Kängurutävlingen – Matematikens hopp 2021

Arbeta vidare med *Ecolier*

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur det konkreta uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare? Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har fått alternativ A som svar har tänkt?”

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Låt eleverna få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag till vidare arbete under några rubriker. Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker. Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade. Tidigare problem inom området geometri finns samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. Titta gärna på de andra tävlingsklasserna också. Även om de är avsedda för äldre elever finns det flera problem, speciellt bland de första, som kan vara roliga och användbara även för yngre. Låt gärna dina elever pröva dem.

Rumsuppfattning, mätning och geometri

Problem 1 Eriks fyra klossar

- Bygg de fem alternativen.
- Undersök hur många olika byggen med samma form som i bilderna Erik kan göra med de fyra klossarna.
- Undersök hur många olika former han kan göra med 5 klossar, 2 klossar, 3 klossar ...

Benjamin problem 1 i år är ett liknande problem, liksom Benjamin 2017:19.
Se också kommentarerna till problem 8 här nedan.

Problem 2 Fiskar på snöre

Låt eleverna beskriva muntligt hur fiskarna är uppträdda, både hur de ser ut på bilden och hur de kommer att se ut när repet sträcks ut. De får då anledning att använda flera centrala lägesbegrepp.

Problem 4 Solen

Låt eleverna beskriva var i solen biten passar. Hur gör de för att hitta rätt? Jämför olika sätt som eleverna använder. Även här får eleverna använda viktiga termer och begrepp, t ex stor, liten, spets, mellan, till vänster, till höger.

Problem 8 Klossbygge

Ser alla att den vita delen består av 4 kuber? Hur hade bilden varit ritad om det hade funnits en bit under den kub som ”sticker ut”? Låt eleverna beskriva hur den grå biten måste se ut och hur de vet det.

- Gå igenom de fem alternativen och låt eleverna komma fram till varför de felaktiga inte passar.
- Bygg konstruktionen. Prata om att den består av två våningar/lager med tre rader med tre klossar i varje rad.

Att analysera konstruktionen och se att den kan delas upp i mindre enheter, kloss, rad, våning, hjälper eleverna att bygga upp sin förståelse för volym.

Klossbygge är en typ av problem som har förekommit många gånger i Kängurutävlingen. Förslag till hur man kan arbeta med sådana och ytterligare en mängd exempel i olika svårighetsgrad, ordnade och kommenterade, finns i *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*.

Problem 13 Kakburkarna

Problemet handlar om att förstå varför det bara finns ett rätt svar här och betydelsen av att det i en burk bara finns en form och att en form bara finns i en burk.

- Diskutera hur eleverna har löst uppgiften. Har alla gjort på samma sätt?

För att lösa problemet är det inte nödvändigt att eleverna kan de geometriska termerna. Problemet är detsamma även om innehållet i burkarna ändras, det kan vara olika bokstäver t ex (så är det i motsvarande problem på Benjamin). För att kunna diskutera uppgiften behöver eleverna däremot kunna de geometriska formernas namn.

Gå igenom vilka de fem formerna är:
Kvadrat, cirkel, femhörning eller pentagon, triangel och stjärna.

- Vilka egenskaper har de geometriska formerna?
- Vilken likhet har stjärnan och pentagonen?

Någon kanske skulle kalla kvadraten för romb. Det är korrekt, alla kvadrater är romber, men alla romber är inte kvadrater. Vad är det som gör detta till en kvadrat? Det är viktigt att eleverna får se de geometriska formerna med olika orientering, så att inte alla former har en sida parallell med bokens sida. Med en urklippt kvadrat blir det tydligt att formen inte ändras för att vi vrider den.

Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Några grundläggande aspekter som passar särskilt bra för elever i denna ålder är positionssystemet, udda och jämna tal, tals uppdelning och räknesättens innebörd. Problemen utmanar också elevernas strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra dem därför att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden. Undersök tal och lek med dem, det finns mycket mer att göra med tal än att utföra beräkningar.

Problem 3 Sifferpussel

- Vilka uttryck kan vi bygga med bitarna om de inte är pusselbitar utan kan placeras fritt?
- Hur kan man få de andra svaren?

I uppgiften finns det tre siffror, 1, 2 och 3. Av dessa kan man bilda olika tal.

- Vilka olika tal går det att skapa?
- Om alla siffror måste användas bara en gång? Om inte alla måste användas? Om alla får användas flera gånger?
- Variera med andra siffror.

Benjamin problem 5 i år är ett liknande problem, liksom Ecolier 2017:1.
Se också problem 6, nedan.

Problem 5 Piltavlan

Skriv upp de fem summorna:

$9+9+9$ $10+7+7$ $8+8+8$ $8+7+7$ $10+8+7$

Diskutera strategier för att avgöra vilket som är störst, utan att utföra beräkningen.
Gör fler exempel.

- Vilken är den största summan man kan få med 3 pilar? 4 pilar? 5 pilar?
- Vilken är den minsta?
- Vilka olika summor är möjliga att få med 3 pilar?

Tidigare problem: Benjamin 2018:3.

Problem 6 Nummerskivan

Diskutera med eleverna hur man relativt snabbt kan avgöra vad som är störst, utan att direkt anteckna vilka siffrorna är. Vilken linje visar det minsta talet? Hur skulle linjen för det största möjliga talet se ut? Det minsta möjliga?

Problemet handlar dels om att kunna tolka bilden och dels om positionssystemet. Att skapa största eller minsta möjliga tal med givna siffror är en problemidé som återkommer i olika varianter.

I Ecolier 2012:13 fanns detta problem:

> Du ska göra två tresiffriga tal och du ska använda siffrorna 1, 2, 3, 4, 5 och 6. Varje siffra får du bara använda en gång. De två talen ska du sedan addera (lägga ihop). Vilken är den största summan du kan få?

- Hur ska vi resonera för att finna den största summan?
- Vilken är den minsta?
- Kan vi få störst och minst summa på olika sätt? Varför?

Låt eleverna finna alla tänkbara tresiffriga tal och sortera dem i storleksordning. Börja eventuellt med alla tresiffriga tal vi kan göra med siffrorna 1, 2 och 3. Här krävs det systematik – hur vet vi att vi har funnit alla tal? Hur många tal finns det?

Ett spel som passar i detta sammanhang är *Tänk till tusen*, som finns på Strävorna. Benjamin problem 3 i år är ett liknande problem. Se också Ecolier 2019:13.

Problem 7 Cylindern

Eleverna måste förstå att det är lika långt runt cylindern överallt och att det medför att skillnaden mellan talen som hamnar ovanför varandra är konstant. I detta fall är varje varv 21, som vi får genom att subtrahera: $27-6$. Det är dock troligt att eleverna tänker som en addition av en obekant ($6+x=27$). Problemet är en bra utgångspunkt för att diskutera sambandet mellan addition och subtraktion.

Variera problemet genom att ändra cylinderns omkrets och gör det svårare genom att öka på antal varv som måttbandet viras.

Benjamin problem 6 i år är ett liknande problem.

Problem 9 Nyårsraketen

Här måste man först räkna bort det som är ”mer”. Det är en problemtyp som ofta dyker upp i undervisningssammanhang, och som även ofta förekommer i vardagen. Det är viktigt att alla verkligen förstår innebörden av ”det blev 6 fler guldstjärnor än silverstjärnor”. Låt eleverna förklara med egna ord, göra exempel på olika antal där det är 6 fler av den ena sorten, variera med andra tal. Låt eleverna illustrera problemet med bild eller konkret material och sedan konstruera egna problem med liknande struktur.

Tidigare problem: Ecolier 2019:9.

Problem 12 Chokladbollarna

Originalproblemet handlade om glassar, men vi ändrade det till chokladbollar. Diskutera med eleverna vilken skillnad det skulle ha varit om det var glassar. Uppfattar alla att det är underförstått att alla chokladbollar kostar lika mycket? Här är det förstås en fördel att ha erfarenhet av chokladbollar och hur de brukar säljas.

Gå igenom lösningsstrategin noga. Se också kommentaren till problem 10.

Problem 16 Brandstegarna

Problemet handlar om subtraktion. Genom stegvisa jämförelser kan vi beräkna stegarnas höjd. I lösningarna finns ett alternativt sätt att resonera. Gå igenom det tillsammans och låt eleverna pröva båda metoderna.

Tidigare problem: Ecolier 2017:18.

Problem 20 Ballongerna

- Hur kan vi resonera oss fram till rätt svar?
- Vilka olika tänkbara resultat går det att få med 5 pilar?
- Vilket är det minsta? Största?

Hjälp eleverna att göra en systematisk lista med poäng från 0 till 57.

- Vilka poängsummor kan vi få på mer än ett sätt?

Tidigare problem: Ecolier 2016:23.

Problem 21 Äpplen och bananer i lådor

Jämför med problem 9. Vad är lika? Olika?
Problem som bygger på att ena delen är dubbelt så stor som den andra är vanliga både i verkligheten och i Kängurusammanhang. Om vi vet storleken på den ena delen är det relativt enkelt att beräkna dubbelt. Men när delarna är okända vet vi bara att relationen är 2:1.

Ett exempel:
Det finns dubbelt så många äpplen som bananer i korgen. Tillsamman är det 21 frukter.
Hur många bananer finns det?

- Undersök vilka antal som är möjliga att fördela med relationen 2:1. Vad har de gemensamt?

Om relationen är 2:1 måste det gå att dela mängden i tre delar. Illustrera konkret och med bild, så blir det ännu tydligare varför.

- Vad gäller för relationen 3:1? 4:1?

Tidigare problem: Ecolier 2012:12, Ecolier 2019:9, Benjamin 2013:16 och Benjamin 2017:10.

Problem 22 Tal i rutor

Gå igenom hur man kan resonera sig fram till svaret.

- Var måste 1 stå? Varför?
- Var ska 9 stå? Varför?

Låt eleverna få motivera hur de sätter ut talen och undersöka om det finns mer än ett sätt att placera talen.

Problem 23 Äppelodlaren

Vi ska få 40 genom att endast addera med termerna 30, 10 och 5. Anteckna gemensamt:
$30 + 10$
$30 + 5 + 5$
$10 + 10 + 10 + 10$
$10 + 10 + 10 + 5 + 5$ etc

eller:
$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 10$ etc

Diskutera systematiken och jämför uttrycken med den konkreta situationen.
Varför kan vi inte få ett udda antal påsar?

Tidigare problem: Ecolier 2017:11 och 2013:15, Benjamin 2013:12.

Logiskt tänkande och problemlösningsstrategier

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans och hjälp eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten. Gå också igenom eventuella oklarheter beträffande ord och meningsbyggnad.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. Att lära sig hantera motgångar och misslyckanden är viktigt för att utveckla problemlösningsförmågan.

I problemlösning spelar resonemang och argumentation en stor roll. Hjälp eleverna att göra resonemangen tydliga och visa gärna hur du själv resonerar som komplement. För att kunna utveckla sitt resonemang är det bra att kunna få möjlighet att följa mer utvecklade resonemang.

Problem 10 Bollar på våg

I det här problemet behövs ett resonemang i flera steg. Hjälp eleverna att se vilka steg de faktiskt gör. Lös problemet gemensamt och skriv så att alla kan följa med och eventuellt också skriva av lösningen. Att ha en modell av lösningen att kunna gå tillbaka till kan hjälpa eleverna att strukturera sina resonemang.

Gör fler exempel med andra värden, så att eleverna får använda samma resonemang.

- Utgå från de felaktiga alternativen och justera vågarna så att de stämmer.
- Om en vit boll väger 3 kg, vad ska det då stå på de tre vågarna?

Läs gärna Ulf Persson & André Tooms artikel *Ryska matematiska skolproblem* i Nämnaren 2006:1

Problem 11 Fem kort i rad

Låt eleverna muntligt beskriva hur de ska flytta korten för att få dem i önskad ordning.

- Genomför lösningen konkret.
- Diskutera hur problemet skulle förändras om Ellen kunde flytta två kort utan förbehållet att de ska byta plats med varandra.

Tidigare problem: Benjamin 2017: 3.

Problem 14 Bollkrock

Här är det mycket information att läsa sig till. Gå igenom texten noga tillsammans.

- Lös problemet gemensamt och låt eleverna berätta hur bollarna förändras, både i värde och riktning.
- Addera talen på de fem bollarna, utan hänsyn till riktning.
  - Vad blir summan?
- Varför blir det samma summa?

Problem 15 Koalan äter löv

Här handlar det om att inse att ”Från den andra grenen äter han lika många löv som det är kvar på den första grenen” innebär att han likaväl skulle ha kunnat äta alla löv från den första grenen. Visa detta konkret, med bild och med olika exempel så att alla förstår.

Problem 17 Lek med koppar

Gör dragen konkret. Låt eleverna få upptäcka mönstret. Efter tre drag är alla koppar vända, efter sex drag är de tillbaka till utgångsläget, efter nio drag …

- Generalisera till olika antal, hur ser kopparna ut efter 30 drag?

Problem 18 Tal i rutrad

Hur har eleverna löst problemet? Gå igenom de båda lösningarna som finns i facit.

Problem 19 Den breda hyllan

Här handlar det om grundläggande algebraiskt tänkande. Vilka likheter kan vi ställa upp?

Visa eleverna att det inte räcker att rita in smålådor i bilden, utan att vi måste kunna visa på ett övertygande sätt hur många lådor som får plats.

- Variera problemet genom att ändra antalet lådor.

Jämför med problem 10 (vågen).

- Vad är lika? Olika?
- Vilket av problemen är svårast? Varför?

Problem 24 Former på vågar

Även detta problem handlar om likheter. För att få fram likheten i andra vågen måste vi plocka bort en triangel från båda sidor. Detta sätt att tänka är grundläggande för ekvationslösning.

- Skriv ner lösningen med en blandning av matematiska symboler och ord, t ex:
  - 1 triangel + 1 sexhörning = 1 triangel + 5 rektanglar
  - 1 sexhörning = 5 rektanglar
  - etc

Jämför med problem 10. Vad är lika och vad är olika?

Att läsa

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Persson, U. & Tooms, A. (2006). *Ryska matematiska skolproblem*. Nämnaren 2006:1.

Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. Här finns bland annat Problemavdelningen och Kängurusidan. Nämnarenartiklar äldre än ett år finns fritt tillgängliga på Nämnaren på nätet, ncm.gu.se/nbas.

Månadens problem, ncm.gu.se/manadens-problem.

Strävorna, ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal larportalen.skolverket.se. Här finns problemlösning för alla stadier.