Kängurutävlingen – Matematikens hopp 2023

Arbeta vidare med Benjamin

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det? Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru

Nedan har vi samlat några av problemen från Benjamin 2023. Vi ger förslag på hur eleverna kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.

Liknande problem från tidigare år kommer du åt via länken:
https://ncm.gu.se/2018/02/test-kanguruproblem/

Tal och tals användning

10 Siffrans platsvärde

Det här problemet fokuserar siffrans platsvärde i tvåsiffriga tal. När tiotalssiffran byts ut vet man att tiotalgränsen passerats och att entalen måste skifta från 9 till 0. Man kan direkt ur de avlästa symbolerna därför veta att triangeln representerar 0 och därmed att den stående kvadraten representerar 1. Därav följer att de tal som är givna motsvarar 19, 20, 21 och att nästa tal måste vara 22 som skrivs som två hjärtan.

Låt eleverna göra liknande uppgifter till varandra. Använd tio olika symboler och be dem lägga upp tre stycken två- eller tre-siffriga tal i följd. Låt dem byta med varandra och lista ut hur följden ska fortsätta. Diskutera om det alltid går att veta eller om det finns fall när serien skulle kunna fortsätta på flera olika sätt. Vad beror det på?

Liknande problem finns i årets Cadet 2023 problem 10.

Talrad och avstånd mellan tal på talraden utgör en grundläggande kunskap om tal. På olika sätt utnyttjas denna kunskap om tal i problem 7, 9 och 20.

7 Talraden modulo 12

Att förstå hur många tal som finns mellan två tal på talraden är en ganska basal kunskap som likväl behöver tränas. Mellan exempelvis talen 5 och 7 är det två (heltals-) steg, från 5 till 6 och från 6 till 7, och när det tecknas som en beräkning får vi $5 + 2 = 7$ eller $7 – 2 = 5$. *Avståndet mellan* 5 och 7 är 2. Men om man frågar efter *talen mellan* dem i talraden är 6 är det enda heltal som finns mellan 5 och 7. Hur man pratar om detta blir därför viktigt och det kan vara bra att låta eleverna formulera med egna ord hur långt det är emellan de olika talen i problemet. Uppmärksamma skillnaden mellan att det är ett tal mellan 5 och 7 men att avståndet mellan dem är två steg.

I det här problemet är talraden placerad på en klocka och går därför bara upp till 12. Det medför en extra svårighet genom att man behöver räkna vad som kallas modulo 12, som innebär att efter 12 börjar talraden om på 1. Tre steg från 10 leder till 1 (inte 13). 0 och 12 finns på samma punkt vilket innebär att $12 + 13 = 1$ modulo 12.

Uppgiften kan göras olika svår beroende på vilka tal som väljs och hur frågan formuleras.

Liknande problem i olika svårighetsgrad förekommer i flera tävlingsklasser i år:
Ecolier 2023 problem 3, Cadet 2023 problem 3, Junior 2023 problem 1.

9 Multiplar

Förutom att problemet handlar om att se avstånden mellan talen på talraden behandlar det också delbarhet och multiplar. Målpunkten i hopptävlingen ligger 11 steg från start och det är 22 steg för att komma precis ett helt varv. Haren som hoppar 2 steg i taget kommer aldrig att landa på ett udda tal eftersom det är ett jämnt antal hela varvet runt. Kängurun som hoppar tre steg i taget kommer inte att landa på 11 första gången, men nästa gång hon kommer till Målpunkten är efter 33 steg, vilket motsvarar 11 Känguru-hopp.

Utöka uppgiften med fler djur som hoppar 4, 5, 6 eller 7 steg i taget. Generalisera problemet genom att göra en lista över alla tal (i steg räknat) som hamnar på Målpunkten (11, 33, 55, 77, 99 …). Vilka tal är dessa delbara med?

Gör en annan bana med ett annat antal än 22 runt banan och undersök den på samma sätt.

20 Delbarhet

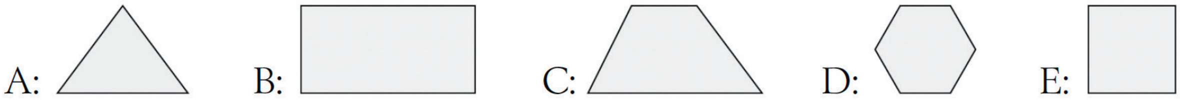
Också här fokuseras avståndet mellan tal. Stolpar placeras ut med lika långa avstånd, så problemet handlar om delbarhet. Ur ett problemlösningsperspektiv liknar det problem 15 genom att man får viss information och ur dem måste härleda ny information för att kunna lösa problemet stegvis.

Vi vet den totala sträckan 120 meter. Vi vet avstånden 24, 30 och 66. Avståndet mellan stolparna måste alltså vara en delare till alla dessa tal, och det måste vara 6. Därmed vet vi att 120 ska delas in i 6-meterssektioner, det vill säga 20 sektioner. Men eftersom det är 1 stolpe i vardera ändan behövs 21 stolpar. En avgörande insikt är att stolparna är fler än avstånden mellan stolparna.

Ett annan problem om delbarhet finns i Benjamin 2022:11

Geometri

3 Geometriska figurer.



Problemet handlar om att uppfatta att en figur kan delas upp i andra figurer. Begreppen *triangel* och rät linje finns i frågan, men i problemet ingår även andra polygoner: *rektangel, parallelltrapets, hexagon* och *kvadrat.*

Undersök om det blir annorlunda om villkoret för den räta linjen ändras:

a) dela med en rät linje som går genom två hörn

b) dela med en rät linje som går genom ett hörn och skär en sida

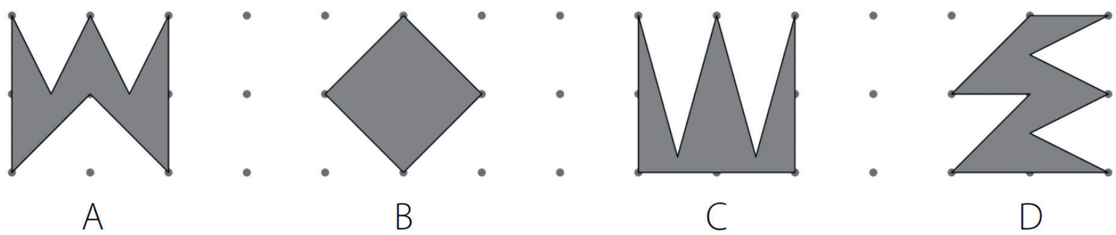
c) dela med en rät linje som inte går genom något hörn.

Diskutera varför det blir olika svar. Generalisera resonemanget genom att också undersöka polygoner med fler sidor och ställ frågan: *Hur kan man se direkt när en polygon går att dela in i två trianglar med en rät linje?* Gör en tabell över hur många hörn den ursprungliga figuren har och hur många hörn det sammanlagt finns i de två figurer som skapas när den delas.

Svaret på frågan är att två trianglar alltid har 6 hörn tillsammans och att det alltid blir minst två nya hörn vid delningen med en rät linje eftersom linjen vid varje skärningspunkt skapar två hörn av det som antingen var ett hörn eller inget hörn. Det betyder att en figur som har fler än 4 hörn från början aldrig kan delas in i två trianglar med en rät linje.

Ett liknande lite svårare problem finns i årets Cadet 2023 problem 2. Där ska man skapa parallelltrapetser istället för trianglar genom att dela figurer med en rät linje.

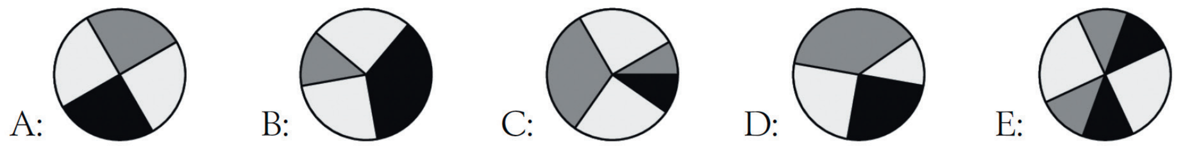
12 Area



I det här problemet gäller det att kunna uppfatta delar av en area och att föreställa sig hur olika delar av arean flyttas runt för att skapa större delar. Låt eleverna beskriva med ord hur de ser och resonerar kring areorna.

Liknande problem: Benjamin 2022:6, 2022:13, 2019:14, 2016:9, 2014:7
Liknande men mer utmanande problem: Cadet 2017:20, 2009:16 och Benjamin 2011:21

8 Cirkelskivor



Problemet handlar om att kunna ”se det som inte syns”. I samtal om det här problemet tränas innebörden i orden *hel*, *halv* och *fjärdedel*. Även ordet *cirkelsektor* kan användas i ett meningsfullt sammanhang här. Till vart och ett av svarsalternativen kan du ställa frågor som:

Hur kan bitarna ligga?

Var ser du halvcirkeln?

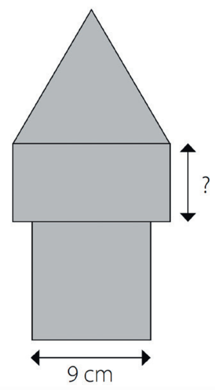
Var ser du fjärdedelarna?

Skapa ett liknande problem. Utöka problemet med fler bitar eller med olika stora cirkelsektorer (exempelvis tredjedelar, sjättedelar, åttondelar).

En variant är att eleven klipper ut cirkelsektorer i olikfärgat papper och får i uppgift att skapa olika bilder genom att lägga dem ovanpå varandra och rita av de mönster som bildas. Be dem sedan rita ett mönster som inte går att skapa med de bitar som fanns. Därefter byter de med varandra och ska lista ut vilket som inte går.

Ett liknande men enklare problem finns i årets Ecolier 2023 problem 8.

15 Omkrets



Här gäller det att undersöka vilken information som finns i figuren och texten, och sedan utnyttja den genom att minnas eller härleda formlerna för omkrets av de olika figurerna och steg för steg fundera på vad den information man har kan användas till. Om elever funnit problemet svårt är det ett bra tillfälle att träna på problemlösning.

a) Vad vet vi?
Kvadraten sida är 9 $\Rightarrow$ kvadratens omkrets är $9 \cdot 4 = 36$.
Alla figurer har samma omkrets.

b) Hur kan vi använda informationen?
Beräkna triangels sida som är $36 / 3 = 12$.

c) Vad har vi fått reda på nu?
Rektangelns långsida är 12. Totalt är omkretsen 36.
Som en formel kan omkretsen skrivas $O = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ med a som längden på långsidan och b på kortsidan. Insatta värden ger ekvationen: $36 = 2 \cdot 12 + 2 \cdot b$.

Även om problemet går bra att lösa utan algebra kan det användas för att visa hur det algebraiska uttrycket kan se ut som en förberedelse för situationer där talen inte är så lätta. Arbeta med andra flerstegsproblem på samma sätt genom att svara på frågorna:
Vad vet vi? Hur kan vi använda informationen? Vad har vi fått reda på? Problem 20 är ett annat sådant problem.

Liknande problem: Benjamin 2020:19, 2018:8, Cadet 2020:13

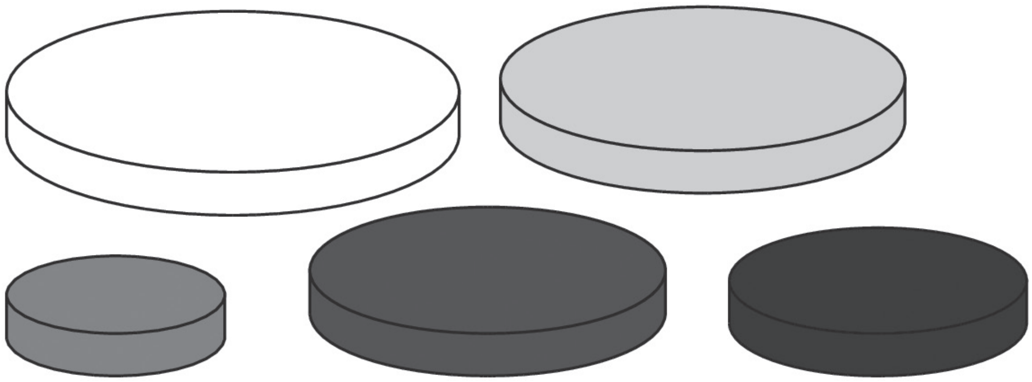
Kombinatorik

På hur många sätt? Det är en grundläggande fråga inom kombinatorik. I årets Benjamin finns två problem av den typen. I båda fallen handlar det om att hitta sätt att vara systematisk så att man är säker på att man täckt in alla alternativ.

Be eleverna berätta hur de har gjort och diskutera vilken strategi som är bäst för just detta problem.

> Hur håller de reda på vilka kombinationer de har testat?
>
> Gör de en tabell?
>
> Ritar de?
>
> Är de systematiska?

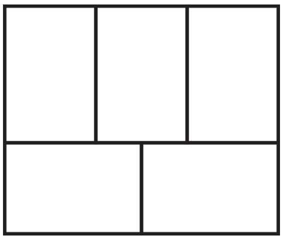
4 Stapla torn



Variera problemet genom att ändra antalet skivor och även ändra antalet skivor i tornen.

Liknande problem finns också i årets Ecolier 2023 problem 10 och Cadet 2023 problem 8.

22 Färgläggning



Problemet är en variant på det klassiska kartritningsproblemet som handlar om hur många färger som behövs för att färglägga en karta utan att länder som gränsar till varanda har samma färg.

Här kan det vara en hjälp att faktiskt genomföra färgläggningen på ett systematiskt sätt. Rita upp flera likadana rektanglar uppdelade i fem delar och färglägg en i taget systematiskt så att variationen växer fram.

Utöka problemet med fler rektanglar. Testa med mer oregelbundna områden som exempelvis kartor med landsgränser utsatta eller komplexa geometriska figurer. Färglägg alla fält i olika färger så att inga fält som gränsar till varandra har samma färg. Går det med bara tre färger? Om inte – hur många behövs?

Problemet har givit upphov till *fyrfärgssatsen* som formulerades som en hypotes i mitten av 1800-talet men som bevisades matematiskt först 1976. Det är lätt att övertyga sig om att fyra färger räcker med hjälp av exempel, men svårt att bevisa matematiskt. Man fick till slut ta hjälp av datorer för att bevisa satsen. Till en början accepterades inte beviset av alla matematiker eftersom det inte direkt och enkelt kunde kontrolleras av en människa, men idag är det helt accepterat.

Logik

18 Sant eller falskt

Att förstå vad det innebär att ett negerat påstående (*det var inte jag*) är falskt är både en språklig och en logisk utmaning. Att arbeta med den här typen av logisk slutledning är därför att arbeta språkutvecklande.

Diskutera tillsammans vad varje påstående betyder, dels om det är sant, dels om det är falskt.

Gör en tabell och testa hypoteser:
om ett påstående är sant så är alla de andra falska, vad innebär det?

Påstående	*Sant*	*Falskt*
Maria: Det var Peter	Peter	inte Peter
Peter: Det var Rickard	Rickard	Inte Rickard
Rickard: Det var inte jag	Inte Rickard	Rickard
Tina: Det var inte jag	Inte Tina	Tina

Liknande problem: Benjamin 2021:21, 2020:16, 2018:11

Algebra

24 Skapa algebraiska uttryck

Det här problemet är ett bra exempel på ett problem där algebraisk notation är till stor hjälp. Det är svårt att reda ut alla dessa samband så länge de står i text. Att översätta från text till en mer kompakt representation ger en helt annan överblick och öppnar upp för nya lösningsstrategier.

Låt eleverna bestämma hur ni ska förkorta informationen om de olika priserna och skriv upp tydligt vad som menas med de bokstäver som införs för variablerna. Exempelvis så här:

Låt H vara priset på en hatt
K vara priset på en kjol
T vara priset på tröja
C vara priset på en keps

Formulera sedan tillsammans de olika sambanden med hjälp av dessa symboler:

$2H = 5K$
$3K = 8T$
$2T = 3C$

Härifrån kan du be eleverna försöka använda en av variablerna för att uttrycka alla de övriga. Låt eleverna testa olika förslag. Om de vill hålla sig till heltal är det enklast att uttrycka alla som kepsar, eller ”växla över” alla till kepsar.

$2T = 3C$
$1K = 4C$ (eftersom $3K = 4 \cdot 2T = 4 \cdot 3C = 12C$)
$1H = 10C$ (eftersom $2H = 5K = 5 \cdot 4C = 20C$)

Väljer man någon av de andra plaggen blir resultatet att man får arbeta med tal i bråkform