Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Cadet 2022, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 29 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan och dela också ut de Kängurureflexer med texten *Jag har deltagit i Kängurun*, som kan köpas från NCM: bestallning.ncm.gu.se/produkt/reflex. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med

Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Ytterligare förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen finns samlade i dokumentet *Arbeta vidare med Cadet.*

Nominera till Mikael Passares stipendium

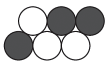
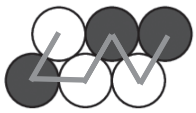
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap.* Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen senast *30 april* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit och kommentarer – Cadet 2022

1	A	8	Det minsta möjliga tal som kan bildas med de fem lapparna är 107 314 598. $\boxed{107}$ $\boxed{31}$ $\boxed{4}$ $\boxed{59}$ $\boxed{8}$
2	C	84	I varje omgång hoppar Kengu 9 steg. Efter 9 omgångar har Kengu hoppat till 81 på tallinjen. Efter det landar han på 81 + 3 = 84. Nästa blir 84 + 3 = 87. Nu är Kengu förbi talen i alternativen. Av de alternativ som finns landar alltså Kengu enbart på 84.
3	B	60 SOS 09	Endast plåten i B kommer att se likadan ut när den vänds upp och ner. De andra alternativen visar antingen siffror upp och ner (A och D) eller bokstäver spegelvända (C och E).
4	C	4 × 8 × 12 cm	Längderna av klossens sidor benämner vi H, B och L. Vi vet att H = 4 cm. Då kan vi dra slutsatsen att en sida på kuben är 6 · 4 = 24 cm. Eftersom sidorna på kuben är lika långa är 3B = 24 cm och 2L = 24 cm. Alltså är B = 8 cm och L = 12 cm.
5	A		När larven är utsträckt är varannan del vit och varannan del svart. Endast i A kan man följa detta mönster med varannan vit och varannan svart. 
6	D	Mellan 15 och 18	Summan av alla tal till vänster är 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 = 81. Det betyder att uttryckets värde är 81 – 45 = 36 för stort. Därför måste minustecknet placeras före 18 så att summan minskar med 18 i stället för att öka med 18. Då sjunker värdet med 18 · 2 = 36. Vi har 6 + 9 + 12 + 15 - 18 + 21 = 45.
7	B	**B**	Om vi följer stigen från botten av bilden till toppen av bilden är det 2 träd på vänster sida och 3 på höger sida. Det ska alltså planteras ett träd på vänster sida om den stigen. Om vi följer den översta stigen som startar i bildens vänstra sida och leder till den nedersta på högra sidan av bilden så finns det 2 träd ovanför stigen och 3 träd nedanför stigen. Alltså måste ett träd placeras ovanför den stigen. Tillsammans med informationen innan måste det planteras ett träd i **B**.
8	A	25	De udda heltalen är 1, 3, 5, 7 och 9. Den första siffran måste vara 1. De andra två siffrorna kan vara vilket som helst av de fem udda talen. Antal kombinationer blir alltså 1 × 5 × 5 = 25.
9	C	5	Vi tittar på entalssiffrorna i uttrycket. Talet $(XXX2)^2$ slutar på 4 och summan 7133029 slutar på 9. Den dolda entalssiffran i talet $(2XXX)^2$ måste vara 5. Det visar sig att hela uttrycket är $2385^2 + 1202^2 = 7133029$.
10	D	6	En stapel med 8 glas är 42 cm hög och en stapel med 2 glas är 18 cm hög. Skillnaden är alltså 24 cm. Detta innebär att för varje extra glas som läggs till en stapel så ökar dess höjd med 24/6 = 4 cm. Om ytterligare fyra glas läggs till stapeln med 2 glas skulle det skapa en stapel med höjden 18 + 4 × 4 = 34 cm. Det betyder att en stapel med 6 glas är den största som får plats på hyllan (Höjden av 7 glas är 18 + 5 × 4 = 38 cm).

11 D 58

Det minsta antalet prickar på utsidan får vi om den första och den sista tärningen är vända så att det är ettor utåt i ändarna. Resten visar alltid $4 \cdot 2 \cdot 7$ prickar hur vi än vänder på tärningarna. Minsta antal: $4 \cdot 2 \cdot 7 + 1 + 1 = 58$.

12 E 16

Eftersom systrarna bara är tre så måste en av dem vara med i båda paren. Låt hennes ålder vara a. De andra systrarnas åldrar benämner vi b och c.
Då gäller att

$$\frac{a+b+c}{3} = 10, \frac{a+b}{2} = 11 \text{ och } \frac{a+c}{2} = 12.$$

Då är $a + b + c = 30$, $a + b = 22$ och $a + c = 24$, så att $a = 16$, $b = 6$, $c = 8$. Den äldsta är 16 år.

13 E 48 m²

De två områdena med dahlior har samma storlek. Dra en diagonal i den stora kvadraten så att vi får fyra lika stora trianglar av de två områdena med dahlior. Dessa fyra trianglar har vardera arean $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12\ \text{m}^2$. Den totala arean är alltså $48\ \text{m}^2$.

14 C 15:40

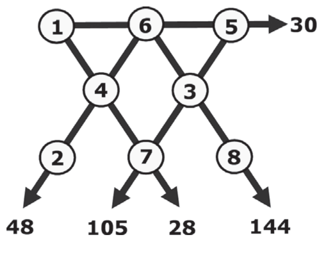
Eftersom en klocka går en min för fort och den andra drar sig två min blir skillnaden mellan klockorna 3 min för varje timme. Då tidsskillnaden nu är 60 min har det alltså gått 60/3 = 20 timmar sedan man ställde dem med rätt tid. Den snabba klockan visar nu 12:00 men den har gått för fort i 20 timmar. Så den korrekta tiden är nu 11:40 och för 20 timmar sedan var den 15:40 (därför att $11 - 20 + 24 = 15$).

15 B 8

Summan av alla Werners och Rias tal är $22 + 34 = 56$. Om vi tittar på summan av ett av Werners tal, n, och motsvarande Rias tal, $7 - n$, så får vi att $n + (7 - n) = 7$. Så antalet sådana par av tal måste vara $56/7 = 8$.
Werner skrev alltså ner åtta tal.

16 D 17

Talen 30 och 105 är multiplar av 5, så talet 5 måste placeras i korsningen mellan dessa produkter. På liknande sätt är 105 och 28 multiplar av 7, vilket placeras i korsningen av dessa produkter. Nu kan vi steg för steg bestämma siffrorna i övriga ringar, t ex i följande ordning: först 3, sen 6 och 8, sen 1, sen 4 och sist 2. Summan är $2 + 7 + 8 = 17$.



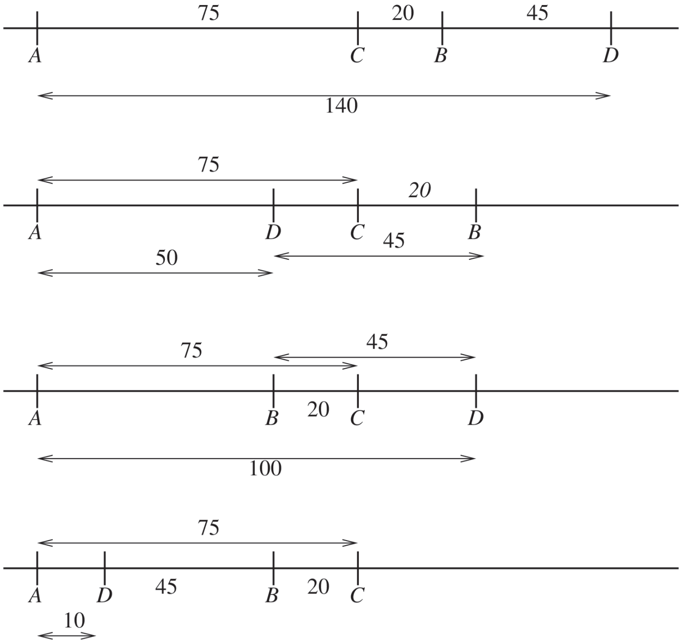
17 B 1

Om vi tittar på de fyra rutorna uppe i vänstra hörnet samt de fyra rutorna uppe i högra hörnet så har de två rutor gemensamt. Därför måste $2 + a = 4 + b$, alltså a är 2 större än b. På motsvarande sätt nere i vänstra respektive högra hörnet får vi att $? + a = 3 + b$. Därför är $? = 1$.

2		4
a		b
?		3

18 C 80 km

AD = |AC ± CB ± BD| = |75 ± 20 ± 45| alltså |75 + 20 + 45| eller |75 + 20 – 45| eller |75 – 20 + 45| eller |75 – 20– 45| som ger 140 eller 50 eller 100 eller 10. Alltså är alternativet 80 km inte möjligt.
De 4 möjliga avstånden åskådliggörs i följande 4 bilder:



19 D $\frac{12}{7}$

Låt bredden på en rektangel betecknas b och längden l. Då är $4b = 3l$, dvs $l = 4b/3$. Då är förhållandet

$$\frac{AB}{BC} = \frac{4b}{l+b} = \frac{4b}{\frac{4b}{3}+b} = \frac{4b}{\frac{7b}{3}} = \frac{12}{7}$$

20 A $\frac{5}{3}$ liter

Blandningen har 1 l för mycket blå färg, nämligen 3 l blå färg i stället för 2 l. Han måste reducera så mycket av blandningen så att 1 l blå färg försvinner och sedan tillsätta gul färg. Dvs han måste kasta bort 1/3 av all blå färg, och därmed 1/3 av blandningen. Det betyder att 5/3 liter färg kastas.

21 A torsdag

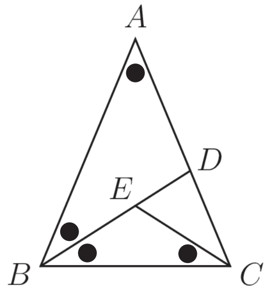
Om zebran har en tala-sanning-dag:
Det måste vara torsdag idag eftersom det är enda dagen då zebran talar sanning som följs av en ljugar-dag.
Om zebran har en ljugar-dag:
Det måste vara måndag eftersom det är enda ljugardagen som följs av en tala-sanning-dag.
Mowgli vet efter zebrans svar att det antingen är en måndag eller en torsdag.
Med samma resonemang:
Om det panterns tala-sanning-dag är det en söndag och om det är en ljugar-dag är det en torsdag.
Med både panterns och zebrans svar i åtanke vet Mowgli att idag är det torsdag.

22 C 15

Låt n beteckna antalet punkter från början.
Efter att Renard sätter ut punkter första gången kommer antalet punkter att vara $2n–1$ (han sätter dit ytterligare $n–1$ punkter mellan n punkter). Andra gången Renard sätter ut punkter blir det totalt $2(2n–1)–1$ punkter. Sedan $2(2(2n–1)–1)–1$ och efter fjärde gången, $2(2(2(2n–1)–1)–1)–1$ punkter.
$2(2(2(2n–1)–1)–1)–1 = 225$
$16n – 15 = 225$
$n = 15$
Alternativ lösning: Renard skulle kunna ta avsnittet mellan den första och den sista punkten och böja till en cirkel så att den första och den sista punkten blir en. Då skulle antalet punkter på cirkeln bli en färre än på linjen.
Med likadan procedur skulle han sätta lika många nya punkter på cirkeln som han gjorde på linjen men antalet punkter skulle fördubblas i varje omgång och resultera i $225 – 1 = 224$ punkter.
Så från början var det $224/16 = 14$ punkter på cirkeln och (en fler) 15 på linjen.

23 E 36

Toppvinkeln i en likbent triangel är den mellan lika långa sidor, så triangel *BDA* har sin toppvinkel till höger och triangel *CDE* har toppvinkeln längst ner.
Toppvinklarna i triangel *BDA* och i triangel *BCE* är lika stora eftersom de är sidovinklar till varsin basvinkel i triangel *CDE*. Det betyder att även basvinklarna i triangel *BDA* och i triangel *BCE* är lika stora (markeras med ●).
Den hela ursprungliga triangeln är också likbent, alltså $5 \cdot ● = 180°$ och $● = 36°$.



24 B 337

Vi betecknar det totala antalet koalor med K.
(Med ett djur menas antingen en känguru eller en koala och inget annat).
Antal djur i en park = antal koalor + antal kängurun i denna park = antal koalor i denna park + antal koalor i de 6 andra parkerna = K
Antal djur i alla parker = $7 \cdot K$
Antal kängurun i alla parker = $7 \cdot K – K = 6 \cdot K$
Vi vet att detta antal är 2022, alltså $K = 2022/6 = 337$.

Redovisning av resultat

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Det enklaste sättet att redovisa är att ladda upp det ifyllda kalkylbladet. I det finns alla uppgifter som vi behöver. Mer information om hur kalkylbladet fungerar finns i dokumentet *Att använda kalkylbladet*, som du hittar på ncm.gu.se/kanguru.

Om du *inte* har använt kalkylbladet ber vi dig fylla i motsvarande uppgifter i det formulär som finns på webben. De blanketter som finns här är till för att du ska kunna sammanställa de uppgifter som du sen ska skriva in.

Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031–786 69 85. Redovisa senast den 29 april.

Redovisningsblankett A

Namn och poäng för de två bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
8		
9		
gy 1		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	åk 8	åk 9	gy 1
77 – 96 poäng			
57 – 76 poäng			
41 – 56 poäng			
25 – 40 poäng			
13 – 24 poäng			
0 – 12 poäng			
Totalt antal deltagare			

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	åk 8	åk 9	gy 1
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			