



Arbeta vidare med BENJAMIN

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det? Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru.

Nedan har vi samlat några av problemen från Benjamin 2024. Vi ger förslag på hur eleverna kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.



Geometri

5 Hur ser det ut bakifrån?

Att kunna ta ett annat perspektiv är både en matematisk och en visuell förmåga. Här gäller det att reda ut vad som är framför eller bakom och vad som hamnar till höger respektive vänster när bygget ses från andra hållet. Gör liknande övningar rent praktiskt genom att ställa upp några lådor eller cylindrar och gå runt och titta på dem från olika håll. Gör det till en bilduppgift där hälften av eleverna får rita av från ett håll och de andra från andra hållet. De ska först rita hur de ser ut från sitt håll, sedan hur de tror att det ser ut från andra hållet. Därefter får de jämföra med den som satt mittemot.

Ett liknande problem finns i Benjamin 2018:2

6 Stapla lådor

Liksom problem nummer 5 kan det här problemet med fördel lösas praktiskt av elever som har svårt att föreställa sig hur det blir. Stapla lådor som på bilden och låt eleverna flytta dem en i taget. Utmana dem genom att fråga: Om man ska göra tre våningar - vilka lådor skulle kunna hamna överst? Om man ska göra fyra våningar - vilka lådor skulle kunna hamna överst? ... fem våningar ... sex våningar ...

Ett liknande problem finns i Ecolier 2022:3

9 & 12 Area

Båda uppgifterna kräver ett resonemang kring olika delareor och insikt om att en kvadrat har lika långa sidor. Låt eleverna skapa argument för sina slutsatser. Hur kan man veta i problem 9 att överlappet måste vara halva den ursprungliga rektangelns area? Hur kan man veta i problem 12 att halva den vänstra kvadraten är skuggad?

Liknande problem finns i Benjamin 2021:13, Cadet 2020:4

16 & 19 Area och omkrets

Här gäller det att undersöka vilken information som finns i figuren och texten, och sedan utnyttja den genom att minnas eller härleda formlerna för omkrets av de olika figurerna och steg för steg fundera på vad den information man har kan användas till. Om elever funnit problemet svårt är det ett bra tillfälle att träna på problemlösning.

- Vad vet vi?
- Hur kan vi använda informationen?
- Vad har vi fått reda på nu?
- Vad mer behöver vi ta reda på?

Liknande problem: Benjamin 2023:15, 2021:13, 2020:19, 2018:8, Cadet 2020:13, 2021:18



Tal och tals användning

7 Kombinera vikter

Problemet handlar om att hitta olika sätt att kombinera tal, här som vikter, för att få fram ett önskat tal. Att få vågen i balans innebär att vi får fram talet 445, som representeras av paketet. Det intuitiva är att lägga paketet i ena vågskålen och vikter i den andra. Då används bara addition. Om vikter läggs även i den andra skålen är det skillnaden som blir intressant, matematiskt representerat med subtraktion. Utöka uppgiften med nya frågor:

- På hur många olika sätt kan vi väga ett paket på 445 g med de vikter som finns?
- Skriv den likhet som bildas i varje fall, exempelvis
$$445 = 200 + 200 + 20 + 20 + 5$$
$$445 + 50 + 5 = 500$$
- Vilka paketvikter går att väga upp ...
 - ... om endast två vikter får användas?
 - ... om endast tre vikter får användas?
 - ... om exakt fyra vikter ska användas? osv

Ett annat problem med vågskålar finns i Benjamin 2018:18

14 Honung i bikupan

Gå igenom problemet gemensamt. Hur ska det tolkas? Vad betyder talen i rutorna? Betrakta en cell i taget, vad innebär talet i cellen?

Var i bilden kan det vara klokt att börja? Vilken strategi ska vi välja?

Lyssna på elevernas förslag och testa olika strategier. Man kan börja i ena kanten och arbeta systematiskt därifrån. En strategi är att börja med en cell som gränsar till precis så många som siffran visar eftersom man då vet att alla runt omkring måste vara fyllda. Här ska man i så fall börja med cellen med siffran 4 i som ligger i kanten. Markera som fyllda de celler som du ser måste innehålla honung. Markera som tomma de celler som du ser att de inte kan innehålla honung. Upprepa proceduren tills alla celler är markerade på endera sätt.

Liknande problem finns i årets Ecolier problem 22 men även i Student, problem 22.

21 Dela karameller

Liksom problem 14 om honungen i bikupan handlar den här uppgiften om att resonera logiskt utifrån information om tal. Diskutera i klassen vilken information som finns och vilka slutsatser som kan dras. Hjälps åt att tolka uppgiften genom att spalta upp den viktiga informationen och slutsatserna på ett överskådligt sätt. Exempelvis:

12 karameller över \Rightarrow antal barn är fler än 12 (diskutera varför)

Det minsta talet som är större än 12 är 13.

20 karameller i 13 påsar är $20 \cdot 13 = 260$

$260 + 12 = 272$

Hitta på liknande uppgifter med ett annat antal barn och ett annat antal överblivna karameller.

Liknande problem finns i Cadet 2022:15



22 Dela rep

Det här problemet förutsätter en förståelse för att tal på en tallinje dels är punkter på linjen (markeringar på repet), dels är mellanrum mellan dessa punkter (repbitar). Rita upp repet och diskutera var markeringarna ska vara för att det ska bli 12 bitar, så att alla inser att det till 12 mellanrum behövs 13 punkter, men att två av punkter är början och slutet av repet så det blir 11 markeringar däremellan.

Nästa utmaning är att inse att vissa markeringar i problemet kommer att sammanfalla eftersom 12 och 16 har gemensamma delare: 3 tolfte delar av repet kommer att vara en lika lång sträcka som 4 sextonde delar av repet.

Gör liknande uppgifter där repet delas i andra antal bitar men välj antal med gemensamma delare. En stödfråga kan vara: *hur många av markeringarna kommer att sammanfalla?*

Andra problem om delbarhet finns i Benjamin 2023:20 och 2022:11

Kombinatorik

På hur många sätt? Det är en grundläggande fråga inom kombinatorik. I årets Benjamin finns två problem av den typen. I båda fallen handlar det om att hitta sätt att vara systematisk så att man är säker på att man täckt in alla alternativ. Be eleverna berätta hur de har gjort och diskutera vilken strategi som är bäst för just detta problem.

Hur håller de reda på vilka kombinationer de testat?

Gör de en tabell?

Ritar de?

Är de systematiska?

13 Brailleskrift

I det här problemet får man undersöka alla möjliga utfall systematiskt. Klargör att siffrorna i ett tvåsiffrigt tal i vårt positionssystem har olika innebörd, så att exempelvis 12 och 21 är olika tal. Be om förslag på strategier. Bra frågor kan vara:

Vilka kombinationer av två siffror med exakt 5 prickar finns det?

Kan vi göra en tabell?

Vilken siffra ska vi börja med?

Ska vi undersöka ental eller tiotal först?

Utveckla med nya frågor såsom hur många tresiffriga tal det finns med exakt 5 prickar, tvåsiffriga med bara fyra prickar, tresiffriga med fler än sex prickar? osv.

23 Pussla ihop en larv

I det här problemet gäller det att titta noga på bitarna eftersom fyra olika sorters pusselbitar ska kombineras: huvud, mittenbit, sista biten före svansen, svans. Det finns också olika många av varje sort. Vissa av larverna har flera mittenbitar, diskutera om det ska ses som samma eller olika larver om de har samma bitar men i olika ordning. Är en larv med äpple – druva i mitten samma som en larv med druva – äpple i mitten?

Samma problem men med färre bitar finns i årets Ecolier 2024 problem 17.

Andra kombinatoriska problem finns i Benjamin 2020:21, Ecolier 2023:10, Cadet 2023:8.



Logik

20 Koppar och fat

Det här är ett klassiskt logikproblem som kräver dels god språkförståelse dels logiskt tänkande. Det är ett bra problem för att arbeta språkutvecklande. Diskutera vad de olika påståendena betyder. Försök formulera varje påstående på ett annat sätt som innebär samma sak. Exempelvis:

A: Det är helt säkert att ingen av kopparna hamnar på matchande fat.

Det betyder att alla koppar måste hamna på fat som inte matchar.

B: Det är helt säkert att precis 1 av kopparna hamnar på matchande fat.

Precis en innebär bara en – inte fler, inte färre. En kopp matchar men inte de övriga.

Liknande problem: Benjamin 2023:18, 2021:21, 2020:16, 2018:11

24 2024

Årets svåraste problem utgår från årtalet 2024. En strategi för att lösa problemet är att använda variabelbeteckningar för de okända siffrorna som skapar talen. Då utgår man från att Amelias tal som är tresiffrigt och kan skrivas ABC. Därefter får vi veta att Brandon skriver en ny siffra, D, som blir entalssiffran i ett nu fyrsiffrigt tal ABCD. Skillnaden mellan dessa är 2024. Skriv sedan upp subtraktionen $ABCD - ABC$ i en algoritm och resonera om vad de olika siffrorna i differensen måste vara för att det ska stämma.

$$\begin{array}{r} ABCD \\ - ABC \\ \hline 2024 \end{array}$$

Om eleverna är tveksamma till bokstäverna så prova att använda färgade post-it-lappar. Sätt upp lappar i fyra olika färger på tavlan enligt algoritmen och skriv 2024 under. Resonera sedan om vilken siffra som ska skrivas på vilken färg för att det ska bli rätt.

Låt eleverna hitta på andra problem där svaret eller en del i problemet är årtalet.

En av svårigheterna i problemet kan vara att komma på att skriva upp det som en subtraktion, att "det ökar med 2024" innebär att differensen mellan de två talen är 2024.

En enklare lösning är att skriva upp ekvationen: $2024 = 10 \cdot ABC + D - ABC = 9 \cdot ABC + D$. D är resten vid division av 2024 med 9, som är 8. Diskutera med eleverna varför likheten kan skrivas på det sättet.

Ett liknande problem där uppställningen redan är gjort finns i Benjamin 2018:15

När man väl kommit så långt kanske problemet känns igen, det är ett vanligt typ av problem som kan lösas genom resonemang om när man växlar mellan olika talsorter. Ett av de mest klassiska problemen på samma tema är följande meddelande som enligt berättelsen skickats i ett telegram: $SEND + MORE = MONEY$, där varje bokstav står för en siffra.

$$\begin{array}{r} SEND \\ + MORE \\ \hline MONEY \end{array}$$