Junior – Facit med kommentarer

Trepoängsproblem

1 **D: 419** 20 · 19 + 20 + 19 = 20 · 20 + 19 = 419

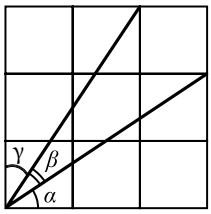
2 **E:** 

3 **C: 16** Den minsta summan man kan få är 3 (alla är ettor) och sedan kan man få alla summor upp till 18 (alla är sexor).

4 **B: 20** För varje ingång Monica väljer finns fyra möjliga utgångar. Eftersom det finns fem möjliga ingångar blir antalet kombinationer av in- och utgångar 5 · 4 = 20.

5 **C: 31 kg** Den lättaste kängurun väger mindre än medelvärdet som är 97 kg/3 = 32 $\frac{1}{3}$ kg.
Den väger inte 32 kg eftersom de då tillsammans skulle väga 32 + 33 + 34 = 99 kg eller mera. De kan däremot väga 31 kg, 32 kg och 34 kg.

6 **B:** $\boldsymbol{2\,\alpha + \beta = 90°}$



Symmetrin ger att $\gamma = \alpha$ alltså $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \alpha = 2\alpha + \beta = 90°$.

7 **A:**

I A är mer än hälften skuggat, i de övriga precis hälften.

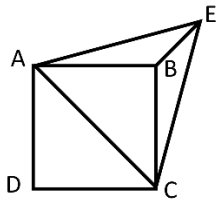
8 **B: 1, 2 och 9**

57263 – 15728 = 41535.
Ersätt de dolda siffrorna med bokstäverna A, B och C. Så 22A04 + BC331 = 41535.
Hundratalet i summan är 5, dvs A + 3 = 5, A = 2.
Tusentalen är 2 och C, och summan ska vara ett tal med entalssiffran 1. Då är C = 9.
Talet är talet 11 och vi får minnessiffra 1 som ska adderas med tiotusentalssiffrorna 2 och B, 2 + B + 1 ska vara 4. Alltså är B = 1.
Illustrera gärna med en algoritm.

Fyrapoängsproblem

9 **C: 135°**

Trianglarna *ABE* och *CBE* är kongruenta (motsvarande sidor är lika) så $\angle CBE = \angle ABE$.
$\angle CBE + \angle ABE + 90° = 360°$, $\angle CBE = (360° - 90°)/2 = 135°$.



10 **C:** $\mathbf{\frac{14}{45}}$

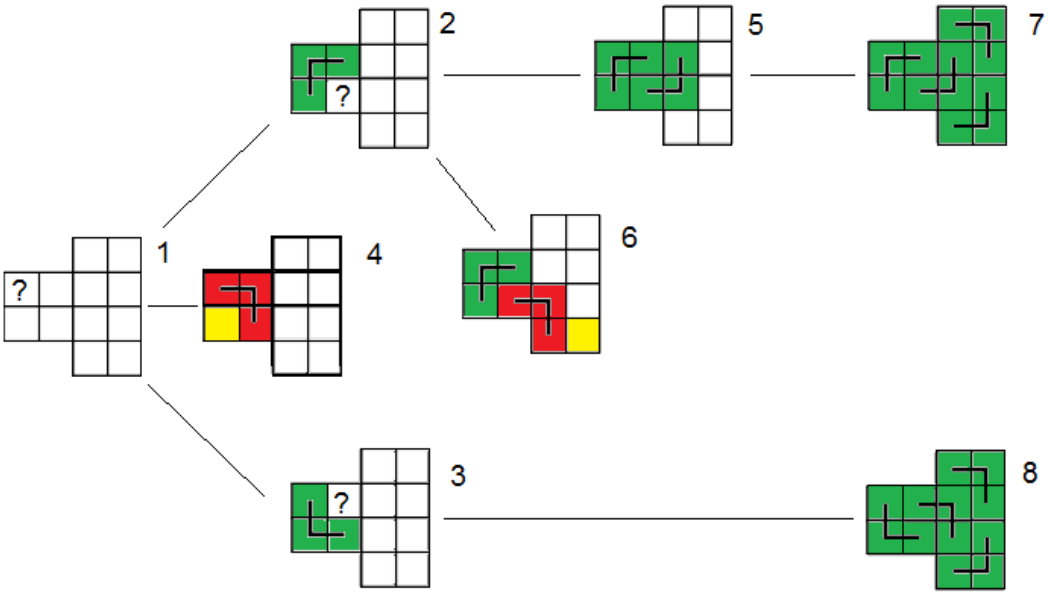
Det minsta bråk man kan få av talen är $\frac{1}{10}$. Om vi ska addera två bråk som ska vara så små som möjligt blir de två minsta $\frac{1}{9}$ och $\frac{2}{10}$ eftersom $\frac{1}{10} + \frac{2}{9} > \frac{1}{9} + \frac{2}{10}$.

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{10} = \frac{(10+18)}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$$

Alternativ lösning:
De två bråk som ska ingå i summan ska ha största möjliga nämnare, alltså 10 och 9 samt minsta möjliga täljare: 1 och 2. Summan av dessa två bråk är en summa av tre stambråk med niondelar och tiondelar. Tiondelar är de minsta så vi tar två av dem:
$\frac{2}{10} + \frac{1}{9} = \frac{14}{45}$

11 **B: 2**

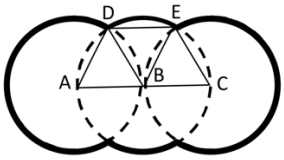
Rutan med frågetecken i bild 1 kan täckas med en L-bit på två olika sätt, som i bild 2 eller som i bild 3, men inte som i bild 4 eftersom den gula rutan då blir omöjlig att täcka.
Rutan med frågetecken i bild 2 kan täckas som i bild 5 men inte som i bild 6.
De återstående två L-bitarna kan bara placeras som i bild 7.
Det finns alltså bara ett sätt att placera de övriga L-bitarna om man väljer att placera en L-bit som i bild 2. Väljer man att placera första L-biten som i bild 3 så måste de övriga L-bitarna placeras som i bild 8. Sammanlagt 2 sätt.



12 D: 40 Cykling och löpning utgör $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$ av hela sträckan. Simningen utgör därmed $\frac{1}{20}$ av totala sträckan och det motsvarar 2 km så hela loppet är 2 · 20 = 40 km.

13 B: $\frac{1}{2}$ 1 liter koncentrat + 7 liter vatten ger 8 liter juice. Till 2 liter juice behövs 1/4 av ingredienserna alltså 1/4 liter koncentrat vilket är hälften av det som finns i flaskan.

14 A: $\frac{10\pi R}{3}$ Trianglarna *ABD* och *BCE* är liksidiga då alla deras sidor är *R*.
$\angle DBE = 180° - \angle ABD - \angle CBE = 180° - 60° - 60° = 60°$ och vertikalvinkeln till $\angle DBE$ är lika stor.
Figurens omkrets består av 4 bågar med radie *R* och längderna $\frac{\pi}{3} \cdot R$ och $4 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot R$, två bågar av varje längd, $\frac{10 \cdot \pi \cdot R}{3}$ sammanlagt.

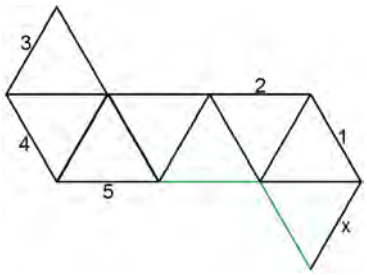


15 C: 10 Villkoren ger att $3a + 4b = 10a + b$, så att $3b = 7a$.
Vi vet också att $a \neq 0$.
Den enda lösningen för siffrorna *a* och *b* är $a = 3$, $b = 7$, så att $a + b = 10$.

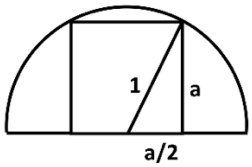
16 D: 10 Eftersom antalet päron ska vara olika i olika lådor och
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 0 > 60 kan det inte bli fler än 11 lådor.
Antalet lådor kan inte heller vara 11 eftersom antalet äpplen, vilket är 60, inte är delbart med 11.
Med 10 lådor kan vi lägga 6 äpplen i varje och päronen kan fördelas på flera olika sätt, t ex 0-1-2-4-5-7-8-9-11-13 eller 1-2-3-4-5-7-8-9-10-11.

Fempoängsproblem

17 E: 5 I varje hörn av en oktaeder möts fyra kanter, alltså måste de två gröna linjerna vara en och samma kant.
När de limmas ser vi på samma sätt att *x* och 5 måste vara en och samma kant.



18 A: $\frac{4}{5}$ cm² Om kvadratens sida är *a* så ger Pythagoras sats att $1 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{5}{4} \cdot a^2$, alltså $a^2 = \frac{4}{5}$.



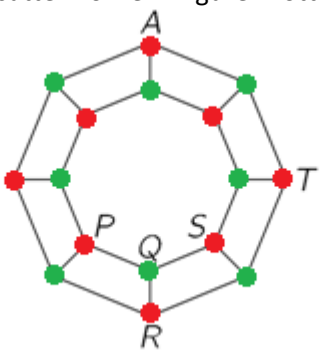
19 E: 5 cm Punkterna befinner sig på avstånd x cm och y cm från centrum,
$x = y + 3$.
Alla punkter på en roterande stel kropp rör sig med hastighet proportionell mot avståndet från rotationscentrum. Alltså är $x = 2{,}5 \cdot y$.
Dessa två ekvationer ger:
$x = 2{,}5 \cdot (x - 3)$
$7{,}5 = 1{,}5 \cdot x$
$x = 5$

20 B: (444) Ingen av de första tre tripplarna, de som är bildade av talen 1 till 9 förekommer bland svarsalternativen. Samtliga tal som följer är tvåsiffriga (10 till 99). Vi delar resten av sifferföljden i grupper om 6 siffror. Varje sådan grupp innehåller två tripplar. Kalla den första trippeln i varje grupp vänstertrippel och den andra högertrippel. T ex kan en första sådan grupp presenteras så här:

resten 1	resten 2	delbart med 3
1 0	1 1	1 2
vänster trippel	höger trippel	

De första två siffrorna i en vänstertrippel kommer från ett tvåsiffrigt tal som ger resten 1 vid division med 3, och omvänt: varje sådant tal hamnar i en vänstertrippel. De sista två siffrorna i en högertrippel kommer från ett tal delbart med 3. Sifferkombinationerna i A, C, D och E är vänstertripplar, de består av siffror från ett tal som ger resten 1 vid delning med 3 och den första siffran i nästkommande tal. Sifferkombinationen i B är varken en vänster- eller en högertrippel.

21 C: endast Q Vi färgsätter hörnen i figuren rött och grönt så här:



Hörn förbundna med en kant har olika färger. Varje förflyttning går antingen från ett rött hörn till ett grönt eller från ett grönt till ett rött. Myran som startar i ett rött hörn ska efter ett udda antal förflyttningar befinna sig vid ett grönt hörn och efter ett jämnt antal förflyttningar vid ett rött. Därför är det uteslutet att den efter 2019 förflyttningar befinner sig vid *P*, *R*, *S* eller *T*. Däremot kan den komma till *Q* på olika sätt t ex genom att först med 5 förflyttningar komma till *Q* och sedan 1007 gånger gå fram och tillbaka mellan *Q* och *R*.

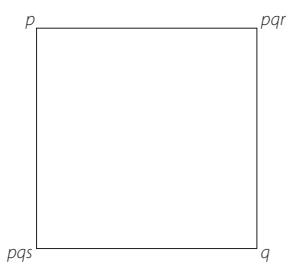
22 C: 2 Låt A vara entalssiffran i det tresiffriga talet a, B entalssiffran i b och C dito i c.
A kan inte vara större än 2 för då skulle även första siffran i a vara >2 och $a > 299$, $b > 599$ och c fyrsiffrigt. Om $A = 2$ så är $B = 5$, $b \geq 505$ och c skulle vara fyrsiffrigt igen.
Alltså $A = 1$ och då är $B = 3$, $C = 7$ och c ligger mellan 700 och 799.
Då måste b ligga mellan 350 och 399 och a mellan 175 och 199.
Det finns två tal med sista siffran lika med den första inom detta intervall: 181 och 191. Om $a = 181$ så är $b = 363$ och $c = 727$. Om $a = 191$ så är $b = 383$ och $c = 767$.

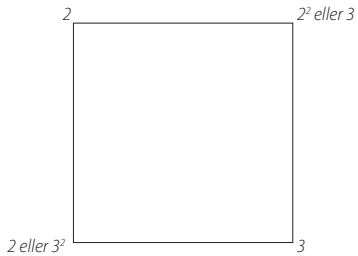
23 C: 14 Låt det fyrsiffriga talet vara $abcd$. Vi har fyra upplysningar om talet
1. abc delar $abcd$
2. abd delar $abcd$
3. acd delar $abcd$
4. bcd delar $abcd$

Vi vet också att $a > 0$.
1 ger abc delar d, d måste vara 0 eftersom abc är tresiffrigt.
2 ger $ab0$ delar $abc0$ alltså ab delar abc, ab delar c, c måste vara 0.
3 ger $a00$ delar $ab00$, a delar ab, a delar b.
4 ger $b00$ delar $ab00$, b delar ab, b delar $a0$, b delar $10a$.

Från 3 och 4 har vi att b är en multipel av a och samtidigt en delare till $10a$.
Då finns det tre möjligheter, $b = a$, $b = 2a$ eller $b = 5a$. De enda möjligheterna är de 14 talen, 1100, 2200, …, 9900, 1200, 2400, 3600, 4800 och 1500.

24 D: 35 Inget av hörntalen kan vara 1 eftersom det diagonalt motsatta hörntalet då är en multipel av 1 och det är inte tillåtet.
Betrakta två tal i diagonalt motsatta hörn.
Eftersom de inte är multiplar av varandra, så kan det ena talet vara ett primtal, säg p, och det andra talet ett annat primtal, säg q, ($p \neq q$).
Betrakta nu de två hörnen mellan dessa hörn.
De hörnen är multiplar av dessa båda hörn, dvs multiplar av pq, men inte av varandra, då de är diagonalt motsatta.
Låt de talen vara pgr respektive pqs, där r och s är primtal, $r \neq s$.
De minsta positiva tal vi kan välja är $p = 2$, $q = 3$ (eller tvärtom) och $r = 2$, $s = 3$ (eller tvärtom). Det ger talen 2, 3, 12 och 18 med summan 35 (se fig).

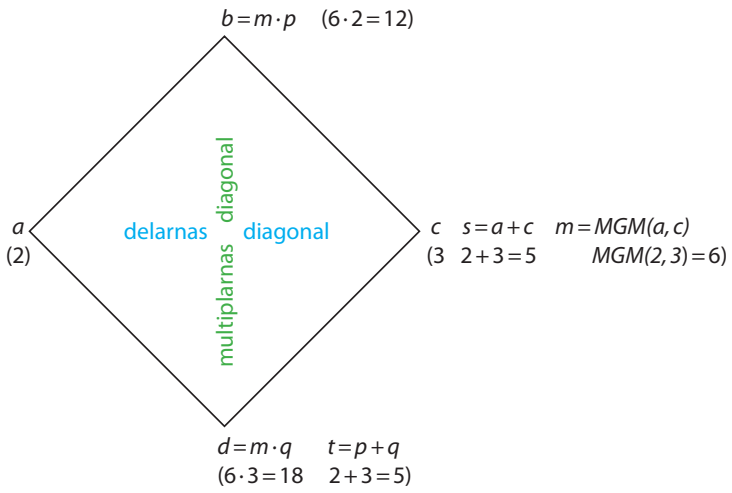




Alternativ lösning:
En enkel undersökning visar att för positiva heltal j och k sådana att varken j är en multipel till k eller k en multipel till j gäller följande olikheter:

$j > 1$ $\quad k > 1$ $\quad j \neq k$ $\quad j + k \geq 5$ $\quad$ MGM(j, k) ≥ 6.

Inget av de fyra talen vid kvadratens hörn kan samtidigt vara en delare till ett av granntalen och en multipel av det andra eftersom det första granntalet då skulle vara en multipel av det andra som ligger diagonalt mot det första vilket skulle strida mot premisserna. Av detta följer att båda talen på en av diagonalerna, "delarnas diagonal" måste vara delare till båda talen på den andra diagonalen, "multiplarnas diagonal".
Låt a och c vara tal på delarnas diagonal samt b och d tal på multiplarnas diagonal. Låt $s = a + c$ och m = MGM(a,c). Talen b och d som är multiplar både av a och av c måste vara delbara med m. Låt p och q vara sådana tal att $b = m \cdot p$ och $d = m \cdot q$ och låt $t = p + q$.



Då har vi $a + b + c + d = s + m \cdot t$. Både s och t är summor av var sitt par av positiva heltal som inte är multiplar av varandra vilket ger s ≥ 5, t ≥ 5 och $m \geq 6$.
Alltså $a + b + c + d = s + m \cdot t \geq 5 + 6 \cdot 5 = 35$.
Talen $a = 2$, $b = 12$, $c = 3$ och $d = 18$ uppfyller villkoren och har summan 35
($s = 5$, $m = 6$, $p = 2$, $q = 3$ och $t = 5$).