



Arbeta vidare med Cadet

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det? Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare problem, lösningar och "att arbeta vidare med" finns på Kängurusidan på nätet, <https://ncm.gu.se/klassrum/kanguru/arbetsvidare>

Nedan har vi samlat några av problemen från Cadet 2024. Vi ger förslag på hur eleverna kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.



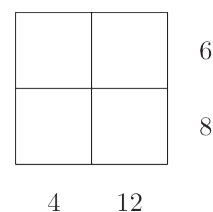
Taluppfattning

Varje år förekommer det problem som utgår från siffrorna i tävlingsåret. De enklaste involverar prioriteringsreglerna. Det första problemet i årets Junior är ett exempel. Andra är problem 1 i Cadet och problem 2 i Student, båda från 2018. Diskutera gärna dessa – kan eleverna göra egna varianter?

I de flesta tävlingsklasser i Kängurun finns problem där dolda eller saknade tal ska bestämmas. I Cadet 2024 finns två problem med saknade tal i en figur. Båda handlar om multiplikation. Problem 9 har tal i ett rutnät, där produkten av talen i rader och kolumner är givna. Problem 21 handlar om successiv multiplikation i en pyramid. Arbeta gärna med problemen vid samma tillfälle och ta upp likheter och skillnader.

Båda problemen går att variera på olika sätt. Låt gärna elever konstruera egna liknande uppgifter och byta med varandra.

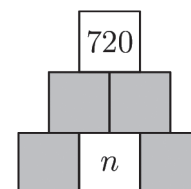
- 9 Fyra olika positiva heltal placeras i ett rutnät som sedan täcks över. Produkterna av talen i varje rad och i varje kolumn visas i bilden.



Vad är summan av de fyra talen?

Det är möjligt att begränsa vilka sorters tal eleverna ska använda, tex att ge intervall på tal som eleverna skall hålla sig inom, kräva att minst ett tal ska vara negativt eller ett tal i bråkform. Hur kan man konstruera kvadrater med fler än en lösning?

- 21 Donald vill skriva positiva heltal i de skuggade rutorna i pyramiden. Varje ruta måste innehålla produkten av talen i de två rutorna under den. Talet i den översta rutan ska vara 720.



Hur många olika värden kan heltalet n ta?

Problem 21 kan användas för att visa på exempel där det kan vara fördelaktigt att arbeta med primtalsfaktorisering. Kan eleverna hitta på egna exempel? Vad kommer "topptalet" i pyramiden att ha för egenskaper?

Variationer:

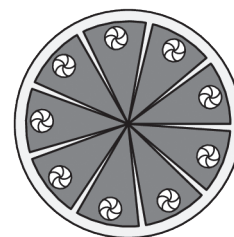
- Begränsa talområdet till positiva heltal större än 1. Vilka värden kan n anta om $n \neq 1$?
- Hur ser en lösning ut om alla heltal, både positiva och negativa är tillåtna?
- Är det möjligt att lösa en liknade uppgift med 4 våningar i pyramiden?

Det finns många tidigare Känguruproblem liknande dessa och med olika räknesätt. Leta gärna ibland de tidigare årgångarna. Ett par exempel är Benjamin 12, 2009 och Student 18, 2009.



Problem 10 är ursprungligen en geometrisk uppgift, men det kan utvidgas till att handla om taluppfattning och om primtalsfaktorisering. Se även problem 2 i årets Student.

- 10 Carina bakade en tårta och skar den i tio lika stora bitar. Hon åt en bit och flyttade resten av bitarna så att det blev exakt lika långt mellan varje bit.



Hur stor är vinkeln mellan två bitar?

Anta att man startar med en tårta med ett färre antal tårtbitar än 10 och konstruerar problemet på samma sätt, dvs att man tar bort en tårtbit och därefter beräknar vinkeln mellan två återstående tårtbitar. Hur många exempel kan man skapa så att vinkeln mellan två tårtbitar blir ett heltal?

Anta att man startar med 12 tårtbitar. Hur många tårtbitar behöver man äta för att vinkeln mellan två återstående tårtbitar skall bli ett heltal? Hur många tårtbitar behöver man äta ifall man startar med 15 tårtbitar?

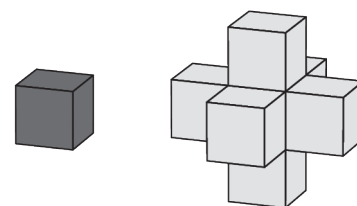
Hur kan man med hjälp av primtalsfaktorisering se att det blir så?

Geometri

De geometriska problemen i Kängurun kan vara en utmaning för eleverna. Utmaningarna kan vara av olika slag.

I problem 14 kan utmaningen vara att tänka sig figuren i tre dimensioner. Be eleverna bygga den utvecklade figuren med hjälp av multilink. Be dem titta på den färdiga figuren och räkna ut hur många kuber de behöver lägga till för att bygga den fjärde figuren utifrån samma villkor. En variant är problem 6 i årets Junior.

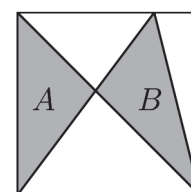
- 14 Johan har ett stort antal likadana kuber. Han har gjort figuren till höger genom att ta en enda kub och sedan fästa en annan kub på varje sida. Han vill göra en ännu större figur på samma sätt så att varje sida av hans första figur kommer att ha en kub fastklistrad på den.



Hur många extra kuber måste han då använda?

I andra problem kan utmaningen ligga i att upptäcka och utnyttja ett visst geometriskt samband. I uppgift 12 löser man uppgiften genom att hitta två trianglar med samma bas och höjd och utnyttja att de har samma area.

- 12 En kvadrat har en sidolängd på 10 m. Den är uppdelad med hjälp av tre räta linjesegment, vilket visas i bilden. En av de grå trianglarna har arean A , medan den andra har arean B .

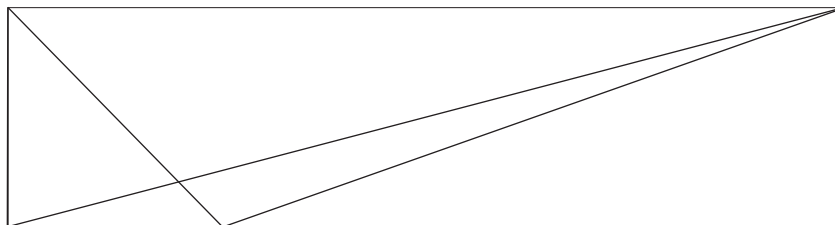


10 m

Hur stor är skillnaden $A - B$?



Diskutera med utgångspunkt i uppgift 12 hur man kan vara säker på att två trianglar med samma bas och höjd har samma area. Om man jämför två sådana trianglar med olika utseende är det inte alls uppenbart att de har samma area.



Låt eleverna motivera sina tankegångar och resonemang. Ta upp frågor som:
Vad är ett bevis? Hur mycket måste redovisas i ett bevis för att det ska vara övertygande.
Man säger ibland att ett matematiskt bevis utvecklas i tre steg.

1. Övertyga dig själv. För detta krävs sällan mer än några övertygande exempel.
2. Övertyga en "vän". Här krävs ofta lite mer argumentation.
3. Övertyga en hårdnackad "skeptiker". Här krävs vattentäta resonemang – ett bevis.

Vinkelproblem dyker alltid upp i Kängurutävlingen och detta år är inget undantag. Ofta brukar elever tycka de är krångliga, men de bygger ofta på vanliga vinkelsummor i några kända månghörningar som trianglar och fyrhörningar, samt halv- och helcirkel. Sätt gärna ihop några vinkelproblem att jobba med i stigande svårighetsgrad.

Börja med tex Cadet 12, 2021, sedan Junior 17, 2021 och Junior 8, 2024. Sekvensen kan avslutas med problem 23 från årets Cadet.

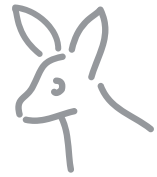
Problemlösning

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter.

Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans, och hjälp elever att sätta in dem i problemet, exempelvis med stödjande frågor. Hjälpt eleverna att strukturera informationen i texten. Gå också igenom eventuella oklarheter beträffande ord och meningsbyggnad. Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att "veta vad man ska göra". Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. Att lära sig hantera motgångar och misslyckanden är viktigt för att utveckla problemlösningens förmåga.

Två av årets problem handlar om att flera personer kommer med påståenden. Här gäller det att strukturera upp förutsättningarna och att göra antaganden, som start för resonemangen. Det betyder också att man kan bli tvungen att börja om med nya antaganden.

Problemen kan också fungera som utgångspunkt för att eleverna gör liknande problem.



- 18 Nio kort numrerade från 1 till 9 placerades med framsidan nedåt på ett bord. Fyra personer plockar slumpmässigt upp två kort var.
- Aleksa säger: Summan av mina tal är 6
 - Bart säger: Skillnaden mellan mina tal är 5
 - Clara säger: Produkten av mina tal är 18
 - Dennis säger: Det ena av mina tal är dubbelt så stort som det andra
- Alla fyra talar sanning. Vilket tal finns på det återstående kortet?

- 24 Kapten Flint har en skattkista med guld-, silver- och bronsmynt. Han bad fyra av sina pirater att skriva ner hur många mynt det finns av varje slag, men tyvärr förstördes en del av papperet. Bara en av piraterna berättade sanningen, de andra tre ljög om alla tre mynten. Kapten Flint vet att det finns totalt 30 mynt.

	Gold	Silver	Bronze
Tom		9	11
Al	7		12
Pit	10		10
Jim	9	10	

Vem av piraterna talade sanning?

Fler problem med påståenden att strukturera upp finns i årets Benjamin, nr 20 och Junior, nr 15 och 20.