Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Student 2021, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 20 maj*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan och dela också ut de Kängurureflexer med texten *Jag har deltagit i Kängurun*, som kan köpas från NCM: bestallning.ncm.gu.se/produkt/reflex. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med

Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Nominera till Mikael Passares stipendium

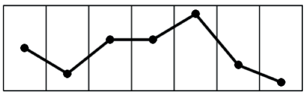
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen *senast 20 maj* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit och kommentarer – Student 2021

1 E 

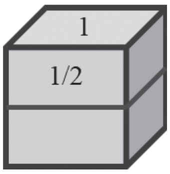
Prognosbilden säger att de två första dagarna sjunker temperaturen för att stiga till en platå de kommande två dagarna, temperaturen stiger under ytterligare en dag, för att sedan sjunka de två sista dagarna. Den graf som beskriver det förloppet är E.

2 A 9

$4 < \sqrt{21} < 5$ ger att $20 - \sqrt{21} > 15$ och $20 + \sqrt{21} < 25$.
Heltalen mellan 15 och 25 är 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 och 24 dvs 9 heltal.

3 D 4

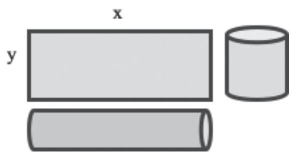
När rätblocket delas i två identiska block får varje del två sidor med arean 1 och fyra sidor med arean 1/2.
Ett rätblock får begränsningsarean $2 \cdot 1 + 4 \cdot 1/2 = 4$.



4 E $\pi/4$

Låt en kvadrat ha sidan s, den har då arean s^2. Den i kvadraten inskrivna cirkeln har radien $s/2$ och arean $s^2/4 \cdot \pi$.
Förhållandet blir $\pi/4$, vilket inte beror på kvadratens sida.

5 B y/x



Låt den längre cylindern ha radien r. Då är $2r \cdot \pi = y$.
Volymen blir $V_l = \pi \frac{y}{4\pi^2}^{2} \cdot x = \frac{y^2 x}{4\pi}$
Låt den kortare cylindern ha radien R. Då är $2R \cdot \pi = x$.
Volymen blir $V_k = \pi \frac{x^2}{4\pi^2} \cdot y = \frac{x^2 y}{4\pi}$
Förhållandet mellan volymen av den längre och den kortare cylindern blir
$\frac{V_l}{V_k} = \frac{y}{x}$

6 E $\sqrt[4]{x}$

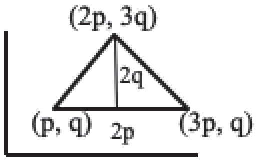
$x = \frac{\pi}{4} < 1$ ger $x^4 < x^2 < x < \sqrt{x} < \sqrt[4]{x}$

7 C 9

Om ingen siffra upprepas, så finns det sex tal som innehåller siffrorna 1, 3 och 5. De är alla delbara med 3 eftersom talens siffersumma är 9. Om exakt en siffra upprepas kan vi få tal bestående av siffrorna
1, 1, 3; 1, 1, 5; 3, 3, 1; 3, 3, 5; 5, 5, 1 och 5, 5, 3.
Inget av dessa tal är delbara med 3. Om en siffra upprepas tre gånger, får vi de tre talen 111, 333 och 555. De är delbara med 3. Det ger 9 tal.

8 **C** $2pq$

Vi markerar punkterna i ett koordinatsystem. Triangelns bas får längden $2p$ och höjden blir $2q$. Triangelns area blir $(2p \cdot 2q) / 2 = 2pq$.



9 **D** $y = ax + c$

Andragradsfunktionens graf ger $a > 0$ och $c > 0$. Eftersom c är y-koordinaten för andragradsfunktionens skärningspunkt med y-axeln, så är $m = c$ i den räta linjens ekvation på formen $y = kx + m$. Det utesluter alternativen B, C och E. I alternativ A är den räta linjens skärningspunkt med x-axeln, $x = -c/b$. Den punkten är en av andragradsfunktionens nollställen. Insättning i andragradsfunktionens ekvation ger $ac^2 = 0$ som saknar lösning. Det utesluter alternativ A. Alltså återstår alternativ D. Linjen $y = ax + c$ skär x-axeln då $x = -c/a$. Insättning i andragradsfunktionen leder till ekvationen $c(c - b + a) = 0$ och sambandet $b = a + c$. Det leder till andragradsekvationen $ax^2 + (a + c)x + c = 0$ med rötterna $x = -1$ och $x = -c/a$ där $c > a > 0$. T ex uppfyller andragradsfunktionen $f(x) = x^2 + 4x + 3$ och linjen $y = x + 3$ villkoren.

10 **D** 1/5

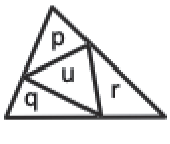
Primtalsfaktorisering ger $7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, så 7! är på formen $2^4 \cdot N$ med N udda. Det innebär att en udda delare M till 7! är en delare till N och omvänt en udda delare till N är en udda delare till 7!. De fyra talen $2M$, 2^2M, 2^3M och 2^4M är också delare till 7! Alltså är de udda delarna 1/5 av alla delare.

11 **D** 80

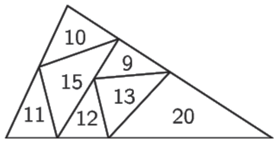
Givet $abc + 99 = cba$ eller $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c + 9 \cdot 10 + 9 = c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$. Förenkling leder till $a + 1 = c$, $a \neq 0$, $c \neq 0$. Det ger 8 kombinationer på a och c. För varje kombination på a och c finns 10 möjligheter på b, dvs. totalt 80 tresiffriga tal uppfyller villkoret.

12 **B** 34

Observera att omkretsen av triangeln nedan är $p + q + r - u$.



Vi tillämpar det två gånger på triangeln, först på den del som består av deltrianglarna med omkretsarna 9, 12, 20 och 13. Den delen kan då ersättas av en triangel med omkretsen $9 + 12 + 20 - 13 = 28$.



Sedan på delarna med omkretsarna 10, 11, 28 och 15. Hela triangeln har omkretsen $10 + 11 + 28 - 15 = 34$.

13 **A** 2025

Vi kan först konstatera att de tal som innehåller siffran 0 inte bidrar till summan. För talen från 10 till 19 är bidraget till summan $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot 9 = 45$. I intervallet 20 till 29 är bidraget $2 \cdot 45$, i intervallet 30 till 39 är bidraget $3 \cdot 45$ osv till intervallet 90 till 99 som bidrar med $9 \cdot 45$.
Hela summan blir $45 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 9) = 45 \cdot 45 = 2025$.

14 B 10

Summorna i rad a och b är samma som summorna i kolumnerna c och d.

		c		d	
		16		22	
a	20	X	21	X	2
		25		1	
b	24	X	5	X	6
		4		?	

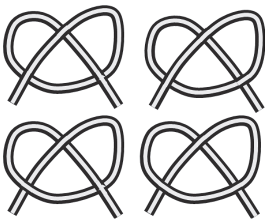
3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Dessa rader och kolumner har fyra gemensamma tal, markerade med X, som vi kan ignorera. Det gäller fortfarande att a + b = c + d, så
(20 + 21 + 2) + (24 + 5 + 6) = (16 +25 + 4) + (22 + 1 + ?) vilket ger ? = 10
Den högra kvadraten visar en magisk kvadrat där även summan av talen i varje diagonal är lika med summan av talen i varje rad och i varje kolumn. Den summan är 65.

15 B 1/4

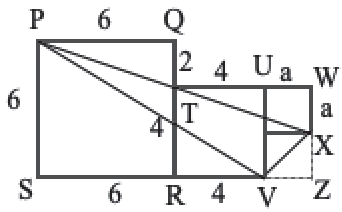
På grund av symmetri kan vi anta att den översta snörkorsningen är av typ

För de andra två korsningarna har vi olika möjligheter. De kan båda vara av samma typ som den översta, de kan båda vara av den andra typen och en kan vara samma typ som den översta och en av den andra typen. Det ger de fyra möjligheterna som bilderna visar. Den enda av dessa fyra som ger en knut när man drar i snörändarna är den nedre vänstra, alltså är sannolikheten 1/4.



16 C 16

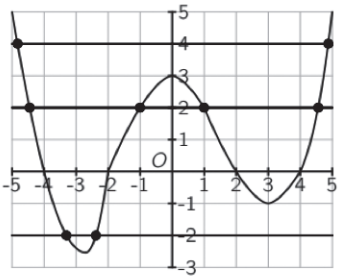
De två större kvadraterna har måtten 6 x 6 och 4 x 4 och låt den mindre kvadraten ha måtten a x a.



Trianglarna PQT och TWX är likformiga, båda har en rät vinkel och
$\angle$ QPT = $\angle$ WTX (likbelägna vinklar).
Likformigheten ger $2/6 = a/(4+a)$ med lösning $a = 2$.
Arean av triangel PXV = arean av parallelltrapets PSZX – arean av triangel PSV – arean av triangel VZX.
Arean = $\frac{6+2}{2} \cdot 12 - \frac{6 \cdot 10}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 16$.

17 E 8

Från grafen har vi att ekvationen $f(x) = 0$ har rötterna $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$.
$f(f(x)) = 0$ innebär att $f(x) = -4$ (1), $f(x) = -2$ (2), $f(x) = 2$ (3) eller $f(x) = 4$ (4)



(1) saknar lösning då linjen $y = -4$ inte skär grafen
(2) har 2 rötter eftersom linjen $y = -2$ skär grafen två gånger, för $x \approx -3{,}4$ och för $x \approx -2{,}5$
(3) har 4 rötter eftersom linjen $y = 2$ skär grafen fyra gånger, för $x \approx -4{,}5$, för $x = -1$, för $x = 1$ och för $x \approx 4{,}5$
(4) har 2 rötter eftersom linjen $y = 4$ skär grafen två gånger, för $x \approx -4{,}8$ och för $x \approx 4{,}8$
Det ger totalt 8 olika rötter.

18 B 9

Om summan av den ene elevens tal är S, så är summan av den andre elevens tal $2S$. Då är totalsumman av deras bortsuddade tal $3S$ vilken är delbar med 3. Summan av de sju talen är 63, vilket också är delbart med 3. Det innebär att det tal som återstår måste vara en multipel av 3, dvs. 9 eller 15. Anta att 15 är talet som står kvar. Då är summan av de bortsuddade talen $63 - 15 = 48$. Då ska en elev ha suddat bort tre tal som har summan $48/3 = 16$ från listan 1, 2, 7, 9, 10 och 19. Det går inte. Alltså är talet 9. Summan av de bortsuddade talen blir $63 - 9 = 54$. En elev har suddat bort tre tal som har summan $54/3 = 18$ från listan 1,2, 7, 10, 15 och 19. Det går med talen 1, 2 och 15. Den andre eleven har då suddat bort talen 7, 10, 19 som har summan 36.

19 D 625

Låt $a = n^2$ och $b = m^2$. $a - b = n^2 - m^2 = (n+m)(n-m) = c$ (1)
Produkten av två heltal är ett primtal om en av faktorerna är 1 och den andra är ett primtal. $n - m = 1$ ger $n = 1 + m$ och $m = n - 1$.
Insättning i (1) ger $c = 2m + 1$ eller $c = 2n - 1$.
A: $m = 10$ ger $c = 21$ ej primtal, $n = 10$ ger $c = 19$ primtal
B: $m = 12$ ger $c = 25$ ej primtal, $n = 12$ ger $c = 23$ primtal
C: $m = 20$ ger $c = 41$ primtal, $n = 20$ ger $c = 39$ ej primtal
D: $m = 25$ ger $c = 51$ ej primtal, $n = 25$ ger $c = 49$ ej primtal
E: $m = 50$ ger $c = 101$ primtal, $n = 50$ ger $c = 99$ ej primtal
Alternativ D, 625 kan varken vara a eller b.

20 E inget alt.

För $y = 1$ får vi sambandet $f(x+1) = f(x) \cdot f(1) = 2f(x)$.
Det ger $f(x+1)/f(x) = 2$ som leder till att samtliga 2020 termer i det givna uttrycket är 2. Summan är $2020 \cdot 2 = 4040$.

21 B 50

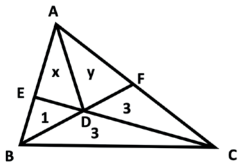
Varje femhörning gränsar till fem kvadrater och varje kvadrat gränsar till två femhörningar. Det ger att antal kvadrater är $(12 \cdot 5)/2 = 30$. Varje kvadrat gränsar till 2 trianglar och varje triangel till tre kvadrater. Det ger att antal trianglar är $(30 \cdot 2)/3 = 20$.
Summan blir $12 \cdot 5 + 30 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 = 50$.

22 A 19

Tre punkter kan väljas på $\binom{15}{3} = 455$ sätt. Numrera punkterna 1, 2, 3, …, 15. Väljer vi punkterna (1, 6, 11), (2, 7, 12), (3, 8, 13), (4, 9, 14) eller (5, 10, 15) får vi 5 liksidiga trianglar som är kongruenta. Bland de återstående 450 sätten finns det 6 olika likbenta trianglar, var och en i 15 olika rotationer, dvs totalt 90 likbenta trianglar. De återstående 360 trianglarna är oliksidiga, var och en i 15 olika rotationer och i 15 olika speglingar. Det ger 360/30 = 12 trianglar. Totalt finns $1 + 6 + 12 = 19$ olika trianglar.

23 A 12

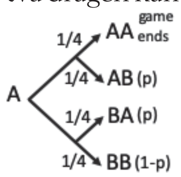
Beteckna arean av triangel ADE med x och arean av triangel AFD med y.



De två trianglarna med area 3 delar höjd, alltså är BD = DF och arean av triangel ADB = arean av triangel AFD. Av det följer att $x + 1 = y$ (1).
Arean av triangel BDC = 3 · arean av triangel BED, så DC = 3 · ED och $y + 3 = 3x$ (2). (1) och (2) ger $x = 2$, $y = 3$.
Alltså har triangel ABC arean $2 + 3 + 3 + 3 + 1 = 12$.

24 B 2/3

Låt p vara vinstchansen för spelare A. Tittar vi på vem som vinner de nästa två dragen kan det vara AA, AB, BA och BB, var och en med sannolikhet 1/4.



I fall 1 vinner A. I fall 2 och 3 är vi tillbaka i samma situation som när vi började (p). I fall 4 är vi tillbaka till början, men med ombytta roller, chansen för B att vinna är p och chansen för A $1 - p$.
Summering ger $p = 1/4 + p \cdot 1/4 + p \cdot 1/4 + (1 - p) \cdot 1/4$ med $p = 2/3$.

Alternativ lösning. Låt S(n) vara sannolikheten att A vinner när han har n poäng fler än B.
S(3) = 1, S(-3) = 0
För n däremellan gäller S(n) = S(n–1) / 2 + S(n+1) / 2
av detta följer S(n+1) – S(n) = S(n) – S(n–1).
Alltså vi har S(n–2) – S(n-3) = S(n–1) – S(n–2) = S(n) – S(n–1) = S(n+1) – S(n) = S(n+2) – S(n+1) = S(n+3) – S(n+2) = (S(3) – S(-3)) / 6 = 1/6
Alltså S(1) = S(-3) + 4/6 = 4/6

Redovisning av resultat

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Det enklaste sättet att redovisa är att ladda upp det ifyllda kalkylbladet. I det finns alla uppgifter som vi behöver. Mer information om hur kalkylbladet fungerar finns i dokumentet *Att använda kalkylbladet*, som du hittar på ncm.gu.se/kanguru.

Om du *inte* har använt kalkylbladet ber vi dig fylla i motsvarande uppgifter i det formulär som finns på webben. De blanketter som finns här är till för att du ska kunna sammanställa de uppgifter som du sen ska skriva in.

Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031–786 69 85. Redovisa senast den 20 maj.

Redovisningsblankett A

Namn och poäng för de två bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
kurs 4		
kurs 5		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	kurs 4	kurs 5
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		
Totalt antal deltagare		

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	kurs 4	kurs 5
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		