Kängurutävlingen – Matematikens hopp 2023

Arbeta vidare med Cadet

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det? Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru

Nedan har vi samlat några av problemen från Cadet 2023. Vi ger förslag på hur eleverna kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.

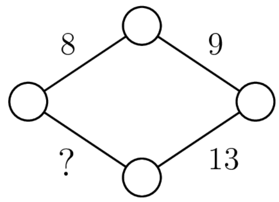
Liknande problem från tidigare år kommer du åt via länken: http://ncm.gu.se/kanguru

Taluppfattning

Nästan varje år i olika tävlingsklasser i Kängurun finns problem där det finns dolda eller saknade tal som ska bestämmas. Här gäller det att tänka till kring hur vårt talsystem fungerar. I Cadet 2023 har vi problem 4 med saknade/dolda tal i en figur, där summor ska stämma, och problem 9 med tal i ett rutnät, där summorna för rader och kolumner ska vara lika. Arbeta gärna med problemen vid samma tillfälle och ta upp likheter och skillnader.
Båda problemen går att variera, tex genom att öka antalet rader eller kolumner i uppgift 9. Vad händer om man har en femhörning i uppgift 4? Hur många av talen måste man visa för att de dolda/saknade ska kunna bestämmas?

4 Ett tal ska skrivas i varje hörn och på varje sida på romben i bilden. Talet på sidan ska vara lika med summan av de två tal som finns i sidans hörn.

Vilket tal ska stå istället för frågetecknet?



9 Evita vill skriva siffrorna 1 till 8 i rutorna i rutnätet som visas, så att summan av talen i varje rad är lika och summan av talen i varje kolumn är lika. Hon har redan skrivit talen 3, 4 och 8.
Vilket tal kommer hon att skriva i den skuggade rutan?

	4		
3		8	

Både problem 4 och 9 kräver ett systematiskt arbete. Prata gärna om vilka strategier eleverna använde när de löste problemen. Vilka tal måste stå i vilka rutor/positioner och finns det några som skulle kunna byta plats utan att det gör något med resultatet?

Även problem 10 handlar av dolda tal, där de olika siffrorna har ersatts med symboler. Det är av en lite annan karaktär än de två förra.

10 Theodorika skrev ner tre på varandra följande heltal i ordning, men istället för siffror använde hon symboler och skrev □◊◊, ○△△ och ○△□. Vilka symboler behöver hon skriva för nästkommande tal?

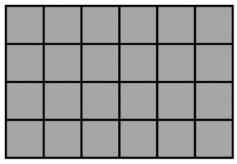
I årets tävling för Benjamin finns detta problem med, men då för tvåsiffriga på varandra följande tal. Låt eleverna börja med problemet med två siffror och ta sedan detta med tre.

En ofta bra kunskap i både Kängurun, och även i skolmatematiken, är att veta tals delare. Arbeta ofta med att lära känna talen genom att faktoruppdela dem.

Ett problem som till synes ser ut som ett geometriproblem handlar egentligen om just tals delare.

6 En plattsättare vill kakla ett golv med måtten 4 m × 6 m med identiska plattor. Det ska inte vara några överlappningar eller luckor.

Vilken av följande brickor kan inte användas?



För att resonera fram vilket alternativ som inte fungerar ser man att det finns 24 rutor att täcka och då måste biten bestå av ett antal bitar som är delare till 24. Alla delare till 24 är 2, 3, 4, 6, 8, 12. Skriv upp fler tal och låt elever hitta alla delare till tal. Det är det enda sättet att lära känna talen, så att det blir lättare att se faktoriseringar och samband.

Delare och multiplar av tal hänger ju tätt samman och ett problem med just multiplar av tal är problem 20.

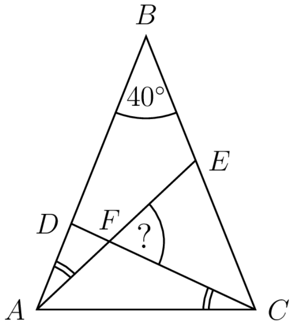
20 Martin står i en kö. Antalet personer i kön är en multipel av 3. Han märker att han har lika många människor framför sig som bakom sig. Han ser två kompisar som båda står bakom honom i kön, den ena på 19:e plats i kön och den andra på 28:e plats i kön. På vilken position i kön står Martin?

Geometri

Geometriska problem brukar ofta vara en utmaning för eleverna i Kängurun. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste redovisas i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur markerar man till exempel att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det går inte att hänvisa till att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så.

14 Triangeln ABC är likbent med $\angle ABC = 40°$. De två markerade vinklarna, $\angle EAB$ och $\angle DCA$, är lika.

Hur stor är vinkeln $\angle CFE$?

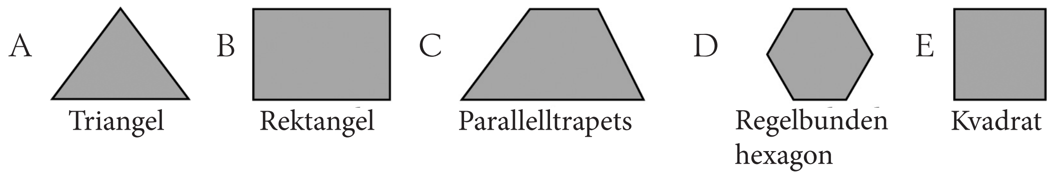


Diskutera begrepp som likformighet, likbent, likabelägna, liksidig och skriv ner vad som är vad i en slags ordlista. Vad gäller för vinklar i likbenta, liksidiga eller rätvinkliga trianglar?

Äldre problem som behandlar trianglars egenskaper är C2016 nr 18, J2010 nr19, J2016 nr 12, C2015 nr 8, C2013 nr2, C2012 nr 13.

Olika begrepp inom geometri som namn på figurer hör ofta samman med vilka egenskaper figuren har. Nästa problem, nr 2, måste man veta vad en parallelltrapets är för att kunna dela ett antal olika figurer.

2 Vilken av formerna nedan kan inte delas i två parallelltrapetser med en enda rät linje?

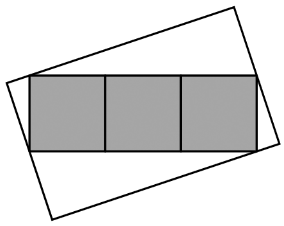


Ett liknande problem finns också i årets Benjamin nr 2 där figurerna ska delas i två trianglar i stället för parallelltrapetser.

Diskutera egenskaper hos de figurer som nämns. Gör gärna någon slags ”tankekarta” där ni kategoriserar figurerna utifrån antal hörn och vinklar. Ett exempel på kategorisering är ju att en kvadrat är ett specialfall av en rektangel.

Andra geometriområden i år är areaproblem.

16 En rektangel är gjord av tre grå rutor, var och en med area 25 cm^2. Rektangeln placeras inuti en större vit rektangel. Två av hörnen på den grå rektangeln vidrör mittpunkterna på de kortare sidorna av den vita rektangeln. De andra två hörnen på den grå rektangeln vidrör de andra två sidorna av den vita rektangeln så som i figuren. Hur stor är arean av den vita rektangeln?



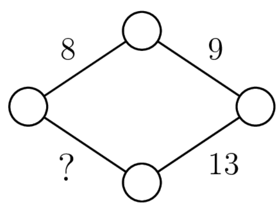
Lösningen vi beskriver i facit handlar om att flytta och titta på liknande områden. Diskutera hur områden kan delas upp och beräknas. Hur många olika lösningsstrategier hittar ni i klassen? Vilka andra sätt hittar ni?

Algebra

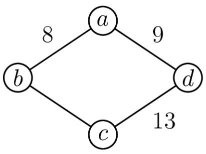
Det finns alltid flera metoder att lösa problemen på. Ett sätt är att benämna okända tal med bokstäver för att kunna beskriva deras relationer.
Problem 4 som vi såg under rubriken taluppfattning är ett sådant exempel.

4 Ett tal ska skrivas i varje hörn och på varje sida på romben i bilden. Talet på sidan ska vara lika med summan av de två tal som finns i sidans hörn.

Vilket tal ska stå istället för frågetecknet?



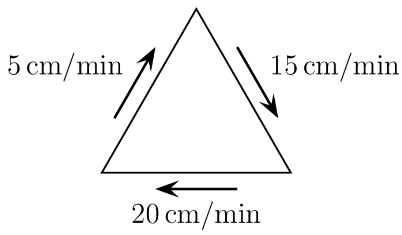
Det kan vara framgångsrikt att till exempel kalla de okända talen i hörnen *a, b, c* och *d*.



Därefter kan olika samband formuleras, till exempel vet vi att $a + d = 9$ och att $a + b = 8$ osv.
När alla samband formulerats kan själva lösande börja.
Ett annat exempel där algebra kan vara ett fint verktyg vid lösandet är uppgift 18.

18 En myra går längs sidorna av en liksidig triangel. Hastigheterna med vilka den går längs de tre sidorna är 5 cm/min, 15 cm/min och 20 cm/min, som visas i figuren.

Vad är medelhastigheten med vilken myran går runt hela triangeln?



Svårigheten här är att längden på triangelns sida inte är känd. Ett sätt att angripa problemet är att låta sidan vara *x* cm. Genom att hantera sidlängden som om den vore känd, kan nu tiden det tar för myran att gå runt triangeln formuleras (algebraiskt).
Det här problemet kan varieras genom att figuren och/eller att hastigheterna ändras. Hur kan ett liknande problem med tex en kvadrat eller rektangel se ut? Måste andra saker också ändras? Diskutera de generella formler och strategier ni finner i de två problemen och hur de skulle kunna användas om vi ändrar uppgifter i problemet, dvs visa på algebrans kraft.

Problemlösning

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter.
Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans, och hjälp elever att sätta in dem i problemet, exempelvis med stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten. Gå också igenom eventuella oklarheter beträffande ord och meningsbyggnad.
Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”.
Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. Att lära sig hantera motgångar och misslyckanden är viktigt för att utveckla problemlösningsförmågan.

I problemlösning spelar resonemang och argumentation en stor roll. Hjälp eleverna att göra resonemangen tydliga och visa gärna hur du själv resonerar som komplement. För att kunna utveckla sitt resonemang är det bra att kunna få möjlighet att följa mer utvecklade resonemang och få många tillfällen att faktiskt försöka skriva ner hur de tänker. Nedan följer några problem som bygger på kombinatorik och, liksom problemen vi redan nämnt i andra matematikområden, också är problemlösning.

8 Anna har fem cirkulära skivor, var och en av olika storlek. Hon bestämmer sig för att bygga ett torn med hjälp av tre av skivorna, så att varje skiva i hennes torn är mindre än skivan under den.
Hur många olika torn kan Anna bygga?

Här gäller det att systematiskt anordna skivorna. Har alla använts? Berätta hur eleverna gjort och se vilken strategi som är bäst för just detta problem. Variera problemet genom att ändra antalet skivor, och även ändra antalet skivor i tornen.

Liknande problem finns också i årets Ecolier nr 10 och Benjamin nr 4, där det just varieras antalet skivor som finns tillgängliga och där antalet skivor i själva tornet varieras.

Tävlingar och turneringar är ofta med som problem i Kängurun. I år är det ett populärt spel hos elever som spelas mycket både i appar och i verkligheten på raster.

19 Snövit anordnade en schacktävling för de sju dvärgarna, där varje dvärg spelade minst ett parti mot någon av de andra dvärgarna. Ingen spelade mot samma dvärg två gånger. På tävlingsdagen spelade Butter 1 match, Prosit spelade 2, Trötter 3, Blyger 4, Glader 5 och Kloker spelade 6 matcher.
Hur många matcher spelade Toker på tävlingsdagen?

Vad händer om det vore fler eller färre dvärgar?