Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Student 2023, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 28 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med

Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Ytterligare förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen finns samlade i dokumentet *Arbeta vidare med Cadet*.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen senast *29 april* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit och kommentarer – Student 2023

1 C $\frac{49}{10}$

$$\frac{7777^2}{5555\cdot 2222}=\frac{(7\cdot 1111)^2}{5\cdot 1111\cdot 2\cdot 1111}=\frac{49\cdot 1111^2}{5\cdot 1111\cdot 2\cdot 1111}=\frac{49}{5\cdot 2}=\frac{49}{10}$$

2 C 2

Kan till exempel vara $6+6+3+2+2$.
Med 3 sexor blir summan minst $6+6+6+1+1=20$.

3 E 75 cm

Myrans sammanlagda väg är två varv runt en cirkel motsvarande cylinderns bas samt uppåt motsvarande burkens höjd. $2\cdot 30\text{cm}+15\text{cm}=75\text{cm}$.

4 B 1

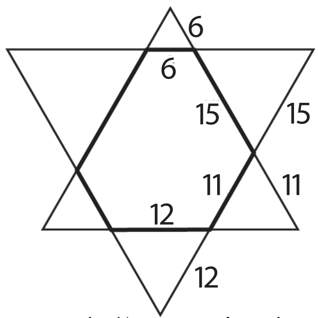
Ett tal som har två (eller fler) olika primfaktorer, säg p och q har fler än 3 delare: 1, p, q, och $p\cdot q$ (och kanske ännu fler). Alltså måste ett tvåprimt tal vara i formen p^n och $p=2$ eftersom talet ska vara delbart med 2. 2^n har $n+1$ delare alltså $n=2$ och det enda tvåprima talet är $2^2=4$.

5 A 2^9-1

$m>0$ alltså $2n<2^{10}$, alltså $n<2^9$.
Det finns 2^9-1 positiva heltal $n<2^9$.
För varje sådant n finns exakt ett positivt heltal $m=2^{10}-2n$ som uppfyller ekvationen.

6 D 70

De 6 trianglarna runt sexhörningen är liksidiga eftersom alla deras vinklar är 60° såsom de två ursprungliga trianglarnas. Så vi kan skriva några sidlängder till i figuren.



Nu ser man att de ursprungliga trianglarna har sidolängder $6+15+11=32$ respektive $15+11+12=38$.
Summan av de två trianglarnas omkretsar är $3\cdot 32+3\cdot 38=210$. Det är det samma som summan av de 6 yttre trianglarnas omkretsar (dvs den sammanlagda längden av alla sträckor i figuren). Sexhörningens omkrets består av en sida från varje yttre triangel, alltså är den $210/3=70$.

7 B 28

Hela figurens area som är 84 består av oändligt många, olika stora svarta kvadrater och för varje svart kvadrat två vita av samma storlek, en vit till höger om den svarta och en rakt under den. Alltså utgör de svarta kvadraternas area en tredjedel av hela figurens area dvs $84/3=28$.

8 E 24

Bredvid varje siffra skriver vi inom parentes dess rest vid divsion med 3. Nu ser vår rutrad ut så här.

	7(1)		9(0)					

Vi har 1(1), 2(2), 3(0), 4(1), 5(2), 6(0) och 8(2) kvar att placera. Om summan av tre (eller hur många som helst) tal är delbar med 3 så är summan av deras rester också delbar med 3. Alltså i rutan mellan 7(1) och 9(0) måste stå något med (2) dvs. 2(2), 5(2) eller 8(2). Och i rutan längst till vänster något med (0), och till höger om 9(0) något med (1). fortsätter vi att resonera på detta sätt så får vi följande rad.

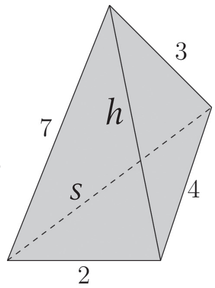
(0)	7(1)	(2)	9(0)	(1)	(2)	(0)	(1)	(2)

Nu ser vi att 3 och 6 kan placeras på två sätt (i rutor med "(0)"), 1 och 4 också på två sätt samt 2, 5 och 8 på sex sätt (i de tre rutorna med "(2)"). Vi har alltså $2\cdot 2\cdot 6=24$ valmöjligheter.

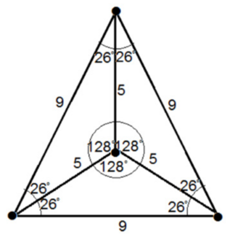
9 E 6

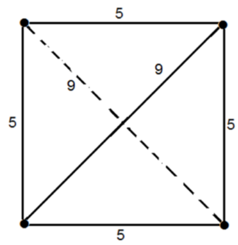
Om två eller fler heltal alla har entalssiffran 5 så har även deras produkt entalssiffran 5. Därför har 5^5, 5^{10} och 5^{15} entalssiffror 5. Därmed har $5^5 + 1$, $5^{10} + 1$ och $5^{15} + 1$ entalssiffror 6.
Om två eller fler heltal alla har entalssiffran 6 så har även deras produkt entalssiffran 6. Därför har $(5^5 + 1) \cdot (5^{10} + 1) \cdot (5^{15} + 1)$ entalssiffran 6.
Anmärkning: Även entalssiffror 0 och 1 har egenskaper liknande de för 5 och 6 men inte de övriga sex siffrorna.

10 C 11



Låt h vara längden av den heldragna kanten och s längden av den streckade kanten. Triangelolikheterna ger:
$h < 3 + 4$ och $7 < 2 + h$ alltså $h < 7$ och $h > 5$ och eftersom h är ett heltal så är $h = 6$
$s < 2 + 4$ och $7 < 3 + s$ alltså $s < 6$ och $s > 4$ och eftersom s är ett heltal så är $s = 5$. Vi har $h + s = 6 + 5 = 11$
Anmärkning: Tetraedern i figuren kan konstrueras i tredimensionella rummet men allmänt kan man inte vara säker att det finns en tetraeder med vissa kantlängder bara därför att kanterna runt varje sida uppfyller triangelolikheten. Även vinklarna vid varje hörn måste uppfylla triangelolikheten. Här kommer två låtsasbilder av tetraedrar som är omöjliga trots att kanternas triangelolikheter är uppfyllda.





11 A 1

$6! \cdot 7! = 7! \cdot 6! = 7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 7! \cdot 720 = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$.
Alltså $N = 10$ (Det finns inget annat N sådant att $N! = 10!$). Siffersumma av 10 är 1.

12 E Ingen av föregående

Funktionen kan skrivas $y = x^3 + 3x^2 + a \cdot (x + 2) + 4$. Termen $a \cdot (x + 2)$ är oberoende av a om och endast om $x + 2 = 0$ dvs om $x = -2$. Övriga termer är aldrig beroende av a. Alltså måste punktens x-koordinat vara -2.
Dess y-koordinat är $y = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2 + 2) + 4 = -8 + 3 \cdot 4 + a \cdot 0 + 4 = 8$, $x + y = -2 + 8 = 6$.

13 B $-\frac{15}{4}$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + S + 2 + S + 3 + S + 4 + S + 5 + S = 15 + 5 \cdot S$, vilket ger $-4 \cdot S = 15$ och $S = -\frac{15}{4}$.

14 B 1

$|2m - 2023| + |2n - m| \le 1$, men $|2n - m| \ge 0$.
Alltså $|2m - 2023| \le 1$, men vänstra ledet är ett ickenegativt udda tal, så vi har $|2m - 2023| = 1$ och $|2n - m| = 0$, dvs $m = 2n$.
Alltså gäller $|4n - 2023| = 1$ och $n = 506$ är det enda heltalet som uppfyller ekvationen och $m = 2n = 2 \cdot 506 = 1012$.
Det enda heltalsparet som uppfyller olikheten är $m = 1012$ och $n = 506$.

15 D 11

Varje pojke har minst en flicka bredvid sig och ingen flicka sitter mellan två pojkar. Det betyder att pojkarna inte är fler än flickorna, alltså inte fler än 11.
11 pojkar är möjligt, raden kan t. ex se ut så här:
P F F P P F F P P F F P P F F P F F P P F F P

16 C 5^5

$n^n = 5^{5^6}$ är en potens av 5 alltså är talet n^n inte delbart med något annat primtal än 5. Då kan inte heller n vara delbart med något annat primtal än 5. Alltså är även n en potens av 5. Låt $n = 5^k$. Då har vi:

$$(5^k)^{(5^k)} = 5^{(5^6)}$$

$$5^{(k \cdot 5^k)} = 5^{(5^6)}$$

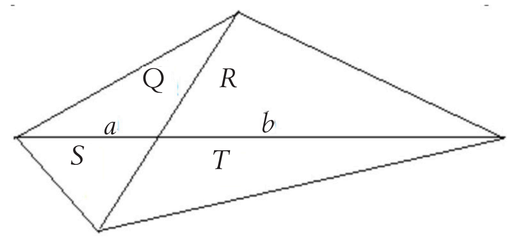
$$k \cdot 5^k = 5^6$$

Nu ser vi att även k är en potens av 5 och bara $k = 5^1 = 5$ uppfyller ekvationen $n = 5^k = 5^5$.

Anmärkning: En snabbare metod (som man gärna får använda under kängurutävlingen) skulle vara att testa alla svarsalternativen.

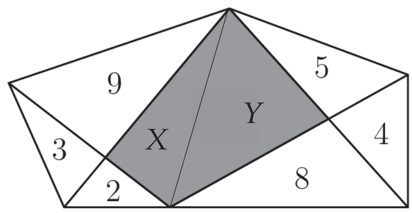
17 C 16

Låt en fyrhörnings diagonaler dela den i fyra trianglar med areor Q, R, S och T. Låt en av diagonalerna vara delad i två sträckor a och b som i figuren.



Då gäller $Q/R = a/b = S/T$ alltså $Q \cdot T = R \cdot S$ och vet man tre av areorna, så kan man beräkna den fjärde t.ex. $Q = R \cdot S / T$.

Dela fyrhörningen P i två trianglar med areor X och Y .



Då har vi: $X = 9 \cdot 2/3 = 6$ och $Y = 5 \cdot 8/4 = 10$ och $P = X + Y = 16$.

18 C 273

$A = 2^{20} \cdot 3^{23}$ har $21 \cdot 24 = 504$ positiva delare.

Det är alla tal i formen $2^m \cdot 3^n$ där $m = 0, 1, ..., 20$ och $n = 0, 1, ..., 23$.

$B = 2^{10} \cdot 3^{20}$ har $11 \cdot 21 = 231$ positiva delare.

Det är alla tal i formen $2^m \cdot 3^n$ där $m = 0, 1, ..., 10$ och $n = 0, 1, ..., 20$.

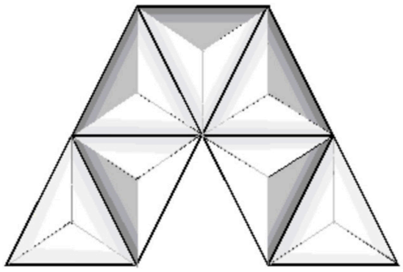
Varje delare i B är också delare i A.

Därför är antalet positiva delare i A som inte är delare i B $504 - 231 = 273$.

19 B $\begin{array}{ccc} 626 & \rightarrow & 627 \\ \uparrow & & \\ 625 & & \end{array}$

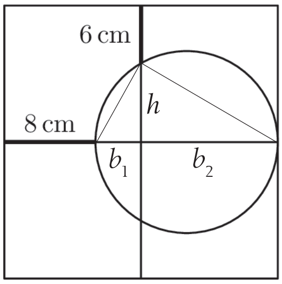
När de första 9 talen är skrivna, står de i en "kvadrat", (eller mera korrekt sagt: de bildar en kvadratisk matris) med tre rader och tre kolumner. Vi fortsätter medurs: ett steg upp, fyller översta raden, högerkolumnen, bottenraden och vänsterkolumnen. När varvet är klart så har antalet rader och antalet kolumner ökat med två var och vi har en 5 x 5-matris och det senast skrivna talet, överst, längst till vänster är 25 (som är antalet skrivna tal). Fortsätter vi 10 varv till på samma sätt, åstadkommer vi en 25 x 25-matris (båda dimensionerna ökar med 2 för varje varv) och det senast skrivna talet överst, längst till vänster är 625 dvs. 25^2. Vi går ett steg upp och börjar en ny översta rad med 626 och fortsätter till höger med 627.

20 E E För varje triangel i spelplanet visar bilden tetraedern sedd uppifrån när den står just på den triangeln.

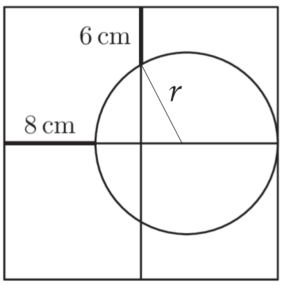


På "START" och på "E" syns inte den grå sidan uppifrån eftersom den utgör basen, (tetraedern står på den).

21 A 18 cm De 4 mindre kvadraterna är alla lika stora.
Låt S vara den stora kvadratens sidolängd då är $s = S / 2$ de mindre kvadraternas sidolängder. Vi ritar en triangel med basen $b_1 + b_2$ och höjden h.



Triangelns toppvinkel är en randvinkel på cirkelns diameter och alltså en rät vinkel. Då gäller $b_1 / h = h / b_2$ alltså $b_1 \cdot b_2 = h^2$.
Men $b_1 = s - 8$ cm, $h = s - 6$ cm och $b_2 = s$.
Insättning ger: $(s - 8 \text{ cm}) \cdot s = (s - 6\text{cm})$ med lösningen $s = 9$ cm.
Alltså $S = 18$ cm.
Alternativ lösning: Låt r vara cirkelns radie. Då är den stora kvadratens sida $2r + 8$ och de mindre kvadraterna har sidan $r + 4$. Dra radien r från cirkelns medelpunkt till ändpunkten på sträckan 6 (se figur).



Vi får en rätvinklig triangel med kateterna 4 och $r - 8$, och hypotenusan r.
Pythagoras sats ger
$4^2 + (r - 2)^2 = r^2$
$r = 5$
Kvadratens sida är 18 cm.

22 A $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

Vi har två ekvationer P och Q.
P: $f(x) + 2g(1-x) = x^2$ och
Q: $f(1-x) - g(x) = x^2$.

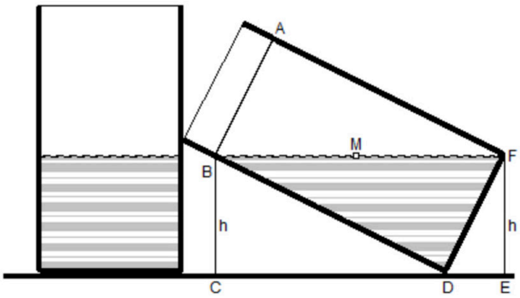
Substitution av $1-x$ för x i ekvationen Q ger:
R: $f(x) - g(1-x) = x^2 - 2x + 1$ som är ekvivalent med Q.
Vi multiplicerar R med 2 och adderar med P
$3f(x) = 3x^2 - 4x + 2$
$f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
så $f(x)$ måste vara likvärdig med $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
För att förvissa oss att det även finns en funktion $g(x)$ sådan att $f(x)$ och $g(x)$ uppfyller ekvationssystemet bestämmer vi $g(x)$ genom substitution av $1-x$ för x i ekvationen P (eller på annat sätt). Vi får $g(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$. Sedan sätter vi in uttryck för $f(x)$ och $g(x)$ och ser att vi får likvärdiga uttryck på båda sidor av likhetstecknet. Klart!
Anmärkning: En expert på linjära ekvationer skulle redan i början se att det måste finnas en lösning. För två linjära ekvationer med variabler u och v:
$a \cdot u + b \cdot v = m$
$c \cdot u + d \cdot v = n$
där produkterna $a \cdot d$ och $b \cdot c$ är olika har ekvationssystemet en (och bara en) lösning. I ekvationerna P och R med variabler $f(x)$ och $g(1-x)$ har vi $a \cdot d = 1 \cdot (-1) = -1$ medan $b \cdot c = 2 \cdot 1 = 2$. De är olika, så det finns en lösning för varje fixt reelt x. Alltså det finns funktioner *f och g* som satisfierar ekvationerna.

23 E $2^9 3^3 5^3$

Låt M vara den sökta minsta gemensamma delaren.
För $n = 1$ gäller $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3 = 1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 = 2^9 3^3 5^3$ alltså M är en delare till $2^9 3^3 5^3$.
Å andra sidan, bland fem på varandra följande heltal finns alltid minst två jämna tal varav minst ett delbar med 4, minst ett tal delbart med 3 och ett delbart med 5. Alltså är produkten av deras tredjepotenser delbar med $2^9 3^3 5^3$. Alltså är M är både en delare och en multipel till $2^9 3^3 5^3$ vilket ger $M = 2^9 3^3 5^3$.
Anmärkning: För den som tänker i kombinatoriska termer är annars självklart att $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ måste vara delbart med $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ eftersom det första är antalet möjliga ordnade urval av 5 element ur en mängd med n element medan det andra är antalet sätt på vilka 5 element kan ordnas.

24 C 9π m^3

Vi kapar av den översta delen av kärlet, så att kvar blir en rak cirkulär cylinder sådan att även den nya basen tangerar vattenytans plan. Den syns på bilden som rektangeln ABDF.



Vattenytan delar cylindervolymen i två lika stora (och kongruenta) delar: en med luft och en med vatten.
De är varandras spegelbilder med avseende på cylinderns mittpunkt M. Cylinderns volym är alltså dubbelt så stor som vattenmängdens i ett kärl. Men basytorna är lika stora, så cylinderns höjd måste vara den dubbla vattenhöjden, $|BD|=2h$.
Eftersom BDF, BCD och DEF är räta vinklar, så är triangeln DEF likformig med BCD, alltså $|DF|=2\cdot|DE|$.
Låt r vara basens radie: $\pi\cdot r^2 = 3\cdot\pi$ m^2 alltså $r = \sqrt{3}$ m
$|DF| = 2\cdot r$ alltså $|DE| = r$ och $h = \sqrt{3}\cdot r = 3$ m
Vattenvolymen (i det vänstra kärlet) är $3\cdot\pi$ m$^2\cdot h = 9\pi$ m^3.