Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2021, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 20 maj*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan och dela också ut de Kängurureflexer med texten *Jag har deltagit i Kängurun*, som kan köpas från NCM: bestallning.ncm.gu.se/produkt/reflex. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med

Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

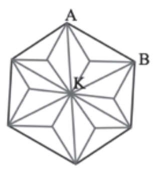
För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen *senast 20 maj* till:

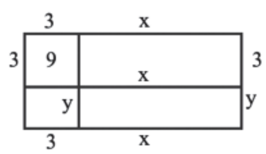
Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit och kommentarer – Junior 2021

1	B		
2	C	14 mars	Den tredje torsdagen kan inte infalla under de två första veckorna. Som tidigast kan den infalla den 15:e i en månad. 14 mars kan inte vara korrekt.
3	B	$P < R < Q$	De delar av vägen som går längs kanterna av de liksidiga trianglarna är lika, så vi behöver bara jämföra de horisontella vägarna. De horisontella vägarna är kortare närmare triangelns topp och längre närmare basen. P har två horisontella sträckor på samma nivå som två sträckor i R och den tredje närmare toppen än den tredje sträckan i R. Alltså $P < R$. Q har två horisontella sträckor på samma nivå som två sträckor i R och den tredje närmare basen än den tredje sträckan i R. Alltså $Q > R$. Då har vi att $P < R < Q$.
4	B	21–20	Låt x vara antalet mål som gästerna gör i andra halvlek. Slutställningen ger oss då ekvationen $9 + 2x = (14 + x) + 1$. Så $x = 6$ och slutresultatet var $9 + 2x = 21$ mot $14 + x = 20$. *Alternativ lösning*. Beräkna för varje alternativ hur många mål lagen gjorde i andra halvlek. Endast B ger att hemmalaget gjorde dubbelt så många mål som gästerna.
5	B	5 cm	Bredden på den övre vänstra rektangeln är 18/6 = 3 cm, så den nedre vänstra rektangeln har också en bredd på 3 cm och dess höjd är 12/3 = 4 cm. Nu fortsätter vi i den andra kolumnen och arbetar på ett liknande sätt, från den nedre rektangeln. På det viset kan vi beräkna alla höjder och bredder.
6	C	45 cm^2	Den mindre vinkeln i de sex kongruenta romberna är $360° / 6 = 60°$. Om vi ritar den längsta diagonalen i varje romb får vi liksidiga trianglar, som till exempel KAB med $KA = KB = AB$. Hexagonen är nu uppdelad i $12 + 6 = 18$ likbenta trianglar. De är alla kongruenta med varandra. Varje triangels area är hälften av en romb, det vill säga 2,5 cm^2, och sexhörningens area är $18 \cdot 2{,}5 = 45$ cm^2.



7	C	22 år	Låt x vara åldern på Göran, Sara och Elisabeth. Vi har då: $(3x + 19 + 20 + 21) / 6 = 21$ och $x = 22$ *Alternativ lösning*. Jazzbandets totala ålder är $6 \cdot 21 = 126$. Vi subtraherar de tre kända åldrarna: $126 – (19 + 20 + 21) = 66$. Elisabeths ålder: $66 / 3 = 22$.
8	C	18 cm	Låt x och y vara sidorna i rektangeln $ABCD$ (se bild). Hela figurens omkrets ger ekvationen $2(x + 3) + 2(y + 3) = 30$ och $2(x + y) = 18$.



9 D

Den saknade triangeln ska vara likbent men inte rätvinklig. Triangel *A* och *E* går bort. Av de återstående tre är det triangel *D* som har samma area som en av de givna.

10 E 1/9

Låt x vara det sökta talet. Vi har då $x - 1/10 = x/10$ och $x = 1/9$.

11 B 18 min 12 s

Varje tomtebloss, utom det sista brinner i $9/10 \cdot 2$ minuter. Den totala brinntiden är $9 \cdot 9/10 \cdot 2 + 2 = 18{,}2$ minuter, dvs 18 minuter och 12 sekunder.
(0,2 minuter är $0{,}2 \cdot 60 = 12$ sekunder)

12 A 1

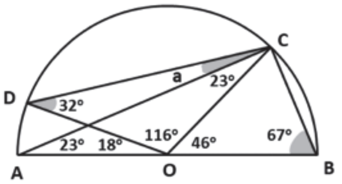
Den totala summan av de tre ringarna är $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42$ eftersom varje tal finns på två av ringarna. Talen på en ring har då summan $42/3 = 14$.
De två ringarna som innehåller talet 6 saknar alltså $14 - 6 = 8$. Det finns bara två sätt att få 8 som en summa av tre olika tal från 1 till 5, nämligen $1 + 2 + 5$ och $1 + 3 + 4$. Eftersom talet 1 är med i båda fallen måste den vara placerad i skärningspunkten mellan de två cirklarna som innehåller 6.
Alternativ lösning. För varje ring finns ett par tal utanför. Varje tal tillhör exakt ett sådant par. Summor i alla par är lika eftersom summorna i ringarna är lika. Maken till det största talet, 6, är det minsta talet, 1.

13 E 21

Det totala antalet personer i besättningarna är 81. När en av båtarna har gått i mål finns det fem möjligheter för antalet som återstår.
$81 - 9 = 72$ $81 - 15 = 66$ $81 - 17 = 64$ $81 - 19 = 62$ $81 - 21 = 60$
Av de personer som är kvar utgör pojkarna en fjärdedel. Tre av de fem möjliga antalen är en multipel av 4 och om vi för dessa bestämmer antalet pojkar får vi:
$72/4 = 18$ $64/4 = 16$ $60/4 = 15$
Av dessa motsvarar endast 15 ett antal i en besättning, och inget motsvarar summan av flera besättningar. Antalet pojkar som är kvar måste vara 15 och då var det 21 medlemmar i besättningen på den båt som har gått i mål.

14 A 9°

Triangeln ABC (se figur) är rätvinklig. Det ger att vinkeln CAB är $90° - 67° = 23°$.
Triangeln OCA är likbent vilket ger att vinkeln OCA också är 23°.
Triangeln OCD är också likbent vilket ger att $\alpha = 32° - 23° = 9°$.



15 E 6

Startordning:	E D C B A
Bil D vann och måste ha kört om 3 bilar:	E C B A D
Bil B kom 2:a och måste ha kört om bil A:	E C A B D
Bil E kom 3:a och har kört om bil C och A:	C A E B D

Alla dessa omkörningar är nödvändiga, men kan ha skett i en annan ordning.
Det minsta antalet poäng är $3 + 1 + 2 = 6$.

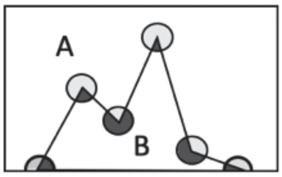
16 C 16

Efter flera sådana operationer har vi en kvadrat som i figuren.
Ruta d kan beräknas enligt (a + b + c + d) – (a + b) – c = 47 – 18 – 13 = 16.

a	a+b	b
a+c	a+b +c+d	b+d
c	c+d	d

17 C 1080°

De ljusa och de mörka vinklarna tillsammans uppgår till $4 \cdot 360° + 2 \cdot 180° = 1800°$, men de mörka vinklarna ska inte räknas med. De är inre vinklar i en 6-sidig polygon B och är tillsammans $(6 - 2) \cdot 180° = 720°$. De ljusa vinklarna är $1800° - 720° = 1080°$.
Alternativ lösning. Summan av vinklarna i den 10-sidiga polygonen A är $(10 - 2) \cdot 180° = 1440°$. Om vi subtraherar de fyra hörnvinklarna på ramen får vi $1440° - 4 \cdot 90° = 1080°$.



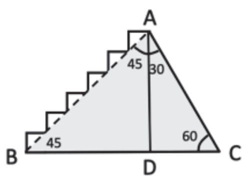
18 E 4045

Om vi går från vänster till höger får vi följande tal i rutorna
$2021,\ a - 2021,\ 2022,\ a - 2022,\ 2023,\ a - 2023,\ 2024,\ a - 2024$
Från den sista rutan får vi $a - 2024 = 2021$ och $a = 4045$.
Alternativ lösning. Vi kan beräkna summan av talen i alla rutor på två sätt. Från den övre utsidan av rutnätet får vi att summan av alla tal är $4a$. Från den undre utsidan får vi summan $2021 + 3 \cdot (a + 1) + 2021$.
Lösningen till ekvationen $4a = 2021 + 3 \cdot (a + 1) + 2021$ är $a = 4045$.

19 E $\sqrt{3}/3$

Rita höjden AD. Vinkel A delas nu upp i 30° och 45°. Vi har att AD = BD. Genom att projicera trappan på AD och BD ser vi att dess längd är AD + BD = 2AD. Förhållandet mellan de två sträckornas längder är

$$\frac{AC}{2AD} = \frac{1}{2}\frac{AC}{AD} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



20 B -78

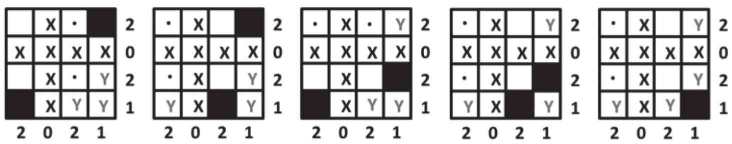
$a + b + c = 0$ ger att $a + b = -c, b + c = -a$ och $c + a = -b$.
Det ger att $(a + b)(b + c)(c + a) = -c \cdot -a \cdot -b = -abc = -78$.

21 E 25

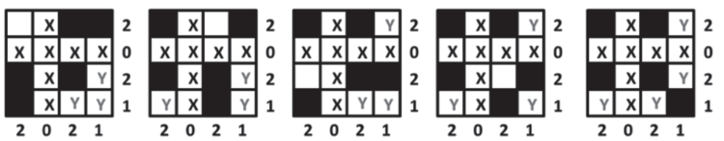
De enda sätten att få 19 poäng med högst 10 tal 3, 1 och 0 är
$19 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ och $19 = 6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0$.
Det andra fallet är inte möjligt. De tre 0-poängarna måste vara samma för alla flickorna och de kan som högst få $7 \cdot 3 = 21$ poäng. Men eftersom alla skulle ha olika poäng måste de ha haft 19, 20 och 21 poäng, men det går inte att få 20 poäng från 7 ord.
Sylvia måste alltså ha fått sina 19 poäng som $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$. De andra måste då också ha en 0-poängare och fått sina poäng från 9 ord, där 1-poängarna fördelas mellan dem. Det finns tre tänkbara möjligheter
$27 = 9 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0$ och $19 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$
eller
$25 = 8 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ och $21 = 6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0$
eller
$23 = 7 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ och $23 = 7 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0$
Då alla ska ha olika poäng faller det första och sista alternativet. Flickorna hade poängen 19, 21 och 25.

22 D 5

Vi börjar med att stryka alla rutor på rader och kolumner som visar 0 svarta rutor. I figuren nedan är rutorna markerade med ett X, och vi vet att dessa rutor måste förbli omålade.



Vi tittar nu på den rad och den kolumn som ska ha exakt en svart ruta. Vi målar en av rutorna på denna rad och kolumn svart. Det kan göras på 5 olika sätt, se figuren ovan.
Vi stryker nu de andra rutorna på samma rad eller kolumn eftersom de inte kan innehålla en svart fyrkant. I figuren är de rutorna markerade med Y. Det visar sig att vi nu enkelt kan slutföra dessa 5 fall på ett unikt sätt. Ett sätt att börja är att titta på raderna eller kolumnerna som ska innehålla två svarta rutor och som har exakt två omärkta rutor. I figuren ovan är några sådana fall markerade med en punkt ".". Båda dessa omärkta rutor måste målas svarta. Därefter är alla steg obligatoriska och utan svårigheter. De 5 möjliga slutkonfigurationerna visas i figuren nedan.



23 D 40

Vi utgår ifrån att $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Vi ser att tre 5:or kommer att behövas. De andra två siffrorna ska ha produkten $2^3 = 8$. Två möjligheter; $1 \cdot 8$ och $2 \cdot 4$. Det finns $5 \cdot 4 = 20$ olika sätt att placera 1 och 8 i ett femsiffrigt tal där övriga tre siffror är 5:or. Det finns 20 sätt att placera ut 2:or och 4:or. Totalt 40.

24	C	34	Låt de åtta mynten ha följande vikter $a_8 > a_7 > a_6 > a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1 \geq 1$. Då vi söker den minsta möjliga vikten kan vi utgå ifrån att $a_1 = 1$ (Skulle $a_1 > 1$ så kan vi minska alla vikter med $a_1 - 1$). Då har vi att $a_2 \geq 2$ och $a_3 \geq 3$. Villkoren i problemet ger att $a_{k+2} + 1 > a_{k+1} + a_k$. Det betyder att $a_{k+2} \geq a_{k+1} + a_k$. Då får vi $a_4 \geq a_3 + a_2 \geq 3 + 2 = 5$, $a_5 \geq a_4 + a_3 \geq 5 + 3 = 8$ $a_6 \geq a_5 + a_4 \geq 8 + 5 = 13$ $a_7 \geq a_6 + a_5 \geq 13 + 8 = 21$ $a_8 \geq a_7 + a_6 \geq 21 + 13 = 34$ Värt att notera är att detta är Fibonacci-tal.

Redovisning av resultat

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Det enklaste sättet att redovisa är att ladda upp det ifyllda kalkylbladet. I det finns alla uppgifter som vi behöver. Mer information om hur kalkylbladet fungerar finns i dokumentet *Att använda kalkylbladet*, som du hittar på ncm.gu.se/kanguru.

Om du *inte* har använt kalkylbladet ber vi dig fylla i motsvarande uppgifter i det formulär som finns på webben. De blanketter som finns här är till för att du ska kunna sammanställa de uppgifter som du sen ska skriva in.

Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031–786 69 85. Redovisa senast den 20 maj.

Redovisningsblankett A

Namn och poäng för de två bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	**Namn**	**Poäng**
kurs 2		
kurs 3		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	kurs 2	kurs 3
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		
Totalt antal deltagare		

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	kurs 2	kurs 3
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		