Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Cadet 2023, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 28 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med
Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Ytterligare förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen finns samlade i dokumentet *Arbeta vidare med Cadet.*

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

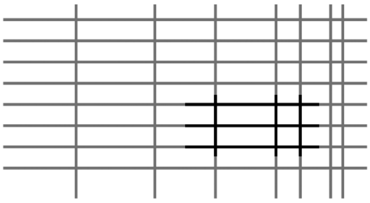
För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen senast *29 april* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

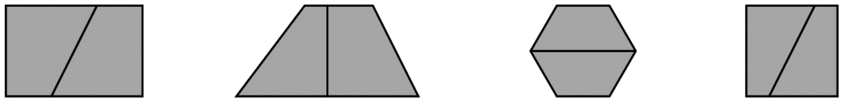
Facit och kommentarer – Cadet 2023

1 E



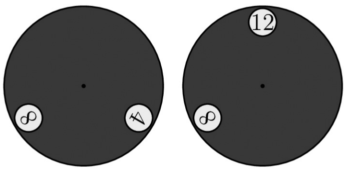
2 A

På alla figurer utom A kan vi göra parallelltrapetser.



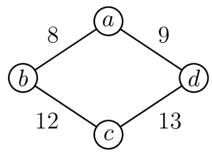
3 A 4 eller 12

Bilden visar de två möjligheterna. Det andra hålet visar en tid 4 timmar före eller efter 8.

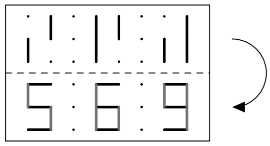


4 B 12

Observera att summan av de två talen på två motsatta sidor är samma. Till exempel sidorna med ändpunkterna a, b och c, d, har summan $(a + b) + (c + d) = a + b + c + d$ vilket är samma som summan $(a + d) + (b + c)$ av två andra motsatta kanter. Så i vårt fall är talet vid kanten med frågetecknet $8 + 13 - 9 = 12$.



5 C



6 D

Eftersom $4 \times 6 = 24$ inte är en multipel av 5, kan bricka D inte användas eftersom den har 5 rutor. Alla andra plattor kan täcka golvet.

7 B 15

Han måste vända på 10 % av mynten (så att 40 % blir 50 %), vilket motsvarar 15 mynt.

8 D 10

Låt S1 vara skivan med den minsta radien och låt S5 vara skivan med den största radien. Beteckna tornet som (a,b,c) där a är skivan i toppen av tornet, b är skivan i mitten och c är skivan i botten. Alla möjliga torn är då :
(S3, S4, S5), (S2, S4, S5), (S1, S4,S5), (S2, S3, S5), (S1, S3, S5) , (S1, S2, S5), (S2, S3, S4), (S1, S3, S4), (S1, S2, S4), (S1, S2, S3).
Detta ger 10 möjliga torn totalt.

9 E 7

Summan av alla tal från 1 till 8 är 36, så summan av talen i varje rad måste vara 18 och summan av talen i varje kolumn måste vara 9.
Lösningen ser ut så här:

6	4	1	7
3	5	8	2

10 E ○△○

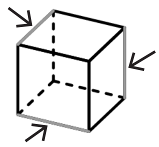
Eftersom den första siffran ändras till de två nästkommande tal drar vi slutsatsen att ◊ = 9, △ = 0, □ = 1. Det första talet är då 199, och vi har ○ = 2. Nästa tal att skriva är då 202, vilket innebär talet ○△○.

11 C 18

Låt r vara radien för cirklarna. Om vi tittar på de tre övre halvcirklarna samt sträckorna emellan dem får vi $6r + 12 + 12$, som måste vara lika lång som de två cirklarna under med mellanliggande sträckor, $4r + 22 + 16 + 22$. Sätter vi dessa uttryck lika kan vi lösa ut r och få $r = 18$.

12 B 3

Endast 2 rödfärgade kanter är inte tillräckligt, då det inte finns någon möjlighet att välja dem så att det blir en röd kant på var och en av de 6 sidorna. 3 rödfärgade kanter räcker däremot. I det visade exemplet finns en möjlig sådan färgning.



13 C 6

Först och främst räknar vi antalet tändstickor som krävs för att skriva var och en av siffrorna.

Siffra	Antal stickor
0	6
1	2
2	5
3	5
4	4
5	5
6	6
7	3
8	7
9	6

Det finns två en-siffriga positiva tal som består av sex stickor: 6 och 9.
I två-siffriga tal kan de sex stickorna fördelas så här: 2 + 4 ; 4 + 2 ; 3 + 3. Det ger dessa två-siffriga tal: 14, 41 och 77.
Ingen siffra skrivs med en enda tändsticka, därför finns inte alternativen $1 + 5$ och $5 + 1$ med.
Det finns ett tre-siffrigtal där stickorna fördelas så här, 2 + 2 + 2: 111
Detta ger oss de sex möjligheterna: 6, 9, 14, 41, 77, 111.

14 D 70°

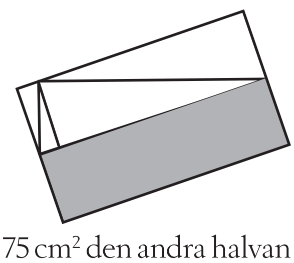
Först observerar vi att $\angle BCA = \angle CAB = (180 - 40) / 2 = 70$.
I triangel FAC gäller att
$\angle AFC = 180 - \angle FCA - (70 - \angle FCA) = 110$.
Så vinkeln CFE är $180 - 110 = 70$.

15 D 40

Om vi lägger ihop antalet träffar i varje ring från Tom och John så träffar de tillsammans varje ring exakt det dubbla antalet gånger som Lily träffar varje ring. Eftersom summan av poängen för Tom och John är 46 + 34 = 80, fick Lily 40 poäng.

16 D 150 cm²

Den stora vita räta triangeln vid rektangelns nedre vänstra hörn kan flyttas upp till den andra stora vita räta triangeln så att deras hypotenusor matchar. Likaså kan den lilla vita högra triangeln vid rektangelns spets till höger flyttas åt vänster till den andra lilla triangeln. Nu kan vi se att det vita området är exakt hälften av rektangelns area, därför är de tre kvadraterna tillsammans med arean 75 cm² den andra halvan av rektanglarnas area. Så arean av den vita rektangeln är $2 \cdot 75\ \text{cm}^2 = 150\ \text{cm}^2$.



17 A 4

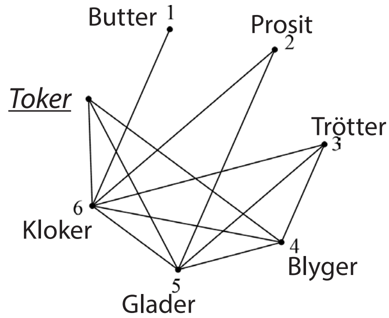
Om man endast använder på varandra följande *positiva* heltal, 1, 2, ..., 2023, kommer summan bli alldeles för stor. Sekvensen måste börja med negativa tal, så att många par av tal tar ut varandra:
–1011, -1010, -1009, ..., 1009, 1010, 1011 ger summan 0. Men om vi inte väljer lika många tal på var sin sida om 0 så att summan ändå kan bli 2023.
För denna följd; -1010, -1009, ..., 1009, 1010, 1011, 1012, är summan av talen $0 + 1011 + 1012 = 2023$. Största talet är 1012 med siffersumman 4.

18 C $\frac{180}{19}$ cm/min

Låt en sida i triangeln vara x cm.
Det tar då myran $\frac{x}{5} + \frac{x}{15} + \frac{x}{20} = \frac{19x}{60}$ minuter att går runt triangeln.
Medelhstigheten för hela varvet är $3x / \frac{19x}{60} = \frac{180}{19}$ cm/min.

19 C 3

Vi ritar upp linjer mellan spelarna, där en linje motsvarar en match.
Toker spelade enligt bilden 3 matcher.

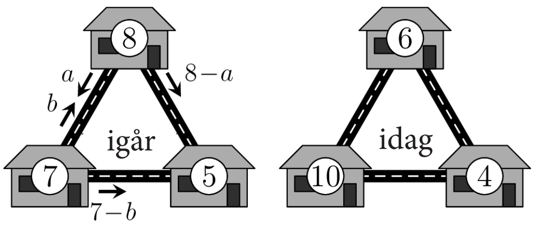


20 D 17

Låt oss säga att Martin har n personer framför sig och n bakom sig, det betyder att Martins position i kön är $n + 1$. Nu måste $n + 1$ vara mindre än 19 och $2n + 1$ måste vara över 28. Det ger att n bara kan vara 14, 15, 16 eller 17. Eftersom $2n + 1$ är en multipel av 3, är $n = 16$ och Martin är på 17:e plats.

21 B 11

Antalet möss till vänster i de två husen är $7 + 8 = 15$. Några, eller inga, av dessa 15 möss korsade vägen som förbinder dessa hus, och resten gick till det tredje, högra huset.
Vi vet att 4 möss anlände till det högra, tredje huset. Det betyder att de andra, nämligen $15 – 4 = 11$, är antalet möss som korsade den visade vägen.
Alternativ lösning: Antag att antalet möss som lämnade de två husen till vänster för att gå till varandra är a respektive b. Vi vill hitta $a + b$. Uppenbarligen är antalet möss som gick till det tredje huset $8 – a$ respektive $7 – b$. Från den andra bilden vet vi att 4 möss anlände till det tredje huset, så $(8 – a) + (7 – b) = 4$, vilket ger $a + b = 8 + 7 – 4 = 11$.



22 E 6

Eftersom enhetssiffran för 2023 är en 3:a måste vi använda en kolumn med nio 7:or eftersom den enda multipeln av 7 som slutar på en 3:a är $7 \times 9 = 63$. Detta ger 6 i minne. Så tiotalskolumnen måste sluta på en 6 (så att 6+6 slutar på en 2), vilket betyder att vi behöver en kolumn med åtta 7:or så att $8 \times 7 = 56$. Nu har denna kolumn en 6:a i minnet så vi behöver $14 = 7 + 7$ i kolumnen längst till vänster.

$$\begin{array}{r} 777 \\ 777 \\ 77 \\ 77 \\ 77 \\ 77 \\ 77 \\ 77 \\ +\quad 7 \\ \hline 2023 \end{array}$$

23	A	18	Om dessa sex tal är konsekutiva och talen som sågs var 6, 7 och 8, finns det bara fyra möjligheter för alla sex tal: 3, 4, 5, 6, 7, 8 4, 5, 6, 7, 8, 9 5, 6, 7, 8, 9, 10 eller 6, 7, 8, 9, 10, 11. Summan 24 kan inte erhållas med tre av talen 3, 4, 5, 6, 7, 8. Summan 17 kan inte erhållas med tre av talen 5, 6, 7, 8, 9, 10 eller med tre av talen 6, 7, 8, 9, 10, 11. Det måste vara talen 4, 5, 6, 7, 8, 9 och summan av talen på de tre vita papperslapparna måste vara $4 + 5 + 9 = 18$.
24	C	24	Medelpoängen i den sjunde, åttonde och nionde matchen var $(24 + 17 + 25) / 3 = 66 / 3 = 22$. Det betyder att medelvärdet av de första 6 matcherna var mindre än 22. Under de första 6 matcherna kunde laget ha gjort $22 \cdot 6 - 1 = 132 - 1 = 131$ poäng. Efter 10 matcher måste medelvärdet vara mer än 22, så över de 10 matcherna måste laget ha gjort minst $10 \cdot 22 + 1 = 220 + 1 = 221$ poäng totalt. Det minsta antalet poäng som laget kunde gjort i den senaste matchen är då $221 - 131 - 66 = 24$.