
- Cirkeln måste vara ett jämnt tal. Hur vet vi det?
- Triangeln måste vara ett udda tal. Hur vet vi det?
- Triangeln måste vara större än 5. Hur vet vi det?

Ett annat resonemang:

Rad 1: Bakom triangeln kan det högsta talet vara 9, så summan kan inte vara större än 18.
Bakom kvadraten står det alltså 1.

Bakom cirkeln står summan av två trianglar minus 10.

Rad 2: Lägg till en triangel till "2 trianglar minus 10" så får vi 3 trianglar minus 10.

Det är samma värde som bakom kvadraten, det vill säga 11.

Alltså är 3 trianglar lika med 21, och bakom triangel står 7.

Då får vi $7 + 7 = 17$ och $4 + 7 = 11$. Så $7 \cdot 4 \cdot 1 = 28$

Den här typen av problem finns ofta i Kängurun. Använd några tidigare och gör resonemanget tydligt. Låt också eleverna konstruera egna, det hjälper dem att upptäcka egenskaper hos talen och förstå hur beräkningar påverkar.

Tidigare problem: Ecolier 2022:24, 2015: 3; Benjamin 2023:10

22. Bikupan

Går igenom problemet gemensamt. Hur ska det tolkas?

- Vad betyder talen i rutorna?

Betrakta en cell i taget, vad innebär det att talet här är till exempel 2?

- Vilken strategi ska vi välja? Var i bilden kan det vara klokt att börja?

Tidigare problem: Ecolier 2017:22



23. En kub med röda och vita klossar

Ser alla hur kuben är konstruerad? Bygg konkret en kub av åtta småkuber så att alla ser hur den stora kuben är konstruerad.

- ... Gå igenom bilden av den stora kuben och diskutera hur varje liten kub kan se ut.
- ... Eftersom vi är ute efter att finna minsta möjliga antal så kan vi välja hur tre av bitarna ska se ut – vilka tre är det som vi inte vet säkert? Hur ska vi göra dem?

Tidigare problem: Ecolier 2021:1, 2015: 11; Benjamin 2021:1

24. Kakfatet

Detta är ett svårt och komplext problem; det är många saker att beakta. Gå gärna igenom lösningen med hjälp av urklippta papperskakor. Låt eleverna pröva sig fram och se vad som är möjligt.

Lösningen ligger i att komma fram till vilken ordning pojkarna ska gå i för att fördelningen ska bli riktig, det vill säga den som går först måste ta 3, 6 eller 7 kakor.

- Kan Olle ha varit först? Varför inte?
- Om Lasse är först och tar alla vita kakor, tar han 7. Vad återstår då? Vem skulle kunna få 6 eller 3 hjärtan (som Olle skulle få) eller 6 eller 3 stora kakor (som Bosse skulle få)?

Så, Bosse måste vara först.

- Vem kommer sen, och varför?

Tidigare problem: Ecolier 2022:17