Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2020, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 30 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan och dela också ut de Kängurureflexer med texten *Jag har deltagit i Kängurun*, som kan köpas från NCM: bestallning.ncm.gu.se/produkt/reflex. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med
Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Ytterligare förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen finns samlade i dokumentet *Arbeta vidare med Junior*.

Nominera till Mikael Passares stipendium

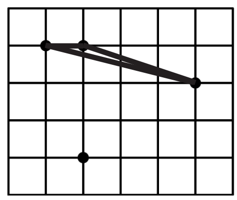
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen senast *30 april* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit och kommentarer – Junior 2020

1	D	3	Vi har talen 2, 3, 5 och 7 (som alla är primtal) att multiplicera för att få 18. Primtalsfaktoriseras 18 blir det $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Det behövs alltså 3 kast. Det är omöjligt att nå 18 i färre eller fler än tre kast eftersom 18 (och alla andra positiva heltal) bara kan primtalsfaktoriseras på ett sätt.
2	D	$1234 + 5$	Uttryckens värden är 2 346, 357, 168, 1 239 och 12 345. Talet 1 239 hamnar då i mitten i storleksordning.
3	A	0	När skjortan knäpps som på den högra bilden bildas en enda lång spiral.
4	C	-1	Då summan är så liten och vi ska välja konsekutiva tal måste några av talen vara negativa. Talen -1, 0, 1, 2 ger summan 2. Det minsta talet är då -1.
5	B	101 år	Nästa årtal med samma egenskap blir 2121 vilket inträffar om 101 år.
6	B	158	Den vänstra summan är $10(A+C)+(B+D)$ och den högra är $20(A+C)+2(B+D)$, dvs den högra summan är två gånger större än den vänstra. Alltså är den sökta summan $2 \cdot 79 = 158$.
7	E	4	Av 10 pappersbitar klipps tre. Dessa tre blir 6 bitar och 18 hörn. De oklippta 7 bitarna måste då ha $42 - 18 = 24$ hörn. Om alla 7 bitar var trianglar skulle det vara 21 hörn, men nu är det 24, dvs 3 fler hörn. Det måste vara 3 kvadrater och 4 trianglar ($3 \cdot 4$ hörn $+ 4 \cdot 3$ hörn)
8	A	$\frac{1}{2}$	Om vi använder tre av fyra punkter kan vi totalt rita 4 trianglar. Var och en av dem har en bas som är minst 1 och en höjd som är minst 1. Arean blir som minst 1/2. I bilden har vi triangeln med bas 1 och höjd 1. 
9	D	Lördag	Veckodagarna återkommer periodiskt var sjunde dag, så vi undersöker dagarna utöver en multipel av 7. Helen ska vara borta 18 dagar och för att få ut så många dagar som möjligt är det mest effektiva att få så många berättardagar på de $18 - 14 = 4$ resterande dagarna. Om hon kommer en lördag får vi in tre berättardagar till på lör, sön och tis. Att komma en lördag kommer då ge flest antal dagar. Startar det sön, mån eller tis så kommer inte lördagens berättardag med på dessa fyra dagar, startar hon en ons, tor eller fre så kommer inte tisdagens berättardag med på dessa fyra dagar.
10	B	100	Villkoren ger att $ab = 2cd$ och $abcd = 2(cd)^2$ Produkten måste vara dubbelt så stor som ett kvadrattal. Alla alternativ som finns uppfyller det förutom talet 100, då 50 inte är ett kvadrattal. I de andra alternativen är: (A) $ab = 10$, $cd = 5$ (C) $ab = 20$, $cd = 10$ (D) $ab = 30$, $cd = 15$ (E) $ab = 40$, $cd = 20$.

11 B 2 km

Notera att de båda skyltarna mot Astad och mot Cstad på bilden pekar åt olika håll trots att de båda står på vägen mellan Astad och Cstad. Det måste bero på att de står på olika sidor av vägen, alltså den som ser dem från vägen är, i förhållande till färdriktningen, vänd åt olika håll beroende på vilken av skyltarna han/hon ser.

Första skylten är 3 km från Astad, Bstad ligger 1 km längre bort. Bstad ligger alltså 4 km från Astad.

Andra skylten visar att Astad ligger 6 km bort och visar också att Bstad ligger i samma riktning som Astad. Det innebär att Bstad ligger $6-4=2$ km bort.

Alternativ lösning: Vid första skylten ser vi att vi har 1 km kvar till Bstad eftersom vägvisarna till Astad och Bstad pekar åt motsatta håll. Vid andra skylten ser vi att vi har gått 3 km till, alltså passerat Bstad och gått 2 km till.

Notera också att vi har använt avstånden till Astad och till Bstad men inte till Cstad i lösningarna ovan. Man kan även lösa problemet på andra sätt och använda avstånden till Bstad och Cstad men inte till Astad.

12 B 48 cm

Då en sida är 2/5 så lång som den andra betyder det att dessa två sidor inte är de med samma längd. Längderna på sidorna är 20 cm, L cm och $2L/5$ cm.
L är då antingen 20 cm eller $20 \cdot 5 / 2 = 50$ cm.
Alternativen ger då en triangel med sidorna 20, 20, 8 cm eller 20, 50, 20 cm.
Det sista alternativet är omöjligt då $20+20<50$.
Omkretsen på triangeln blir $20+20+8=48$ cm.

13 A 3

Om vi adderar alla diagonaler får vi alla tal i cirkelbågen samt mittentalet fyra gånger. Det betyder att vi får ekvationen $4 \cdot 13 = 40 + 4 \cdot N$, där N är mittentalet. Lösningen av ekvationen ger $N=3$.

14 C 3

Låt m vara talet som bildas av tiotals- och entalssiffran i ett tal mellan 2010 och 2099 (inklusive), dvs m är ett heltal mellan 10 och 99. Egenskapen kan uttryckas $20 \cdot m = n^2$ för ett positivt heltal n.

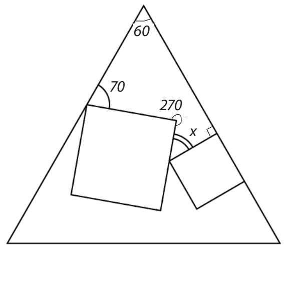
Vi ser att n^2 är delbar med 5. Alltså måste den vara delbar med 25 och m delbar med 5.

$k = m/5$ är då ett heltal mellan 2 och 19 och $100 \cdot k = n^2$. Då är även k ett kvadrattal. Det finns tre kvadrattal mellan 2 och 19: 4, 9 och 16. Detta leder till att m kan vara 20, 45 eller 80 och de andra årtalen än 2020 är 2045 och 2080.

15 E 50°

I toppen av figuren bildas en femhörning. En femhörning har alltid vinkelsumman $3 \cdot 180 = 540°$. Femhörningen har bara en okänd vinkel, x, se figur.

Vi summerar och får $70+60+90+x+270=540$
$x=50°$



Alternativ lösning:
Vinkelns vänstra axel avviker $60-70+90°$ från triangelns bas medan den högra axeln avviker $120-90°$.
Differensen är $(60-70+90-120+90)° = 50°$.

16 A 54

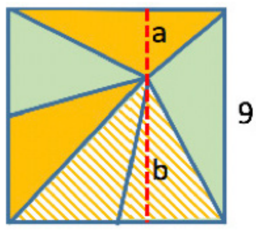
$$9x + 27y = 9(x + 3y) = \frac{9}{17}(17x + 51y) = \frac{9}{17} \cdot 102 = 9 \cdot 6 = 54$$

Alternativt: Villkoret $17x+51y=102$ ger att $y = \frac{1}{51}(102 - 17x) = 2 - \frac{x}{3}$
Sätt in uttrycket för y i den första ekvationen:

$$9x + 27y = 9x + 27(2 - \frac{x}{3}) = 9x + 54 - 9x = 54$$

17 D 6 dm

Sidan på kvadraten är 9 dm då arean är 81 dm^2. Då alla trianglar är lika stora kan vi jämföra storleken på triangeln med höjden a och slå ihop de båda bottentrianglarna så vi får en triangel med höjden b.



Vi får att $2 \cdot 9 \cdot a / 2 = 9 \cdot \mathrm{b} / 2$.
Men $a = 9 - b$ så
$18 \cdot (9 - b) / 2 = 9 \cdot b / 2$.
Lös ut b ur ekvationen och vi får att $b = 6$.

Vi kan också förklara lösningen med endast ord, utan ekvationer:
Den randiga triangeln har lika stor bas men dubbelt så stor area som triangeln överst. Alltså är dess höjd b dubbelt så stor som a och utgör 2/3 av kvadratens höjd som är 9 dm. $b = 2/3 \cdot 9$ dm $= 6$ dm.

18 B $\frac{4}{9}$

Om talet ska vara delbart med 18 måste det vara delbart med 2 och 9. Delbarhet med 2 innebär att talet slutar på 2, 4, 6 eller 8. Delbarhet med 9 innebär att talets siffersumma är delbar med 9. Talets siffersumma är oavsett placering av siffror i detta fall 45, som är delbart med 9 så det inträffar oavsett.

Det finns alltså 4 alternativ av 9 som ger önskad delbarhet. Sannolikheten är 4/9.

19 E alla blå figurer är små

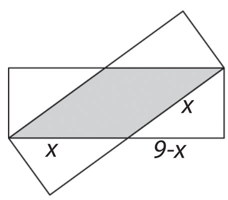
Av påstående 1 "om en figur är stor så är den en kvadrat"
följer "om en figur inte är en kvadrat så är den inte stor"
och av detta följer "om en figur är en triangel så är den liten".

Påstående 2 "om en figur är blå så är den en triangel"
tillsammans med resonemanget ovan ger
"om en figur är blå så är den liten"
vilket är precis det vad svarsalternativ E säger.

Övriga svarsalternativ behöver inte vara sanna:
A: Visst kan röda trianglar ligga på bordet (bara små), det motsägs varken av påstående 1 eller 2.
B: Små kvadrater kan ligga på bordet (bara röda).
C: Små röda figurer kan finnas där (både kvadrater och trianglar).
D: Säger samma sak som A, att röda trianglar inte kan vara med. Men det kan de.

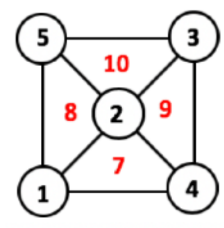
20 D 15 cm^2

Den grå figuren är en romb, då det är samma avstånd mellan parallella sträckor. Säg att rombens sida är x cm. Då får vi sambandet (se den vita högra triangeln) $x^2 = (9 - x)^2 + 3^2$ vilket förenklas till $18x = 81 + 9$ alltså $x = 5$. Rombens area är dess bas 5 cm $\cdot$ höjd 3 cm, alltså 15 cm^2.



21 C 13

Låt t vara talet i toppen. Talet t förekommer fyra gånger i sidosummorna, de övriga talen tre gånger.



Summan av alla sidosummor är $3 \cdot (1+2+3+4+5)+t = 45+t$.
Den okända sidosumman är $45+t-7-8-9-10 = t+11$.
Det måste vara basen, en av mantelns sidosummor som mest kan vara $t+5+4 = t+9$. Hela mantelns summa är $2 \cdot (1+2+3+3+5)+2t$ men också $7+8+9+10$. Likheten ger $t=2$. Alltså är den fjärde sidan, basens summa, $1+3+4+5=13$.

22 C 7

Rad 1 och kolumn 2 har en gemensam ruta, i bilden skuggad. Det betyder att $1+6+3=2+7+x$, där x är ett okänt tal i andra kolumnens sista rad. Ekvationslösning ger $x=1$. Så i sista radens andra ruta har vi en etta.

1		6	3
	2	2	8
	7		4
7	1	7	

Rad 4 och kolumn 4 har en gemensam ruta, den är också skuggad i bilden. Detta ger uttrycket $y+1+7=3+8+4$ och vårt sökta tal är $y=7$ i sista radens första ruta.

Alternativt: En precis lika bra lösning går via rutan i tredje raden och första kolumnen. De övriga fyra rutorna kan också fyllas i, men inte på ett utan på oändligt många sätt.

23 A Alice

Totala antalet matcher blir $(10+15+17)/2=21$.
Alice tävlade 10 matcher vilket innebär att hon vilade 11 matcher. Då det bara är tre som tävlar är det endast en person som kan vila åt gången. Alice kan bara ha vilat varannan match, dvs hon började med att vila och förlora andra matchen för att sedan vila och fortsätta så. Det var alltså Alice som förlorade den andra matchen.

24 D 13

Den sista siffran i någon sådan uppsättning av åtta konsekutiva tal är inte 0, eftersom 0 inte är en tillåten delare. Uppsättningen med åtta på varandra följande tal måste ha sista siffror som antingen är 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 eller 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Låt talen i serien ha formen abc där c delar $abc-c=ab$. Med andra ord skulle ab behöva vara en multipel av 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i det första fallet och 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i det andra.

Det andra fallet måste släppas eftersom den minsta sådan multipel är $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$, vilket är större än ett tresiffrigt tal. Denna serie kräver fyrsiffriga tal. Så vi koncentrerar oss på den första serien.

Den minsta multipeln av de sista siffrorna är $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ och andra möjliga blir inte tresiffriga tal. Så vår uppsättning med 8 siffror är 841, 842 ... 848 varav det minsta talet har siffersumman $8+4+1=13$.

Redovisning av resultat

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Det enklaste sättet att redovisa är att ladda upp det ifyllda kalkylbladet. I det finns alla uppgifter som vi behöver. Mer information om hur kalkylbladet fungerar finns i dokumentet *Att använda kalkylbladet*, som du hittar på ncm.gu.se/kanguru.

Om du *inte* har använt kalkylbladet ber vi dig fylla i motsvarande uppgifter i det formulär som finns på webben. De blanketter som finns här är till för att du ska kunna sammanställa de uppgifter som du sen ska skriva in.

Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031–786 69 85. Redovisa senast den 30 april.

Redovisningsblankett A

Namn och poäng för de två bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
kurs 2		
kurs 3		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	kurs 2	kurs 3
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		
Totalt antal deltagare		

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	kurs 2	kurs 3
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		