Arbeta vidare med Ecolier

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru.

Nedan ger vi förslag på hur ni kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.

1. Fem ljus

De flesta har nog erfarenhet av ljus som brinner, så då är nog inte detta ett problem men uppgiften kan användas för att jämföra högre och lägre, först och sist och för att eleverna ska få beskriva hur de har tänkt när de svarat. Eftersom uppgiften sannolikt är lätt så kan det vara fler elever som är säkra på svaret och därför mer villiga att berätta om sin lösning.

Tidigare problem: E 2018:4

2. Mynt med olika värde

- Låt eleverna berätta hur de har tänkt och skriv deras tankar med symboler på tavlan:

  Exempelvis: $20 + 10 + 10 + 1 = 41$
  $41 + 10 = 51$
  $2 \cdot 5 = 10$

  eller
  $20 + 10 + 10 + 1 = 41$
  $51 - 41 = 10$
  $10/2 = 5$

Jämför $41 + 10 = 51$ med $51 - 41 = 10$ och $2 \cdot 5 = 10$ med $10/2 = 5$. Båda sätten att tänka fungerar bra här, men låt eleverna också få se exempel där det är svårare att använda utfyllnadsmetoden med huvudräkning, t ex $678 + ? = 3987$ och $7 \cdot ? = 476$.

Ett liknande problem finns på årets Milou, nr 9

3. Snurrskivor på urtavla

Att förstå hur många tal som finns mellan två tal på talraden är en ganska basal kunskap som likväl behöver tränas. Mellan exempelvis talen 5 och 7 fins det bara ett tal i talraden men det är två steg: från 5 till 6 och från 6 till 7. När det tecknas som en beräkning får vi att $5 + 2 = 7$ eller $7 - 2 = 5$. Hur man talar om detta blir därför viktigt och det kan vara bra att låta eleverna formulera med egna ord hur långt det är emellan de olika talen i problemet och att prata om skillnaden mellan att det är ett tal mellan 5 och 7 men att avståndet mellan dem är två steg.

- ”Snurra” skivan i problemet och undersök vilka olika tal som syns.
- – Vilket tal skulle vi se om ena hålet visar 10?

I det här problemet är talraden placerad på en klocka och går därför bara upp till 12. Det medför en extra svårighet, att räkna det som kallas modulo 12, vilket innebär att fyra steg från 10 leder till 2: 10 till 11, 11 till 12, 12 till 1 och 1 till 2.

- Jämför med klockan.
- – En resa tar 3 timmar. När är du framme om du startar klockan 6, 8, 10, 11?

- Visa hur 13 och 1 i klocksammanhang hänger samman. Om man vet att detta hör ihop med modulo 12 kan man tänka ut att klockan 20 är detsamma som klockan 8 (på kvällen) eftersom $20 - 12 = 8$, och tvärtom, 8 på kvällen måste vara $8 + 12 = 20$.

Benjamin 7, Cadet 3 och Junior 1 i år är samma problem men med olika antal steg och olika placering

4. Pusselbitar ger kvadrat

- Studera pusselbitarna och låt eleverna förklara varför inte bit 1 och 3 eller bit 2 och 4 går att kombinera.

– Varför passar inte bit 2 vare sig till bit 1 eller 3?

Att försöka förklara kan vara en utmaning, det är flera termer och begrepp som behövs.

– Bilden ska bli en kvadrat. Vad innebär det?

– Vad utmärker en kvadrat? Varför är inte alla rektanglar kvadrater?

– Vad utmärker en rektangel?

– Varför är alla kvadrater också rektanglar?

Benjamin 6 i år är ett liknande problem. Tidigare problem: E 2003: 9, E 2006:11.

5. Ljusteknikerns schema

Här handlar det om att tolka diagram. Låt eleverna berätta vad de kan läsa ut av schemat. Ställ olika frågor, t ex:

– Vilken lampa tänds först?

– Vilka lampor lyser i slutet?

– Hur många minuter sammanlagt är den gröna lampan tänd?

– Är det någon gång helt mörkt på scen?

– När lyser alla tre lamporna samtidigt?

- Variera antalet lampor och antalet minuter.
- Låt eleverna göra egna diagram med olika förutsättningar, t ex
- Halva tiden ska bara en lampa lysa, en fjärdedel av tiden ska två lampor lysa …
- Ge eleverna en skriftlig instruktion om hur ljussättningen ska ske och låt dem göra ett schema.

6. Siffror på genomskinligt ark

- Visa eleverna konkret hur vikningen bildar siffrorna, antingen med ett papper eller genom att rita. Prata om hur figurerna speglas i vikningen, uppmuntra eleverna att använda begrepp som höger, vänster, vågrät, lodrät.
- – Hur kommer bilden se ut om vi i stället viker den nedre delen uppåt?

Uppgiften handlar alltså om symmetri. Det finns många sätt att undersöka och leka med symmetri.

- Undersök t ex alfabetet, vilka bokstäver är symmetriska? Var ligger symmetriaxeln? Vilka bokstäver har mer än en symmetriaxel?
- Undersök geometriska figurers symmetri.
- Se på föremål i klassrummet, naturen.
- Låt eleverna rita en figur som sedan en annan ska spegla i en given linje.

Tre artiklar som behandlar symmetri finns att hämta i Nämnarens artikeldatabas: ncm.gu.se/nbas. Sök på symmetri.

Årets Milou 3, Benjamin 11 och Cadet 5 är problem som liknar detta. Se också förslag till problem 14. Tidigare problem: B 2010:2

7. Elever på rad

- Illustrera problemet konkret, t ex med eleverna själva på rad eller med föremål.
- – Hur många elever står kvar i ledet?
- – Vilka nummer har de som fått 2 när läraren räknat?
- Låt eleverna förklara varför det blir lika många i som utanför ledet om vi i stället har 20 elever.
- Diskutera jämna och udda tal och vad som skiljer dem.
- Ändra uppgiften så att läraren räknar 1, 2, 3 och gör fler exempel där det totala antalet elever är jämnt delbart med 3.
- – Hur många är kvar i ledet? Hur många får gå ut?
- Gör flera exempel och se på relationen mellan antalet elever som går ut och som står kvar.
- Låt eleverna förklara varför det alltid blir dubbelt så många kvar som de som går ur.
- Gör på motsvarande sätt och låt var fjärde elev gå ur ledet

Variera gärna ovanstående förslag, t ex plocka föremål från en rad eller trä pärlor på ett snöre. *Se också förslag till problem 22.*

8. Bitar på en cirkelskiva

Problemet handlar om att kunna ”se det som inte syns”. I samtal om det här problemet finns det anledning att använda orden hel, halv och fjärdedel. Även ordet cirkelsektor kan användas i ett meningsfullt sammanhang.

- Gå igenom svarsalternativen och ställ frågor som:
- – Hur kan bitarna ligga?
- – Var ser du halvcirkeln?
- – Var ser du fjärdedelen?
- Låt eleverna motivera och argumentera för varför den omöjliga figuren inte går att lägga.
- Undersök om det går att få fler möjliga figurer av de givna bitarna.
- Skapa ett liknande problem med fler bitar eller andra storlekar på cirkelsektorerna.
- Låt eleverna rita ett mönster som inte går att skapa med de bitar som fanns.

Ett liknande problem finns i årets Benjamin, problem 8.

9. Olikhet blir likhet

- Diskutera och jämför de lösningsstrategier som eleverna haft (ev kompletterat med de som finns i facit).
- Gör några fler exempel tillsammans.
- Låt eleverna skapa egna olikheter som kan göras till likheter på liknande sätt.

Tidigare problem: E2011:2

10. Torn av tre skivor

- Arbeta igenom lösningen noga. Illustrera med konkreta skivor eller med bilder
- – Det är bara de två största skivorna som kan ligga som botten i ett torn. Varför?
- – Om den största skivan ligger i botten, vilka kan då ligga direkt på den? Varför inte alla de andra tre?
- – Hur många möjligheter finns det att bygga torn med den största skivan i botten?
- – Om den näst största skivan ligger i botten, vilka möjligheter finns det då?
- Ändra förutsättningarna:
- – Hur många olika torn med tre skivor skulle vi kunna bygga om skivorna fick ligga i vilken ordning som helst?
- – Hur många olika torn kan vi bygga med fyra skivor?

– Hur många olika torn kan vi bygga med två skivor?

Se också förslag till problem 20. Liknande problem finns i årets Benjamin, problem 4 och Cadet, nr 8.

11. Vilken bit ligger på pricken?

- Gå igenom lösningen och låt eleverna arbeta konkret med bitarna, antingen genom att klippa ur dem eller genom att rita i figuren.
- Diskutera formerna på figuren och på de små bitarna. Eleverna får då möjlighet att använda termer som sidor, hörn, motstående, diagonal, kvadrat, triangel, fyrhörning, parallellogram, vinkel, rät vinkel, spetsig vinkel, trubbig vinkel, area och omkrets.

Årets Milou 10 är ett liknande problem.

12. Burkar på vågen

– Hur kan vi veta att vikten vid sidan av vågen måste väga ett udda antal kg?

– Vilka slutsatser kan vi dra om vikten vid sidan av 6?

Med hjälp av resonemang kan vi alltså finna en lösning. Annars går det förstås att pröva sig fram.

– Vilka tänkbara lösningar finns det om vi inte anger någon av vikterna på vågen?

Även denna uppgift handlar om likhet och olikhet, så som problem 9.

- Låt eleverna uttrycka vågen som en likhet.

Tidigare problem: E 2006: 13

13. Färglägg cirklar

– Vilket är det enklaste sättet att ändra figuren så att det hade räckt med två färger?

– Räcker det med tre färger om alla cirklar är förbundna med sina tre granncirklar?

Ett motsvarande problem finns på Benjamin, problem 22.

Ett klassiskt geometriproblem som också handlar om att områden intill varandra ska ha olika färg är ”Kartfärgningsproblemet” eller ”Fyrfärgsproblemet”:

Hur många olika färger behövs för att kunna färglägga en karta över ett godtyckligt antal områden så att inte två områden som gränsar till varandra får samma färg?

Problemet var löst redan på 1800-talet, det behövs fyra färger. Sen gällde det att bevisa att fyra färger alltid är tillräckligt. Det tog ända till 1976 innan Fyrfärgsteoremet kunde bevisas.

- Låt eleverna få pröva att färglägga en (tillräckligt komplicerad) karta med så få färger som möjligt, så att inte två områden som delar gräns får samma färg. Berätta sedan om Fyrfärgsproblemet. (Från arbeta vidare med E 2019:22)

Tidigare problem: E2019:22, E 2020:9.

14. Vikt papper med hål

Även i detta problem måste man utföra en handling i tanken. Man måste också tolka figuren med pilar av olika slag och dessutom streckmarkeringar som dels betyder vikning och dels klippning. Problemet är betydligt mer komplicerat än det ser ut vid en första anblick.

- Gå noga igenom hur bilden ska tolkas, det kan vara en svårighet för många elever i den här åldern. Ställ delfrågor:
– Var på pappret kommer det bortklippta hörnet att hamna?
– Vilken form kommer det att få?
- Gå igenom alternativen ett i taget:
– Varför är det fel? (om det är fel)
– Hur skulle vi klippt för att få detta svar?
- Undersök hur det skulle bli om vi istället hade vikt pappret på andra sätt.
- Pröva olika sätt att vika och klippa.
- Låt eleverna laborera med vik- och klippmönster. Det kan bli till dekorativa prydnader.

Se också förslag till problem 6. Milou 3 är ett liknande problem. Tidigare problem: B 2004:10, E2018:6.

15. Bilar i färjekö

Den här typen av problem finns ofta med i Kängurun, men med olika sammanhang och olika tal. Diskutera lösningsmetoder och variera sen de ingående talen.

- Låt eleverna konstruera liknande problem, och lösa dem. Diskutera efteråt vad de har lagt märke till under arbetet.

Tidigare problem: E 2010:14, E2011:12, E2013:15, E2017:11.

16. Tåglinjen

Ser vi mönstret är det lättare.

- Ställ frågor så att alla ser att det är 10 stopp innan tåget är tillbaka på B.
- – Var är tåget efter 20 stopp? 30? …
- – Var är tåget efter 65 stopp? 87? 1000? 1003?

Jämför med klockan, där ett varv är 12 timmar, och med veckan som har 7 dagar. Är det tisdag i dag är det tisdag efter 7 dygn. Om 64 dygn är det alltså onsdag tisdag + 1. Många barn tycker att det är roligt att se sådan mönster i omvärlden, men alla upptäcker dem inte på egen hand.

Tidigare problem: E 2003: 3

17. En sliten linjal

Det finns en koppling mellan detta problem och problem nr 3 (Snurrskivan på urtavlan). Båda handlar om avstånd mellan tal. Uppmärksamma eleverna på att det lika väl hade kunnat vara en uppgift om en tallinje eller en enkel subtraktionsuppgift. Med hjälp av en linjal, eller ett måttband går det bra att konkret visa hur de olika subtraktionstankarna ta bort, skillnad och hur mycket fattas hänger ihop. I det här problemet är det just detta vi utnyttjar för att finna den linjal som ger flest möjligheter.

- Visa hur man kan mäta de olika sträckorna.
- – Vilka sträckor kan vi mäta med de fem linjalerna?
- – Vilken linjal ger färst möjligheter?

Tidigare problem: E 2003:13

18. Pojkar och flickor på rad

- Illustrera problemet konkret. Ställ upp 8 elever på rad (eller använd t ex olikfärgade tröjor eller något annat som tydligt särskiljer) och ställ upp på olika sätt så att det tydligt framgår vad som är problemets lösning.
- – Vad händer om vi i stället har 9 barn i rad, varav 2 pojkar?
- – Om vi har 9 barn varav 3 pojkar?
- – 10 barn?

Tidigare problem: B 2004:17

19. Husen vid Kängurugatan

– Hur många hus finns det sammanlagt?
– Hur många hus ligger väster om Kängurugatan?
- Undersök hur husen kan vara placerade.
– Finns det flera möjligheter?

20. Tre går in i samlingssalen

- Gå igenom problemet noga, undersök vilka möjligheter det finns för en person i taget.
- Var och en kan bara förekomma på två platser. Hur förändras lösningen om denna begränsning inte finns?
- På hur många olika sätt kan fyra personer ställa sig i led?
- Konstruera olika kombinationsproblem, t ex:

– På hur många olika sätt kan bokstäverna A B C kombineras om varje bokstav endast får användas på en plats?
– Vilka olika fyrsiffriga tal kan du bilda av siffrorna 1, 2, 3 och 4.
- Försök att generalisera utifrån ett överskådligt problem.

Tidigare problem: E 2002:16, E 2007: 10

21. Vilken klocka går rätt?

Kan alla läsa av klockan? Även om vi ofta ser tiden uttryckt digitalt, är analoga klockor fortfarande vanliga inte minst i det offentliga rummet. Låt eleverna berätta om klockor som de har sett, både i sin nära omgivning och om det varit på resor. Uppmärksamma dem på klockor i den ort de bor. Visa gärna bilder på några välkända klockor i världen, t ex Big Ben, astronomiska uret i Prag.

- Gå igenom problemets lösning. Det är inte säkert att alla inser att vi måste leta rätt på de tre klockor som ligger med en timmes mellanrum. Gå igenom alla svarsalternativ, utgå från att de visar rätt tid och se om det finns två andra klockor som stämmer med problemets information.

Tidigare problem: E 2004: 9

22. Agatons och Busters kulor

Centralt här är att Buster har 9 kulor och dubbelt så många blå som röda.

- Undersök fler antal och se om de går att dela upp i en del som är dubbelt så stor som den andra. Vilka antal går att dela så?

Några aktiviteter att pröva finns att hämta på NCM:s webbplats:
ncm.gu.se/wp-content/uploads/2010/09/1A_anna_och_max.pdf
ncm.gu.se/media/namnaren/npn/arkiv_xtra/08_3/snowballs.pdf

Se också förslag till problem 7. Tidigare problem: E 2003: 16.

23. Tal i cirklar

Additionerna här är i sig inget problem, men för att slippa pröva sig fram krävs ett resonemang kring vilka summor som går att få med de inblandade talen.

- Undersök de olika summorna så att alla uppmärksammar att summan 9 inte går att få med ena termen 1, eftersom vi saknar 8. Var ska vi då sätta 1? När 1 är placerad är resten inte svårt.

Att lösa problem gemensamt och visa hur vi kan resonera är bra för att hjälpa eleverna att inte ha så bråttom att börja räkna utan i stället se på helheten i problemet. Gör gärna flera liknande cirklar så att eleverna får pröva sitt resonemang.

Tidigare problem: E 2011:16, E:2015:19, E 2017:16.

24. Målat rutmönster

Detta problem passar bra för gemensamt resonemang. Det är svårt, men innehåller inget svårt matematikinnehåll förutom att det kräver logiskt tänkande. Ett sätt att lösa problemet är att utgå från ett alternativ i taget och se ”om detta är rätt, stämmer då det Maria säger?”, det vill säga har de övriga fyra rutor på rätt plats. Det är mycket att hålla reda på, så det är bra att anteckna så att det blir tydligt för alla.